Algunes contribucions a l'estudi del problema de la paraula per a grups

Memòria d'investigació

Autor: Javier Juan Bordoy Lora

Director: Francesc A. Rosselló Llompart

Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
21 setembre 2009

Javier Juan Bordoy Lora: ALGUNES CONTRIBUCIONS A L'ESTUDI DEL PROBLEMA DE LA PARAULA PER A GRUPS, Memòria d'investigació.

Palma, setembre de 2009.

D. Francesc A. Rosselló Llompart, Doctor en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona i Catedràtic d'Escola Universitària de l'àrea de Ciències de la Computació i Intel·ligència Artificial del Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de les Illes Balears,

FA CONSTAR:

que la present memòria "ALGUNES CONTRIBUCIONS A L'ESTUDI DEL PROBLEMA DE LA PARAULA PER A GRUPS" presentada per Javier Juan Bordoy Lora per optar al grau de Màster en Matemàtiques ha estat realitzada sota la seva direcció i reuneix la suficient matèria original per ser considerada com a memòria d'investigació.

Palma, 25 de setembre de 2009.

Signat: Francesc A. Rosselló Llompart

A na Isabel

Índex

Llista de figures

Llista de símbols

Introducció

Un dels problemes fonamentals de la teoria de grups és el que es coneix com el *problema de la paraula*, que consisteix en trobar un algorisme que, donada una presentació $\mathcal{P}$ d'un grup G, decideixi si una paraula w sobre els generadors de $\mathcal{P}$ representa l'element neutre de G. Novikov, l'any 1955, va demostrar que existeixen grups finitament presentats amb el problema de la paraula irresoluble. Per tant, calen condicions addicionals per assegurar la resolubilitat del problema de la paraula. Algunes d'aquestes condicions provénen de la Teoria Geomètrica de Grups, la qual estudia les propietats dels grups dotant-los d'estructura geomètrica.

Dins aquesta teoria, una condició que assegura que un grup G tengui el problema de la paraula resoluble és que certa funció de caràcter geomètric, anomenada funció de Dehn de G i que s'indica amb δ_G, estigui fitada per una funció recursiva. D'altra banda, l'ordre de la funció de Dehn proporciona informació sobre la *complexitat* del grup G: com més alt és el seu ordre, més complex és el grup. De forma general, el nostre objectiu és, d'una banda, afeblir les condicions conegudes per a què δ_G estigui fitada per una funció recursiva i, de l'altra, millorar les fites de les funcions de Dehn de certa classe de grups.

Formalment, les funcions de Dehn es defineixen a partir dels grafs de Cayley i els diagrames de van Kampen. Donat un grup G i $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ una presentació finita de G, el *graf de Cayley* $\Gamma_{G,X}$ *de* G *respecte de* X és el graf dirigit i etiquetat tal que $V(\Gamma_{G,X}) = G$, $E(\Gamma_{G,X}) = \{(g, gx) \mid g \in G, x \in X\}$ i cada arc (g, gx) té etiqueta x. Hi ha una correspondència entre les paraules sobre X i els camins de $\Gamma_{G,X}$. A més, les paraules w sobre X que representen l'element neutre de G, és a dir, $w = 1 \in G$, formen camins tancats des 1 dins $\Gamma_{G,X}$. Aquestes paraules s'anomenen paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$.

Per a tota paraula w nul-homotòpica per $\mathcal{P}$, un *diagrama de van Kampen* $\mathcal{D}_w$ *per a* w *respecte de* $\mathcal{P}$ és un CW-complex de dimensió 2, planar i finit amb un punt base $\star$ a la vora de $\mathcal{D}_w$ tal que el seus arcs són dirigits i etiquetats amb elements de $X \cup X^{-1}$, les etiquetes de la vora de $\mathcal{D}_w$, llegides consecutivament des de $\star$, formen w, i les etiquetes de les seves cares, llegides consecutivament, formen una paraula de $R^{\pm 1}$. Si indiquem amb $C(\mathcal{D}_w)$ el nombre de cares de D_w, es defineix l'àrea de w com al mínim de $C(\mathcal{D})$ variant $\mathcal{D}$ sobre els diagrames de van Kampen per a w (respecte de $\mathcal{P}$).

Amb aquestes notacions, la *funció de Dehn de* $\mathcal{P}$ es defineix com la funció $\delta_{\mathcal{P}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\delta_{\mathcal{P}}(n)$ és el màxim de les àrees de les paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$ de longitud menor o igual que n. Si $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ són presentacions finites d'un grup G, aleshores $\delta_{\mathcal{P}}$ i $\delta_{\mathcal{P}'}$ són equivalents mòdul transformacions lineals. Així, la *funció de Dehn de* G, δ_G, es defineix com la funció de Dehn d'alguna presentació finita de G, mòdul transformacions lineals. Un teorema clàssic de la Teoria Geomètrica de Grups estableix que un grup G té el problema de la paraula resoluble si, i només si, δ_G està fitada per una funció recursiva.

Una condició que assegura que un grup G tengui el problema de la paraula resoluble és que existeixi X un conjunt finit de generadors de G tal que, per a tots $g, h \in V(\Gamma_{G,X})$ a distància unitat dins el graf de Cayley, poguem elegir camins σ_g i σ_h des de 1 fins a g i h, respectivament, tals que σ_g i σ_h estiguin com a màxim a distància k, per a qualque $k \geq 0$

constant. Aquesta condició es coneix amb el nom de *k-company de viatge*. En aquest cas, δ_G és d'ordre exponencial. Aquesta condició es pot generalitzar *viatjant* pels camins σ_g i σ_h asincrònicament, és a dir, a diferents velocitats. Si a cada posició d'aquest viatge, la distància és menor que k, aleshores es parla de la *propietat del k-company de viatge asincrònicament*. Igualment, en aquest cas, δ_G té ordre exponencial.

Bridson [10] va generalitzar aquestes condicions, demostrant que si g i h es troben com a molt a distància n de la unitat i σ_g i σ_h estan a distància com a màxim $n-2$, viatjant tant síncronica com asincrònicament, aleshores $\delta_G(x)$ és de l'ordre e^{Cx^3}, per a qualque constant $C > 0$. Riley [45], per la seva banda, va millorar aquest ordre en el cas en què σ_g i σ_h són camins geodèsics sobre $\Gamma_{G,X}$ i es viatja de manera asincrònica. En concret, va demostrar que, sota aquestes hipòtesis, $\delta_G(x)$ és de l'ordre $x!$.

Nosaltres demostrarem que, en el cas de viatjar de manera sincrònica, aquesta fita es pot rebaixar fins a $(x!!)^2/2^{x/2}$. D'altra banda, veurem que si, amb mitjana, σ_g i σ_h no estan molt lluny, aleshores G té el problema de la paraula resoluble. Més en concret, trobarem fites de la funció de Dehn de G quan la mitjana de les distàncies de σ_g i σ_h respecte de dos valors o respecte de $s+1$ valors, amb s constant, no són molt grans. Quedarà pendent de demostrar si existeixen grups que satisfan aquestes condicions i no satisfan les condicions de Bridson i Riley.

Respecte a l'estructura d'aquesta memòria, dediquem el primer capítol als preliminars, on introduïm amb detall els conceptes bàsics de la Teoria Geomètrica de Grups, com ara els grafs de Cayley, els diagrames de van Kampen i les seccions de grups. En el segon capítol demostrem les nostres contribucions a l'estudi del problema de la paraula per a grups. En aquest capítol, acabem amb una secció de diverses problemes oberts.

1 Preliminars

En aquest capítol s'introdueixen les definicions i notacions bàsiques que s'empraran al llarg d'aquesta memòria. La primera secció està dedicada a recordar les definicions i teoremes bàsics de la Teoria de Grups i a enunciar en què consisteix el problema de la paraula per a grups. A la segona secció, s'introdueixen els conceptes estàndard de la Teoria Geomètrica de Grups. Entre aquests es mencionen els conceptes de diagrames de van Kampen, grafs de Cayley i funcions de Dehn.

1.1 Conceptes bàsics

1.1.1 Paraules sobre un alfabet

En aquest apartat farem memòria de la definició de paraula (sobre un alfabet) i introduirem certes notacions i operacions estàndards que farem servir posteriorment.

Recordem que un *alfabet* és un conjunt qualsevol de símbols, els quals anomenarem *lletres*. Si A és un alfabet, aleshores una *paraula w sobre A* és una successió finita de lletres de A, que escriurem com $w = w_1 \dots w_k$. Indicarem amb ε la paraula que no té cap lletra, la qual anomenarem *paraula buida*. Quan w consti de dues o més lletres iguals consecutives, per comoditat, podrem agrupar-les usant la notació multiplicativa. Per exemple si $A = \{a, b\}$, aleshores ab^3a^2b indicarà la paraula $abbbaab$.

La *concatenació* de dues paraules w_1, w_2 sobre A, que indicarem amb $w_1 \cdot w_2$, és la juxtaposició de w_1 i w_2, és a dir, si $w_1 = a_1 \dots a_k$ i $w_2 = b_1 \dots b_s$, aleshores

$$w_1 \cdot w_2 = a_1 \dots a_k b_1 \dots b_s,$$

amb la convenció que $w_1 \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w_1 = w_1$. Sovint ometrem el símbol $\cdot$ i escriurem $w_1 w_2$ per indicar $w_1 \cdot w_2$.

Si w és una paraula sobre A, aleshores $l(w)$ indicarà la seva *longitud*, és a dir, el seu nombre de símbols. De forma clara, $l(u \cdot v) = l(u) + l(v)$, per a qualssevol paraules u, v sobre A. D'altra banda, indicarem amb $w(t)$ el *prefix de w de longitud t*. Formalment, si $w = \varepsilon$, llavors $w(t) = \varepsilon$, per a tot $t \in \mathbb{N}$ i, si $w = w_1 \dots w_k$, aleshores $w(t) = w_1 \dots w_t$ per a tot $t \leq k$ i $w(t) = w$ per a tot $t > k$.

Si u, w són paraules sobre A, aleshores direm que u és una *subparaula de w* si, i només si, existeixen paraules v_1, v_2 sobre A, tals que $w = v_1 u v_2$. El prefix de w de longitud t és una subparaula de w.

Per últim, indicarem amb A^* el *monoide lliure sobre A*, és a dir, el conjunt de totes les paraules sobre A.

1.1.2 Grups lliures

En aquesta secció construirem el *grup lliure* de base un conjunt qualsevol X i descriurem algunes de les seves propietats a mode de teoremes.

Donat X un conjunt qualsevol, prenem un conjunt d'inversos formals de X, que indicarem amb X^{-1}, format per símbols x^{-1} per a cada $x \in X$. Formalment, X^{-1} és un conjunt del mateix cardinal que X juntament amb una funció bijectiva ${}^{-1}\colon X \to X^{-1}$, de manera que, per a tot $x \in X$, la imatge de x per ${}^{-1}$ s'escriu x^{-1}. Amb aquests conjunts podem formar el monoide lliure $(X \cup X^{-1})^*$ els elements del qual són llistes finites d'elements de X i dels seus inversos formals. Enfatitzem que els elements de X^{-1} són inversos formals: si $X = \{a, b\}$, aleshores ε, aa^{-1}, $b^{-1}b$ i $baa^{-1}b^{-1}$ són elements diferents en el monoide lliure $(X \cup X^{-1})^*$.

Afegirem dues convencions: abusant del llenguatge, si $a \in X^{-1}$ i $a = x^{-1}$ per a algun $x \in X$, aleshores a^{-1} indicarà x, o sigui, de manera informal, el que fem és fer involutiva la funció ${}^{-1}$. D'altra banda, estendrem els inversos formals a les paraules. Per a la paraula buida definim $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$, i si

$$w = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k \in (X \cup X^{-1})^*,$$

aleshores w^{-1} indicarà la paraula

$$w^{-1} = x_k^{-1} x_{k-1}^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1} \in (X \cup X^{-1})^*.$$

En poques paraules, amb aquestes convencions, hem aconseguit que ${}^{-1}$ sigui un endomorfisme de monoides de $(X \cup X^{-1})^*$.

Sobre $(X \cup X^{-1})^*$ definim la relació $\sim$ de la manera següent: dues paraules u, v són equivalents, en símbols $u \sim v$, si, i només si, podem passar d'una a l'altra amb un nombre finit de passes del tipus següent:

1. Reducció: l'eliminació d'una ocurrència de xx^{-1}, per a qualque $x \in X \cup X^{-1}$.

2. Amplificació: l'afegit d'una ocurrència de xx^{-1}, per a qualque $x \in X \cup X^{-1}$.

És clar que $\sim$ és una relació d'equivalència. A més, preserva l'estructura de $(X \cup X^{-1})^*$: si $u_1 \sim u_2$ i $v_1 \sim v_2$, aleshores $u_1 \cdot v_1 \sim u_2 \cdot v_2$ i $u_1^{-1} \sim u_2^{-1}$. Per tot això, es pot veure fàcilment que $(X \cup X^{-1})^*/\sim$ és un grup (l'element neutre és $[\varepsilon]_\sim$ i l'invers de $[w]_\sim$ és $[w^{-1}]_\sim$). Anomenarem aquest grup el *grup lliure de base* X, i l'indicarem amb $F(X)$. Si X té només un sol element, aleshores $F(X) \cong \mathbb{Z}$, el qual és l'únic grup lliure abelià no trivial. Si $X = \emptyset$, aleshores $F(X) \cong \{1\}$.

Una paraula sobre $X \cup X^{-1}$ és *reduïda* si no conté cap ocurrència de la forma xx^{-1}, amb $x \in X \cup X^{-1}$. Per exemple, qualsevol paraula que només conté una lletra i aba^{-1} són paraules reduïdes. La paraula buida també és reduïda. En canvi $abb^{-1}b$ i $aba^{-1}abb^{-1}a^{-1}$ no són paraules reduïdes.

Donada una paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$, existeix una paraula reduïda u tal que $w \sim u$, obtinguda aplicant un nombre finit de passes de reducció [24, Lema 6.1], la qual indicarem amb $red(w)$. Per exemple, $red(aba^{-1}abb^{-1}a^{-1}) = aba^{-1}$, encara que hi ha diverses maneres d'obtenir-la a partir de la paraula original: $aba^{-1}abb^{-1}a^{-1} \sim abbb^{-1}a^{-1} \sim aba^{-1}$ i $aba^{-1}abb^{-1}a^{-1} \sim aba^{-1}aa^{-1} \sim aba^{-1}$. Aquesta paraula és única, o sigui, no existeix cap altra paraula reduïda dins la classe d'equivalència per $\sim$ de w [24, Lema 6.4; 46, Teorema 2.1.2]. Això fa que el grup lliure $F(X)$ sigui isomorf al grup format pel conjunt de paraules reduïdes sobre $X \cup X^{-1}$ amb l'operació binària consistent en la concatenació de dues paraules reduïdes seguida de la reducció (l'aplicació que envia cada paraula reduïda u a la classe d'equivalència $[u]_\sim$ és un isomorfisme entre aquests grups).

Estrictament parlant X no està inclòs dins $F(X)$, ara bé, tenim la *inclusió natural* η de X en $F(X)$ definida per $\eta(x) = [x]_\sim$, per a tot $x \in X$. A més, aquesta inclusió es pot estendre a X^{-1} de la forma $\eta(x^{-1}) = [x^{-1}]_\sim$, per a tot $x \in X$. Per construcció de $F(X)$, això fa que tot element de $F(X)$ es pugui posar com a producte d'elements de $\eta(X)$ i els seus inversos, la qual cosa implica el resultat següent:

Teorema 1.1.1 ([24, Proposició 6.6; 29, Proposició 1.6]). *El grup lliure $F(X)$ està generat per $\eta(X)$.*

Una propietat molt important que compleix el grup lliure, la qual el caracteritza, és la *propietat universal*, que podem enunciar com el resultat següent:

Teorema 1.1.2 ([24, Teorema 6.7]). *Sigui $\eta\colon X \to F(X)$ la inclusió natural. Per a tota funció f de X en un grup qualsevol G, existeix un únic morfisme $\nu\colon F(X) \to G$ tal que $\nu \circ \eta = f$.*

Corol·lari 1.1.3 ([24, 46]). *Sigui G un grup generat per un conjunt X. Aleshores existeix un homomorfisme exhaustiu de $F(X)$ a G. Per tant, tot grup és imatge d'un grup lliure per qualque homomorfisme.*

Altres propietats interessants del grup lliure són les següents:

Teorema 1.1.4 ([46, Teorema 2.1.3]). *Siguin G un grup i X un subconjunt de G. Si tot element g de G diferent de l'element neutre es pot escriure de forma única com a $g = x_1^{l_1} \cdots x_r^{l_r}$ amb $r \geq 1$, $x_i \in X$, $l_i \in \mathbb{Z}$ tals que, per a tot $i \in \{1, \ldots, r\}$, $l_i \neq 0$ i $x_i \neq x_{i+1}$, aleshores G és lliure de base X.*

Teorema 1.1.5 ([29, Proposició 1.9]). *Siguin G un grup i X un subconjunt de G tal que $X \cap X^{-1} = \emptyset$. Aleshores X és una base d'un subgrup lliure de G si, i només si, cap producte de la forma $x_1 \cdots x_r$, amb $r \geq 1$, $x_i \in X \cup X^{-1}$ i $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$, per a $i \in \{1, \ldots, r\}$, és igual a l'element neutre.*

Teorema 1.1.6 ([29, 46]). *Siguin X, Y conjunts qualssevol. Aleshores $F(X) \cong F(Y)$ si, i només si, $|X| = |Y|$.*

Aquest darrer teorema permet definir el *rang d'un grup lliure* com el cardinal de qualsevol de les seves bases. En aquest sentit, indicarem amb F_n el *grup lliure de rang n*.

Per últim, introduirem més notació. Si w és una paraula sobre $X \cup X^{-1}$, la *longitud reduïda* de w, que indicarem amb $|w|$, és la longitud de la paraula reduïda de w, és a dir, $l(red(w))$. De forma òbvia tenim que, per a totes paraules u, v sobre $X \cup X^{-1}$,

$|uv| \leq |u| + |v|$. D'altra banda, si $v, w \in (X \cup X^{-1})^*$, aleshores direm que v i w són *iguals dins el grup lliure* $F(X)$ si $red(v) = red(w)$ o, equivalentment, si $[v]_\sim = [w]_\sim \in F(X)$.

1.1.3 Presentacions de grups

Una presentació d'un grup és una generalització del concepte de taula de productes d'un grup. Donat un grup G, la seva taula de productes proporciona informació sobre el resultat del producte entre dos elements qualssevol. Però, en aquesta taula, hi ha valors que són obvis (per exemple, sempre $gg^{-1} = 1$, per a tot $g \in G$) o que es poden deduir d'altres productes (per exemple, si $g^3 = 1$, aleshores $g^2 = g^{-1}$ per a tot $g \in G$). Per tant, hi ha certes relacions *importants* entre els elements d'un grup que el determinen. Intuïtivament, per exemple, la relació $a^n = 1$ determina el grup $\mathbb{Z}_n$. Ara bé, així com és important especificar les relacions que governen el grup, també ho és especificar el seus elements, ja que el grup $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ amb $a = (0, 1)$ i $b = (1, 0)$ també compleix que $a^n = 1$. Per tant, informalment, una presentació no serà res més que un conjunt d'elements, que direm *generadors*, i un conjunt de *relacions* entre ells.

Per definir formalment les presentacions de grups ens fa falta recordar què s'entèn per grup quocient.

Definició 1.1.7. Siguin G un grup i N un subgrup normal de G. El *grup quocient de G per N* (també anomenat *grup quocient de G mòdul N*), que indicarem amb G/N, és el grup format per les classes laterals de N, $\{gN \mid g \in G\}$, i el producte $\cdot$ definit com

$$aN \cdot bN = abN.$$

A més, l'aplicació $x \mapsto xN = Nx$ és un morfisme exhaustiu entre G i G/N, el nucli del qual és N. Aquesta aplicació s'anomena *projecció canònica dins el grup quocient G/N*.

D'ara endavant, si G és un grup i X és un subconjunt de G, indicarem amb $\langle\langle X \rangle\rangle$ la *clausura normal de X en G*, és a dir, el subgrup normal més petit que conté X. La clausura normal de X està caracteritzada pel resultat següent.

Definició 1.1.8. Donat un element x d'un grup G, els *conjugats de x* són els elements de G de la forma $a^{-1}xa$, amb $a \in G$.

Proposició 1.1.9. *Donats un grup G i X un subconjunt de G, la clausura normal $\langle\langle X \rangle\rangle$ consisteix en tots els productes de conjugats d'elements de $X \cup X^{-1}$, i.e.,*

$$\langle\langle X \rangle\rangle = \{a_1^{-1} x_1^{e_1} a_1 \cdots a_r^{-1} x_r^{e_r} a_r \mid r \geq 0, i \in \{1, \ldots, r\}, a_i \in G, x_i \in X, e_i = \pm 1\}.$$

Demostració. Indiquem amb Y el conjunt format pels productes de conjugats d'elements de $X \cup X^{-1}$. Hem de veure que $\langle\langle X \rangle\rangle = Y$.

Per a qualssevol $g \in G$ i $y \in Y$, $y = a_1^{-1} x_1^{e_1} a_1 \cdots a_r^{-1} x_r^{e_r} a_r$, amb $a_i \in G$, $x_i \in X$, $e_i = \pm 1$, $r \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, tenim que

$$
\begin{aligned}
g^{-1}yg &= g^{-1}a_1^{-1}x_1^{e_1}a_1 \cdots a_r^{-1}x_r^{e_r}a_r g \\
&= g^{-1}(a_1^{-1}x_1^{e_1}a_1)gg^{-1}(a_2^{-1}x_2^{e_2}a_2)gg^{-1}\cdots g^{-1}g(a_r^{-1}x_r^{e_r}a_r)g \\
&= (a_1g)^{-1}x_1^{e_1}(a_1g)(a_2g)^{-1}x_2^{e_2}(a_2g)\cdots(a_rg)^{-1}x_r^{e_r}(a_rg).
\end{aligned}
$$

Per tant, Y és normal. Com que $X \subseteq Y$, per definició de clausura normal, tenim que $\langle\langle X\rangle\rangle \subseteq Y$. D'altra banda, per a tot $x \in X$, tenim que x^{-1}, $a^{-1}xa$, $a^{-1}x^{-1}a \in \langle\langle X\rangle\rangle$, perquè $X \subseteq \langle\langle X\rangle\rangle$ i la normalitat de $\langle\langle X\rangle\rangle$. Per tant, els productes d'aquests elements també hi pertanyen, la qual cosa implica que $Y \subseteq \langle\langle X\rangle\rangle$. □

Definició 1.1.10. Una *presentació $\mathcal{P}$ amb generadors X i relacions R*, que indicarem amb $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$, és un parell ordenat (X, R), on X és un conjunt qualsevol i $R \subseteq F(X) \times F(X)$ és una relació binària sobre el grup lliure $F(X)$. Una presentació defineix el grup quocient $F(X)/\langle\langle R_*\rangle\rangle$, que indicarem amb $G(\mathcal{P})$, on

$$R_* = \{uv^{-1} \mid (u, v) \in R\} \subseteq F(X).$$

Dues presentacions $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ són *equivalents* si els seus grups $G(\mathcal{P})$ i $G(\mathcal{P}')$ són isomorfs. Freqüentment, per abús de llenguatge, s'identifica la presentació $\mathcal{P}$ i el seu grup $G(\mathcal{P})$.

Per exemple, si $X = \{a\}$ i $R = \{(a^8, 1) \mid a \in X\}$, aleshores $\langle X \mid R\rangle = \mathbb{Z}_8$ (i això significa que el grup que representa aquesta presentació és isomorf a $\mathbb{Z}_8$).

Per comoditat, sovint s'abusa de la notació i s'escriuen els parells ordenats de la relació R com una igualtat. Així, l'exemple anterior s'escriuria com $\langle a \mid a^8 = 1\rangle$. A partir d'ara, utilitzarem aquesta notació. A més, moltes vegades les relacions del tipus $u = v$ són escrites en la forma $uv^{-1} = 1$. Per exemple, $\langle a, b \mid ab = ba\rangle = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1\rangle$ i $\langle a \mid a^8 = a^3\rangle = \langle a \mid a^5 = 1\rangle$.

Definició 1.1.11. Siguin G un grup i $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ una presentació. Direm que $\mathcal{P}$ és una *presentació de G* si $G(\mathcal{P}) \cong G$.

Definició 1.1.12. Una presentació $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ és *finita* quan X i R són, ambdós, finits. Un grup G és *finitament presentat* si existeix una presentació finita de G.

Notem que, pel Corol·lari 1.1.3, tenim que tot grup és imatge per un morfisme de grups de qualque grup lliure. Per tant, aplicant el Primer Teorema d'Isomorfia, tenim que tot grup és isomorf al grup d'una presentació.

D'altra banda, la definició que hem donat és equivalent a una definició basada en relacions d'equivalència (amb una construcció anàloga a la del grup lliure): si X és un conjunt qualsevol i R és un subconjunt de $(X \cup X^{-1})^*$, es pot definir la relació d'equivalència $\approx$ de la manera següent: dues paraules $u, v \in (X \cup X^{-1})^*$ són tals que $u \approx v$ si, i només si, es pot passar d'una a l'altra amb un nombre finit de passes del tipus següent:

1. Reducció: l'eliminació d'una ocurrència de xx^{-1}, per a qualque $x \in X \cup X^{-1}$, o d'una ocurrència d'una relació $r \in R$.

2. Amplificació: l'afegit d'una ocurrència de xx^{-1}, per a qualque $x \in X \cup X^{-1}$, o d'una ocurrència d'una relació $r \in R$.

Es pot veure que $\approx$ és una relació d'equivalència i que $F(X)/\approx$ és un grup, que coincideix amb $G(\mathcal{P})$ amb $\mathcal{P} = \langle X \mid R' \rangle$, on $R' = \{(red(r), 1) \mid r \in R\} \subseteq F(X) \times F(X)$ [32].

Tot seguit, oferim diverses presentacions dels grups més usuals:

1. El grup lliure $F(X)$ té la presentació $\langle X \mid \emptyset \rangle$. En particular $\mathbb{Z}$ té $\langle a \mid \emptyset \rangle$ com a presentació (recordem que $\mathbb{Z}$ és isomorf al grup lliure F_1 de rang 1).

2. El grup $\mathbb{Z}$ (com molts altres grups) també té altres presentacions menys *naturals*, com, per exemple, $\langle a, b \mid ababa = 1 \rangle$ [36].

3. Qualsevol grup finit $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ té una presentació finita: la corresponent a prendre tots els seus elements com a generadors i totes les relacions de la taula de productes de G (aquestes tenen la forma $a_i a_j = a_k$ i n'hi ha n^2).

4. $\mathbb{Z}_n \cong \langle a \mid a^n = 1 \rangle$.

5. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ té $\langle a, b \mid ab = ba \rangle$ com a presentació.

6. Una presentació de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ és $\langle a, b \mid a^n = 1 \rangle$.

7. El grup dièdric D_n d'ordre $2n$ té com a presentació
$$\langle a, b \mid a^2 = 1, b^n = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle.$$

8. El grup trivial té moltes presentacions: per exemple $\langle a \mid a = 1 \rangle$, $\langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$,
$$\langle a, b \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}ab = a^2 \rangle$$
i
$$\langle a, b \mid a^{-1}b^n a = b^{n+1}, a = w \rangle,$$
on w és una paraula sobre $\{a, b\}$ tal que la suma dels exponents de a és 0 i $n > 0$ [36–37]. Per tant, no és gens senzill saber si una presentació correspon al grup trivial.

9. Siguin $m, n \in \mathbb{Z}$. El *grup de Baumslag-Solitar*, que indicarem amb $BS(m, n)$, és el subgrup del grup $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ de les funcions homeomorfes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generat per les funcions lineals $a(x) = nx$ i $b(x) = x + m$ [33]. Aquest grup té com a presentació $\langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^n \rangle$.

Finalment, notem que si $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ és una presentació, aleshores tenim l'aplicació $\iota\colon X \to G(\mathcal{P})$ definida com la composició $p \circ \eta$ de la inclusió natural $\eta\colon X \to F(X)$, tal que $\eta(x) = [x]$ per a tot $x \in X \cup X^{-1}$, i la projecció canònica $p\colon F(X) \to F(X)/N$, on $N = \langle\langle R_* \rangle\rangle$, tal que $p([w]) = [w]N$, per a tot $[w] \in F(X)$. Aquesta aplicació es pot estendre a $(X \cup X^{-1})^*$ com

$$\iota(w) = \iota(w_1) \cdots \iota(w_r) \in G(\mathcal{P}),$$

per a tota paraula $w = w_1 \ldots w_r$ sobre $X \cup X^{-1}$. Amb aquestes notacions, tenim el resultat següent:

Teorema 1.1.13. *Per a tota presentació $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$, $\iota(X)$ genera $G(\mathcal{P})$.*

Demostració. Pel Teorema 1.1.1, $\eta(X)$ genera $F(X)$ i la projecció p és exhaustiva. Per tant, com que $i = p \circ \eta$, llavors $i(X)$ genera $F(X)/N \cong G(\mathcal{P})$. $\square$

De fet, es pot demostrar una mica més: si $g \in G(\mathcal{P})$, aleshores $g = [w]N$, per a alguna paraula $w = w_1 \ldots w_r$ sobre $X \cup X^{-1}$. Llavors g es pot expressar com $g = i(w_1) \cdots i(w_r)$. És a dir, es pot determinar la forma dels productes dels generadors sobre $G(\mathcal{P})$ en funció de la forma dels productes dels generadors sobre $(X \cup X^{-1})^*$.

De forma habitual s'identifica X amb $\iota(X)$, indicant els seus elements amb els mateixos símbols i, per tant, de forma freqüent es diu que X *genera* $G(\mathcal{P})$. Per exemple, pel grup $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$, identifiquem a i b amb $\iota(a) = (1, 0)$ i $\iota(b) = (0, 1)$, respectivament. Per aquest motiu, tenim que G és finitament generat si, i només si, G té una presentació $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ amb el conjunt de generadors X finit[1].

1.1.4 El problema de la paraula

Siguin G un grup i X un subconjunt de G. Aleshores l'aplicació $\pi\colon (X \cup X^{-1})^* \to G$ consistent a enviar cada lletra $x \in X$ a l'element corresponent $\pi(x) = x \in G$ es pot estendre de manera natural a totes les paraules de $X \cup X^{-1}$ de la forma següent:

- $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1}$ per a tot $x \in X$.
- Per a tota paraula $w = w_1 \ldots w_r$ sobre $X \cup X^{-1}$,

$$\pi(w) = \pi(w_1) \cdots \pi(w_r) \in G.$$

Per tant, π és un morfisme de monoides entre $(X \cup X^{-1})^*$ i G. De forma òbvia, si X és un conjunt de generadors de G, aleshores π és exhaustiva. En particular, si $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ és una presentació, aleshores, com que X és un conjunt de generadors de $G(\mathcal{P})$, llavors $\pi\colon (X \cup X^{-1})^* \to G(\mathcal{P})$ és un morfisme exhaustiu[2].

Definició 1.1.14. Siguin G un grup i $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació de G. Una paraula w sobre $X \cup X^{-1}$ és *nul-homotòpica per $\mathcal{P}$* si, i només si, $\pi(w) = 1 \in G$.

[1] Notem que aquests conceptes en si són prou diferents: un involucra el mínim, respecte de la inclusió, dels grups que contenen un conjunt i l'altre versa sobre grups quocients

[2] Recordem que abusem del llenguatge, identificant $\iota(X)$ i X, i que, realment, $\iota(X)$ és el generador de $G(\mathcal{P})$.

Definició 1.1.15. Siguin G un grup i $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació de G. El *problema de la paraula per a* $\mathcal{P}$ consisteix en trobar un algorisme que, per a cada paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$, decideixi si $\pi(w) = 1$ o $\pi(w) \neq 1$.

Si G és un grup i $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ són presentacions *finites* de G, aleshores existeix un algorisme que decideixi si el problema de la paraula per a $\mathcal{P}$ si, i només si, n'existeix un altre que el resolgui per a $\mathcal{P}'$ [8]. Per aquest motiu, si G és finitament presentat, es parla del *problema de la paraula de* G, consistent en decidir la resolubilitat del problema de la paraula per a alguna (per a qualsevol) presentació de G.

Donarem, tot seguit, un criteri per saber si una paraula és nul-homotòpica per una presentació *finita* donada.

Teorema 1.1.16. *Siguin $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ amb $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $R = \{r_1 = 1, \ldots, r_k = 1\}$ una presentació finita i w una paraula sobre $X \cup X^{-1}$. Llavors tenim que w és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ si, i només si, w compleix la igualtat següent dins el grup lliure $F(X)$:*

$$w = \prod_{i=1}^{N} u_i^{-1} r_i^{e_i} u_i,$$

per a alguns $N \in \mathbb{N}$, $r_i \in R$, $e_i = \pm 1$ i $u_i \in F(X)$, amb $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Demostració. Sigui $N = \langle\langle r_1, \ldots, r_k \rangle\rangle \subseteq F(X)$. Si $w \in (X \cup X^{-1})^*$, aleshores $\pi(w) = 1$ si, i només si, $wN = 1 \in G(\mathcal{P})$ o, equivalentment, si $w \in N \subseteq F(X)$. Per la Proposició 1.1.9, això vol dir que w és producte de conjugats d'elements de $\{r_1, \ldots, r_k\}$ o dels seus inversos (dins el grup lliure $F(X)$). $\square$

Aquest darrer resultat ens dóna una aproximació natural al problema de la paraula per a presentacions finites. Donada una presentació finita $\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1 = 1, \ldots, r_k = 1 \}$, podem enumerar en una llista totes les expressions de la forma

$$u_1^{-1} r_1^{\pm 1} u_1 \cdots u_m^{-1} r_m^{\pm 1} u_m, \tag{1.1}$$

amb $u_i \in F(X)$ i $m \geq 0$. Si una paraula w és tal que $\pi(w) = 1$, aleshores w apareixerà, prest o tard, en aquesta llista. El problema és si w *no* satisfà que $\pi(w) = 1$: està clar que w no apareixerà en la llista, però no ho podrem saber en un temps finit. Tècnicament, pareix que el conjunt de paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$ és recursivament enumerable però no recursiu (és a dir, el seu complement no és recursivament enumerable). Això fa que el problema de la paraula per una presentació pareixi indecidible.

Aquest fet és, precisament, el que va establir Novikov, el qual va ser el primer en demostrar, l'any 1955, que existeixen grups finitament presentats amb el problema de la paraula no resoluble [39]. Des de la dècada de 1960 fins a mitjans dels anys vuitanta, s'introduiren diverses tècniques noves que permeten simplificar la demostració original, de 143 pàgines. Es pot trobar una demostració curta del resultat de Novikov a l'article de Stillwell [51]. D'altra banda, existeixen demostracions senzilles del fet que existeixen grups recursivament presentats (que admeten una presentació $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ amb X finit i R recursivament enumerable) amb el problema de la paraula irresoluble [17, pàg 110].

Hi ha diverses referències sobre el problema de la paraula que es poden consultar per obtenir-ne més informació [32, 35, 51].

Per mor d'aquest resultat negatiu, cal imposar condicions al grup G per a què aquest tengui el problema de la paraula resoluble. Aquest és el cas, per exemple, de la classe de grups *residualment finits* [31].

Definició 1.1.17. Un grup G és *residualment finit* si, donat $g \neq 1$ en G, existeix un subgrup normal N de G tal que $g \notin N$ i G/N és finit.

Proposició 1.1.18. *Sigui G un grup residualment finit i finitament presentat. Aleshores G té el problema de la paraula resoluble.*

Demostració. Siguin $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ amb $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $R = \{r_1 = 1, \ldots, r_k = 1\}$ una presentació finita de G, $N = \langle\langle r_1, \ldots, r_k \rangle\rangle \subseteq F(X)$.

Hem de veure que existeix un algorisme que decideix si una paraula w sobre $X \cup X^{-1}$ és nul-homotòpica o, de forma equivalent, si w pertany o no a N. Per la discussió anterior, tenim que N és recursivament enumerable, és a dir, que existeix un algorisme que s'atura quan $w \in N$. Només hem de proporcionar, doncs, un algorisme que s'aturi quan $w \notin N$ (perquè d'aquesta manera N sigui recursiu).

Per a qualsevol $m \geq 0$, es poden determinar tots els grups amb exactament m elements mitjançant les seves taules de productes (el nombre de possibles taules de productes amb m elements és finit i, per tant, es pot decidir quines taules tenen l'estructura de grup). Per tant, es poden enumerar tots els grups finits.

Donat un grup finit H, el conjunt de morfismes

$$\{\varphi_H \colon F(X) \to H \mid \text{ morfisme } \}$$

és finit, ja que, pels teoremes 1.1.1 i 1.1.2, qualsevol morfisme φ_H està determinat per una assignació $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in H^n$ (de fet, això implica que com a màxim hi ha $|H|^n$ d'aquests morfirmes). En particular, el conjunt

$$M_H = \{\varphi_H \colon F(X) \to H \text{ morfisme } \mid \varphi_H(r_i) = 1, \text{ per a tot } i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

és finit. A més, notem que M_H no és buit, ja que l'aplicació constant que ho envia tot a l'element neutre hi pertany.

Dels dos fets anteriors es desprèn que poden enumerar el conjunt

$$M = \{(H, \varphi) \mid \varphi \in M_H\}.$$

Si $w \notin N$, aleshores $\pi(w) \neq 1 \in G(\mathcal{P}) \cong G$. Per tant, per ser G residualment finit, existeix L subgrup normal de $G(\mathcal{P})$ tal que $\pi(w) \notin L$ i $G(\mathcal{P})/L$ és finit. Per tant, existeixen un grup finit H (igual a $G(\mathcal{P})/L$) i φ_H tals que $(H, \varphi_H) \in M$ i $\varphi_H(w) \neq 1$. D'altra banda, si existeix $(H, \varphi_H) \in M$ tal que $\varphi_H(w) \neq 1$, aleshores el nucli $\ker \varphi_H$ conté N, per contrucció, però $w \notin \ker \varphi_H$. Per tant, $w \notin N$.

Per tant, enumerar el conjunt M i anar provant si, per a algun $(H, \varphi) \in M$, $\varphi(w) \neq 1$ és un algorisme que s'atura si, i només si, $w \notin N$, que és el que volíem veure. $\square$

Una altra manera d'aconseguir que un grup G tengui el problema de la paraula resoluble és, donada una presentació $\mathcal{P}$ de G, fitar el nombre de productes de conjugats de les relacions de $\mathcal{P}$ i de les seves inverses que hem de llistar per saber que w no és nul-homotòpica. És a dir, limitar el nombre de comprovacions per determinar que w no pertany a la llista (1.1). Això s'aconsegueix mitjançant les funcions de Dehn. La Proposició 1.1.21 mostra la seva importància.

Definició 1.1.19. Siguin G un grup i $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G.

(a) Si w és una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$, llavors l'*àrea algebraica de w respecte de $\mathcal{P}$* és

$$\operatorname{area}_{a,\mathcal{P}}(w) = \min\{N \mid w = \prod_{i=1}^{N} x_i^{-1} r_i x_i \text{ dins } F(X), \text{ amb } x_i \in F(X), r_i \in R_*^{\pm 1}\},$$

on $R_* = \{uv^{-1} \mid (u, v) \in R\} \subseteq F(X)$.

(b) Una funció $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és una *funció isoperimètrica per a $\mathcal{P}$* si, per a tota paraula w nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ tal que $l(w) \leq n$, es té $\operatorname{area}_{a,\mathcal{P}}(w) \leq f(n)$. El mínim, punt a punt, d'aquestes funcions és la *funció de Dehn de $\mathcal{P}$*, i.e., la funció $\delta_{\mathcal{P}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) = \max\{\operatorname{area}_{a,\mathcal{P}}(w) \mid w \in (X \cup X^{-1})^*, \pi(w) = 1, l(w) \leq n\}.$$

De forma òbvia, si $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ és una presentació finita de G i u, v són paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$, aleshores la seva concatenació uv és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ (π és un morfisme) i $\operatorname{area}_{a,\mathcal{P}}(uv) \leq \operatorname{area}_{a,\mathcal{P}}(u) + \operatorname{area}_{a,\mathcal{P}}(v)$.

Definició 1.1.20. Siguin f, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Sigui $\preceq$ la relació definida per $f \preceq g$ si, i només si, existeix $k > 0$ tal que

$$f(x) \leq kg(kx + k) + kx + k,$$

per a tot $x \in \mathbb{N}$. Indicarem amb $f \simeq g$ el fet que $f \preceq g$ i $g \preceq f$ simultàniament i, quan això passi, direm que f i g són *$\simeq$-equivalents*. Quan convengui, identificarem una funció amb la seva expressió algebraica. Així podrem escriure $f(x) \preceq x^2$ i $f(x) \simeq x^3$ per denotar, respectivament, $f \preceq g_2$ i $f \simeq g_3$, amb g_2 i g_3 definides com $g_2(x) = x^2$ i $g_3(x) = x^3$.

La relació $\simeq$ és una relació d'equivalència, la qual es pot estendre a les funcions de $\mathbb{N}$ to $[0, \infty)$ tals que, per a tot $n \in \mathbb{Z}$, aquestes siguin constants a l'interval $[n, n+1)$.

De forma general, la relació $\simeq$ preserva l'ordre assimptòtic d'una funció. Per exemple si $k > 1$, aleshores $n^k \not\simeq n^k \ln n$, i $n^p \simeq n^q$ implica que $p = q$, per qualssevol $p, q \in \mathbb{R}$. De la mateixa manera, $n^k \not\simeq 2^n$ per a qualsevol $k \in \mathbb{R}$, $2^{2^n} \not\simeq 2^n$, i tots els polinomis dels mateix grau són $\simeq$-equivalents [12].

Si $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ són presentacions finites de G, f és una funció isoperimètrica per a $\mathcal{P}$ i g és una funció isoperimètrica per a $\mathcal{P}'$, aleshores $f \simeq g$ [12]. En particular, això passa si f i g són funcions de Dehn de $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$, respectivament. És per això que podem parlar, llevat de transformacions lineals, de *la* funció de Dehn *de* G, δ_G, o de les funcions isoperimètriques *de* G.

Proposició 1.1.21 ([12, 23]). *Sigui* $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ *una presentació finita de* G. *Aleshores les afirmacions següents són equivalents:*

(a) $G(\mathcal{P})$ *té el problema de la paraula resoluble.*

(b) La funció de Dehn de $\mathcal{P}$ *és recursiva.*

(c) $\mathcal{P}$ *admet una funció isoperimètrica recursiva.*

El problema de la paraula va sorgir de forma natural de la Topologia Algebraica a finals de segle XIX i principis de segle XX associat a problemes sobre grups fonamentals de superfícies [51]. Dehn va ser el primer a enunciar aquest problema, l'any 1911 [19]. A banda d'aquest problema, Dehn en va enunciar dos més que tracten de decidir sobre propietats locals i globals d'un grup. Les propietats locals d'un grup s'ocupen de determinar si certs elements compleixen o no determinades relacions i les propietats globals tracten d'esbrinar les característiques que té el grup sencer com a estructura:

- Problema dels conjugats.

  Donat un grup G i una presentació $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$, deteminar si existeix un algorisme que decideixi si dues paraules u, w sobre $X \cup X^{-1}$ són tals que $\pi(u)$ és un conjugat de $\pi(w)$ o no.

- Problema de l'isomorfisme.

  Donats dos grups, trobar un algorisme que determini si són isomorfs o no.

El problema de la paraula i dels conjugats són problemes de decisió sobre propietats locals mentre que el problema de l'isomorfisme és un problema sobre una relació global. Aquests problemes són, en general, indecidibles [8, 32].

El problema consistent en deteminar si un grup donat és isomorf al grup trivial és un cas particular del problema de l'isomorfisme, per tant, en principi, pot semblar que pugui tenir solució al contrari del problema general. Aquesta percepció és falsa: aquest problema també és indecidible [35, Corol·lari 3.4].

Existeixen molts altres problemes indecidibles en la Teoria de Grups. Es poden consultar diverses fonts per obtenir més informació al respecte [1, 34–35, 47, 49].

Finalment, hem de notar que els grups finitament presentats amb una sola relació tenen el problema de la paraula resoluble, fet que va establir Magnus l'any 1932 [29–30].

1.2 Eines geomètriques per fer front al problema de la paraula

1.2.1 Grafs de Cayley

En aquesta secció interpretarem un grup donat G com un espai mètric, introduint els grafs de Cayley, que jugaran un paper important al llarg de tot el text. En primer lloc, començarem definint la *mètrica de la paraula*.

Definició 1.2.1. Siguin G un grup i $X \subseteq G$ un conjunt de generadors *finit* de G. La *mètrica de la paraula de G respecte de X* és la distància $d_{G,X} \colon G \times G \to \mathbb{N}$ definida com

$$d_{G,X}(g,h) = \min\{l(w) \mid w \in (X \cup X^{-1})^* \text{ tal que } \pi(w) = g^{-1}h\}.$$

Aquesta mètrica depèn en general del conjunt de generadors de G: si X i X' són conjunts de generadors finits de G diferents, aleshores $d_{G,X} \neq d_{G,X'}$. Per exemple si $G = \mathbb{Z}$ i $X = \{1\}$, aleshores tenim que $d_{G,X}(n,m) = |m-n|$ i, en canvi, per a $X' = \{2,3\}$, tenim que

$$d_{G,X'}(n,m) = \begin{cases} |s| & \text{si } m-n = 3s \\ |s|+1 & \text{si } m-n = 3s+1 \\ |s|+2 & \text{si } m-n = 3s+2. \end{cases}$$

Això és perquè, com que $\mathbb{Z}$ és commutatiu, aleshores el mínim s'aconsegueix amb paraules de la forma $2^l 3^k$, amb $l,k \in \mathbb{Z}$, i, com que $3 \cdot \underline{2} = 2 \cdot \underline{3}$ (hem subratllat els generadors de $\mathbb{Z}$), llavors ens podem restringir a paraules tals que $|l| \leq 2$. A més, com que $\underline{3} \cdot k + \underline{2} \cdot (-1) = \underline{3} \cdot (k-2) + \underline{2} \cdot 2$ i $\underline{3} \cdot k + \underline{2} \cdot (-2) = \underline{3} \cdot (k-2) + \underline{2} \cdot 1$, llavors, realment, podem restringir-nos a les paraules de la forma $2^l 3^k$ amb $l \in \{0,1,2\}$.

D'altra banda, però, aquestes distàncies no difereixen molt: si X i X' són conjunts finits de generadors de G diferents, aleshores $d_{G,X}$ i $d_{G,X'}$ són *bilipschitz equivalents* [33, Corol·lari 11.3], és a dir, existeix $k > 0$ tal que, per a tots $g,h \in G$, es compleix

$$\frac{1}{k} d_{G,X}(g,h) \leq d_{G,X'}(g,h) \leq k d_{G,X}(g,h)$$

(en l'exemple anterior, podem prendre $k = 5$). Per tant, aquestes distàncies són equivalents en el sentit topològic, és a dir, determinen la mateixa topologia. Aleshores és natural veure-les com una sola mètrica. És per aquest motiu que es parla de la *mètrica de la paraula de G*, sense fer referència als seus generadors. Indicarem amb d_G o, simplement, amb d aquesta mètrica.

Definició 1.2.2. Siguin G un grup i X un conjunt finit de generadors. El *graf de Cayley de G respecte de X*, que indicarem amb $\Gamma_{G,X}$, és el graf dirigit i etiquetat que té com a conjunt de vèrtexs $V(\Gamma_{G,X}) = G$, el conjunt d'arcs

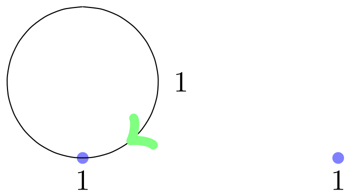
$$E(\Gamma_{G,X}) = \{(g, gx) \mid g \in G, x \in X\}$$

i cada arc (g, gx) té l'etiqueta x. Quan G i X estiguin clars pel context, simplement ens referirem al *graf de Cayley* i l'indicarem amb Γ.

Alguns exemples de grafs de Cayley són els següents:

1. El graf de Cayley del grup trivial (respecte del conjunt de generadors trivial) consta simplement d'un vèrtex amb un arc que surt i entra d'aquest vèrtex (Figura 1.1a).

   De forma habitual, s'eviten els conjunts de generadors de grups que continguin l'element neutre, per a què el seu graf de Cayley no contengui cicles a cada vèrtex. D'ara endavant, si X és un conjunt de generadors d'un grup G, suposarem que $1 \notin X$. Podem observar el graf de Cayley de $G = \{1\}$ respecte del conjunt de generadors $X' = \emptyset$ a la Figura 1.1b.



(a) (b)

Figura 1.1 El graf de Cayley de $G = \{1\}$ respecte de $X = \{1\}$ i $X' = \emptyset$.

2. El graf de Cayley de $\mathbb{Z}_n$ respecte de $X = \{1\}$ és el que es representa a la Figura 1.2. Per comoditat, no etiquetem els arcs en el graf de Cayley (tots els arcs tenen 1 per etiqueta).

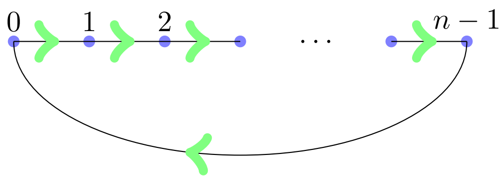


Figura 1.2 El graf de Cayley de $\mathbb{Z}_n$.

3. El graf de Cayley del grup lliure F_2 respecte de $\{x, y\}$ és l'arbre infinit 4-ari orientat, tal com mostra la Figura 1.3 (pàgina 17). Per conveniència, els arcs es representen de forma que la seva longitud disminueix, successivament, en la meitat.

4. El grup $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ respecte de $\{a, b\}$, amb $a = (1, 0)$ i $b = (0, 1)$, té el graf de Cayley (infinit) que es mostra a la Figura 1.4.

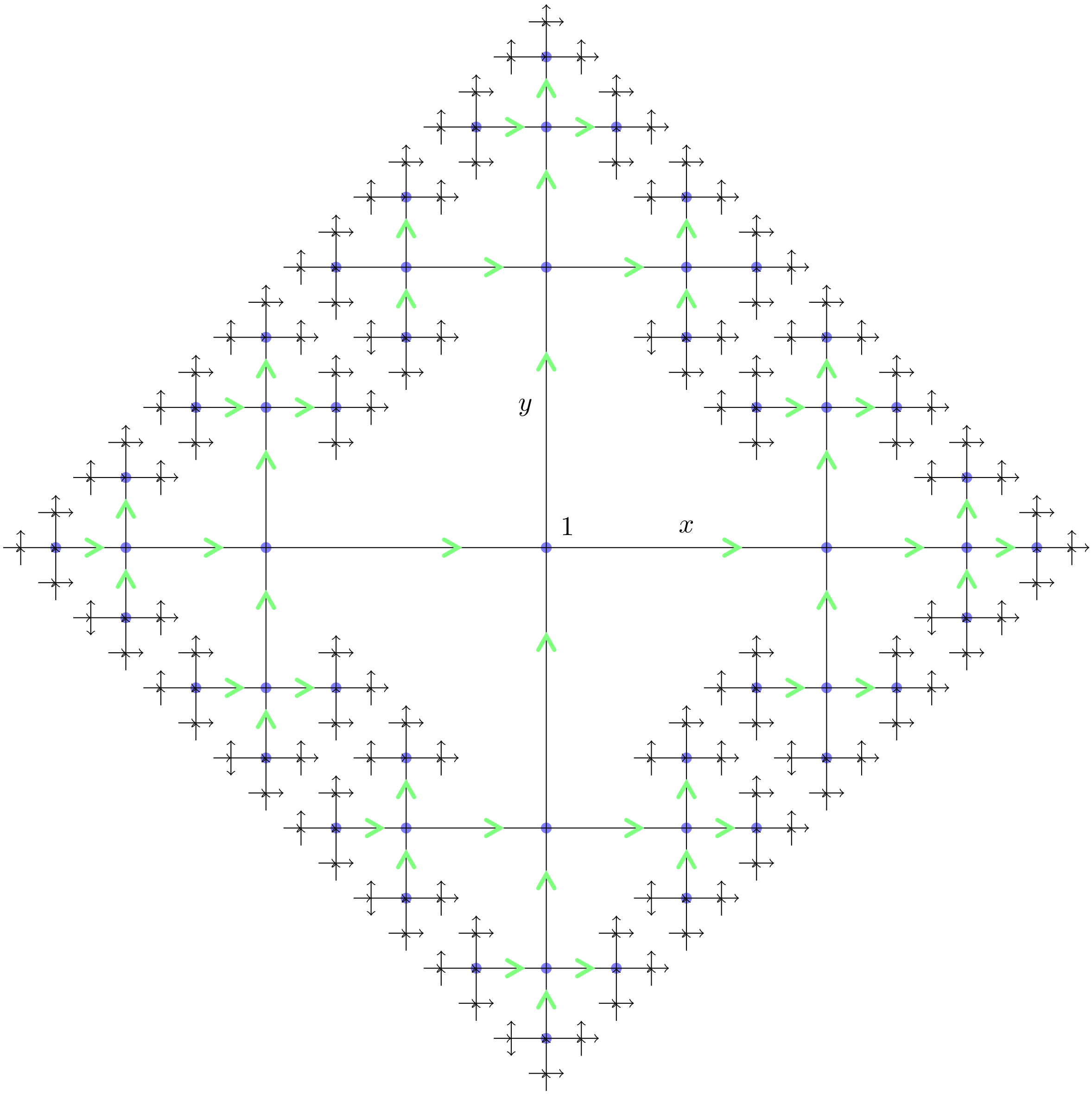


Figura 1.3 El graf de Cayley del grup lliure F_2.

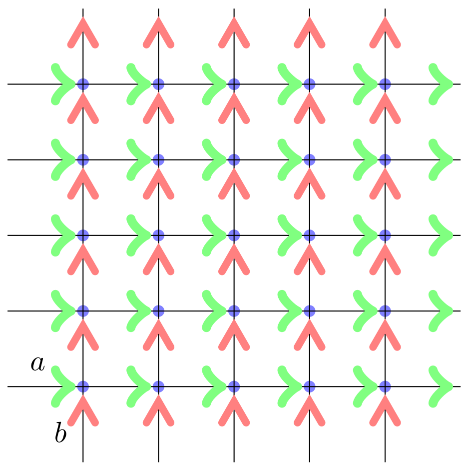


Figura 1.4 El graf de Cayley de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

5. Els grafs de Cayley de $\mathbb{Z}$ amb conjunt de generadors $\{1\}$ i $\{1, 2\}$ es mostren a les figures 1.5 i 1.6, respectivament.

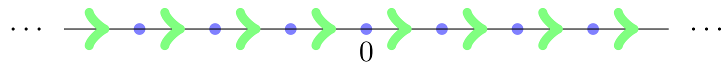


Figura 1.5 El graf de Cayley de $\mathbb{Z}$ respecte de $\{1\}$.

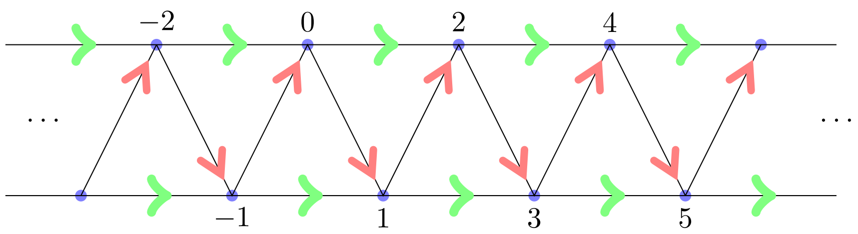


Figura 1.6 El graf de Cayley de $\mathbb{Z}$ respecte de $\{1, 2\}$.

Moltes vegades, per comoditat, el graf de Cayley es representa mitjançant un graf no dirigit, donant-se implícita la orientació de les arestes quan s'explicita el conjunt finit de generadors. Per exemple, a la Figura 1.7, es mostra el graf de Cayley (no dirigit) de $\mathbb{Z}$ respecte de $\{2, 3\}$.

Seguint amb aquest afany de simplificació, molts cops, fins i tot, s'omet el conjunt finit de generadors i es representa un graf de Cayley no dirigit *del grup*. En aquest cas, el conjunt finit de generadors es *determina* amb aquest graf (realment

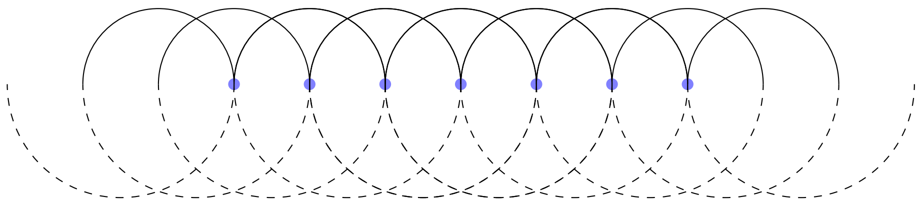


Figura 1.7 El graf de Cayley de $\mathbb{Z}$ respecte de $\{2, 3\}$.

el graf de Cayley no dirigit representa diversos grafs de Cayley dirigits: per exemple, si ometem el conjunt de generadors, aleshores el graf 1.7 és el graf de Cayley (no dirigit) de $\mathbb{Z}$ respecte de $\{2, 3\}$, $\{-2, 3\}$, $\{2, -3\}$ i de $\{-2, -3\}$).

6. Encara que el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ de G respecte de X és únic, la seva representació no té perquè ser-ho: la Figura 1.7 i la Figura 1.8 són dues representacions diferents del mateix graf de Cayley. La primera disposa els vèrtexs en línia, mentre que la segona els col·loca d'una manera més dispersa.

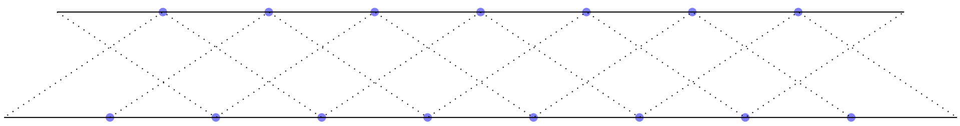


Figura 1.8 Una altra representació del graf de Cayley de $\mathbb{Z}$ respecte de $\{2, 3\}$.

7. El graf que es mostra a la Figura 1.9 és el graf de Cayley del grup de Baumslag-Solitar $BS(1, 2) = \langle a, b \mid ab = b^2 a\rangle$ respecte del conjunt de generadors $\{a, b\}$.

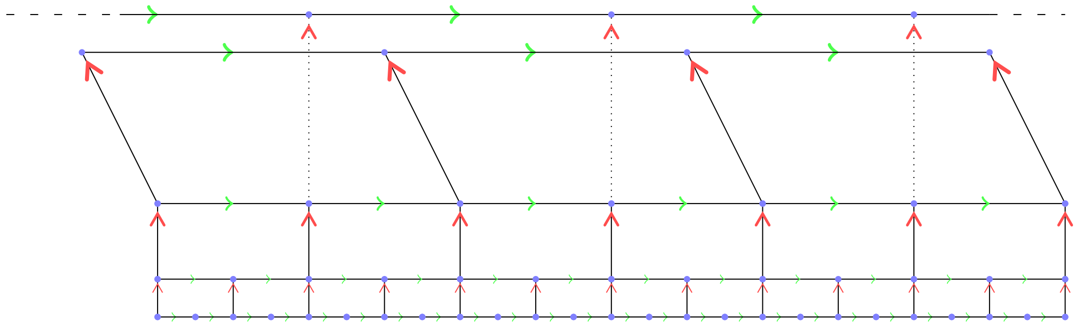


Figura 1.9 El graf de Cayley de $BS(1, 2)$.

El graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ és arc-connex (ja que X genera G) i és localment finit (cada vèrtex té un grau d'incidència finit) perquè X és finit. De fet, cada vèrtex és incident a $2|X|$ arcs. Si indiquem amb v_g el vèrtex corresponent a g, aleshores, per a tot $x \in X$, tenim que v_g és el vèrtex inicial d'un únic arc (el que va de v_g a $v_{g\cdot x}$ i té etiqueta x) i és el vèrtex final d'un sol arc (el que va de $v_{g\cdot x^{-1}}$ a v_g i té etiqueta x).

Amb aquesta notació, G actua per l'esquerra en el conjunt de vèrtexs $V(\Gamma_{G,X})$ mitjançant l'acció $g \cdot v_h \mapsto v_{g \cdot h}$. Recordem que una *acció per l'esquerra d'un grup G en un conjunt X* és morfisme de grups entre G i el conjunt $Sym(X)$ de bijeccions de X en X o, equivalentment, una aplicació $\cdot \colon G \times X \to X$ tal que

- $1 \cdot x = x$, per a tot $x \in X$.
- $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, per a tots $g, h \in G$ i $x \in X$.

Si existeix una acció (per l'esquerra) de G en X es diu que G *actua* (per l'esquerra) en X.[3] Aquesta acció es pot estendre al conjunt d'arcs $E(\Gamma_{G,X})$ del graf de Cayley de la manera següent: per a cada arc (v_h, v_{hx}) amb etiqueta x, g envia aquest arc a l'arc (v_{gh}, v_{ghx}) amb etiqueta x, i.e., $g \cdot (v_h, v_{hx}) \mapsto (v_{gh}, v_{ghx})$. Per tant, aquesta acció preserva l'orientació dels arcs dirigits dins el graf de Cayley i les seves etiquetes.

El graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ indueix una mètrica sobre G, que indicarem amb $d_{\Gamma_{G,A}}$ (o amb d_Γ quan G i X estiguin clars pel context), que correspon a associar a cada parell (g, h) d'elements de G l'ínfim de les longituds dels camins dins $\Gamma_{G,X}$ entre g i h. Aquest ínfim realment és un mínim (perquè $\Gamma_{G,X}$ és localment finit) i, a més, és igual a la longitud d'un (de qualsevol) *camí geodèsic entre g i h*, és a dir, un camí de longitud mínima entre g i h dins $\Gamma_{G,X}$.

Per a tota paraula w sobre $X \cup X^{-1}$, tenim associat un camí γ_w dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$. Aquest camí comença al vèrtex v_1 corresponent a l'element neutre de G i travessa els arcs de $\Gamma_{G,X}$ així com indiquen les lletres de w fins arribar al vèrtex $v_{\pi(w)}$ corresponent a $\pi(w)$. El recorregut de γ_w té en compte el sentit dels arcs: per a cada x^{-1}, amb $x \in X$, γ_w travessa l'arc corresponent en sentit contrari. Per exemple, considerem $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generat per $\{a, b\}$ amb $a = (1, 0)$ i $b = (0, 1)$. La paraula $w = aab^{-1}a^{-1}bbbaaa$ descriu el camí que es mostra a la Figura 1.10. Amb altres paraules, si $w = w_1 \dots w_r$, aleshores γ_w és el camí determinat pels vèrtexs v_1, $v_{\pi(w_1)}$, $v_{\pi(w_1 w_2)}$, $\dots$, $v_{\pi(w)}$.

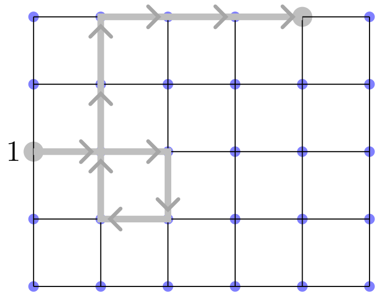


Figura 1.10 El camí γ_w associat a la paraula $w = aab^{-1}a^{-1}bbbaaa$.

[3] Pel context es distingeix de forma clara entre l'acció i l'operació del grup, encara que es denotin amb el mateix símbol.

En aquest sentit, γ_w té associada l'aplicació $\gamma_w\colon [0, l(w)] \to \Gamma_{G,X}$ tal que $\gamma_w(0) = v_1$, $\gamma_w(l(w)) = v_{\pi(w)}$ i $\gamma_w(t) = v_{\pi(w(t))}$. Notem que aquesta aplicació es pot estendre de forma natural al nombres enters mitjançant $\gamma_w(t) = \gamma_w(0)$ si $t < 0$ i $\gamma_w(t) = \gamma_w(l(w))$ si $t > l(w)$ i també als nombres reals mitjançant $\gamma_w(x) = \gamma_w(\lfloor x \rfloor)$. A partir d'ara indentificarem aquesta aplicació i el seu camí corresponent.

Inversament, qualsevol camí γ des del vèrtex corresponent a la identitat a un vèrtex qualsevol del graf de Cayley té associada una paraula w sobre $X \cup X^{-1}$. Aquesta paraula està formada per les etiquetes dels arcs que segueix, tenint en compte el seu sentit (s^{-1} correspondrà a travessar l'arc (g, gx) en sentit contrari).

Per tot això, hi ha una correspondència entre les paraules de $(X \cup X^{-1})^*$ i els camins des de v_1 dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$. Per aquesta raó, a partir d'ara:

- Identificarem els elements del grup G amb els vèrtexs del graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$.
- Donada una paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$, indicarem amb $\gamma(w)$ el seu *camí corresponent* des d'1 ($= v_1$) fins a $\pi(w)$.

Seguint amb aquesta notació, donats un element $g \in G$ i una paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$, direm que *w representa g*, o que *g està representat per w*, si, i només si, $\gamma(w)$ és un camí que va fins a g (des d'1). Notem que poden existir moltes paraules que representin el mateix element.

Donada una paraula w sobre $X \cup X^{-1}$ i un element $g \in G$, existeix un camí que, en lloc de partir des de 1, parteix des de g i que segueix els arcs tal com indica w. Això fa que poguem veure el producte d'elements d'un grup G de forma geomètrica: si $g, h \in G$ i w_g i w_h són paraules de $(X \cup X^{-1})^*$ que representen g i h, respectivament, aleshores $g \cdot h$ està representat per la concatenació $w_g w_h$. Notem que el camí $\gamma(w_g w_h)$ consisteix en anar des d'1 fins g seguint el camí $\gamma(w_g)$ i, després, començant des de g en comptes de 1, seguir el camí $\gamma(w_h)$. Per tant, el producte d'elements de G correspon a la concatenació de paraules dins $(X \cup X^{-1})^*$ i a la composició de camins dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$. Continuant amb l'exemple de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, si $g = b^2a^3$ i $h = b^{-3}a$, aleshores $g \cdot h = b^2a^3b^{-3}a$ tal com es mostra a la Figura 1.11. D'aquesta figura és clar que $g \cdot h$ es pot expressar per a^4b^{-1}.

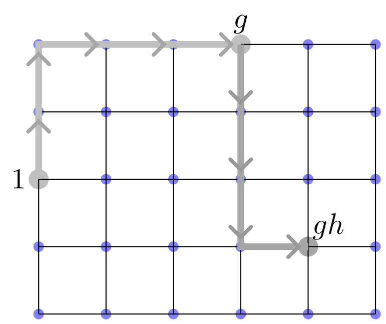


Figura 1.11 La visualització del producte de $g = b^2a^3$ i $h = b^{-3}a$.

D'altra banda, la distància d_Γ és "invariant respecte de la multiplicació"[4] en el sentit següent:

Proposició 1.2.3. *Dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ es compleix que*

$$d_\Gamma(g,h) = d_\Gamma(a \cdot g, a \cdot h),$$

per a tots $a, g, h \in G$.

Demostració. Com que l'acció definida anteriorment preserva les orientacions dels arcs i les seves etiquetes, aleshores $d_\Gamma(g, gx) = d_\Gamma(ag, agx) = 1$, per a tots $g, a \in G$ i $x \in X$. Sigui $w = w_1 \dots w_r \in (X \cup X^{-1})^*$ una paraula tal que el camí $\gamma(w)$ partint des de g arriba a h i tal que $d_\Gamma(g,h) = l(w)$, és a dir, una paraula corresponent a un camí geodèsic entre g i h (Figura 1.12).

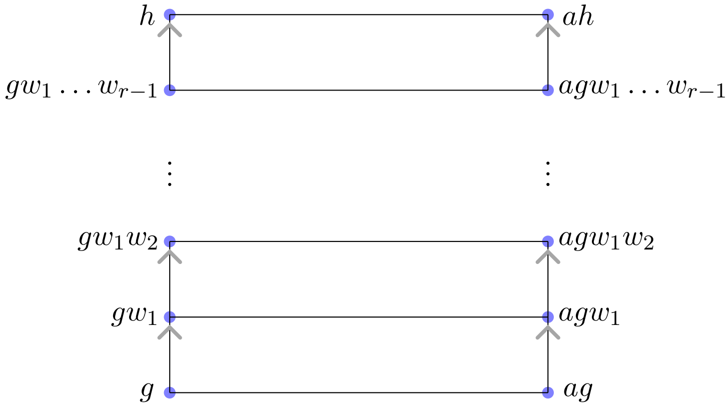


Figura 1.12 L'acció $a \cdot z \mapsto az$
aplicada a un camí geodèsic de g a h.

Llavors tenim que

$$\begin{gathered}
d_\Gamma(g, gw_1) = d_\Gamma(ag, agw_1) = 1, \\
d_\Gamma(gw_1, gw_1w_2) = d_\Gamma(agw_1, agw_1w_2) = 1, \\
\dots\dots \\
d_\Gamma(gw_1 \dots w_{r-1}, gw_1 \dots w_r) = d_\Gamma(agw_1 \dots w_{r-1}, agw_1 \dots w_r) = 1.
\end{gathered}$$

Per tant

$$\begin{aligned}
d_\Gamma(g,h) &= d_\Gamma(g, gw_1) + \dots + d_\Gamma(gw_1 \dots w_{r-1}, gw_1 \dots w_r) \\
&= d_\Gamma(ag, agw_1) + \dots + d_\Gamma(agw_1 \dots w_{r-1}, agw_1 \dots w_r) \\
&\leq d_\Gamma(ag, ah)
\end{aligned}$$

[4] Tècnicament es diu que l'acció és una isometria per la mètrica d_Γ [33, pàg. 163].

(la darrera desigualtat és perquè potser, en principi, que el camí determinat pels vèrtexos ag, agw_1, …, $agw_1 \dots w_r$ no sigui geodèsic). Per tant, tenim que $d_\Gamma(g,h) \leq d_\Gamma(ag,ah)$. Aleshores

$$d_\Gamma(ag,ah) \leq d_\Gamma(a^{-1}ag, a^{-1}ah) = d_\Gamma(g,h),$$

per la qual cosa $d_\Gamma(g,h) = d_\Gamma(ag,ah)$. □

Si suposem que cada arc del graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ té longitud unitat, aleshores $d_{\Gamma_{G,X}}$ coincideix amb la mètrica de la paraula [18, Cap. 4]. Com a conseqüència òbvia, tenim que la mètrica de la paraula és invariant respecte de la multiplicació. També tenim que, si $X \neq Y$ són conjunts finits de generadors d'un grup G, aleshores les mètriques $d_{\Gamma_{G,X}}$ i $d_{\Gamma_{G,Y}}$ són bilipschitz equivalents. Això es pot observar a l'exemple 5 (pàg. 18). Per tant, a partir d'ara, indicarem amb d, indistintament, la mètrica de la paraula $d_{G,X}$ de G respecte de X i la mètrica del graf de Cayley $d_{\Gamma_{G,X}}$.

De fet, es pot parlar d'un altre aspecte més general (estrictament més general [20]) que ser bilipschitz equivalent: els grafs de l'exemple esmentat són força *semblants* perquè vist "des de lluny" semblen iguals. Es diu que són *quasi-isomètrics*:

Definició 1.2.4. Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics. Una *quasi-isometria* és una aplicació $\phi\colon X \to Y$ tal que:

- Existeix una constant $\lambda \geq 1$ tal que, per a tots $x, x' \in X$,
$$\frac{1}{\lambda} d_X(x,x') - \lambda \leq d_Y(\phi(x), \phi(x')) \leq \lambda d_X(x,x') + \lambda$$
- Existeix una constant $C \geq 0$ tal que, per a tot $y \in Y$, existeix $x \in X$ tal que $d_Y(\phi(x), y) \leq C$.

Dos espais mètrics (X, d_X) i (Y, d_Y) són *quasi-isomètrics* si existeix una quasi-isometria $\phi\colon X \to Y$ entre ells. En aquest cas, ho indicarem amb $X \sim_{QI} Y$.

Fàcilment es pot veure que la relació $\sim_{QI}$ és una relació d'equivalència [33, Proposició 11.39]. Tot seguit oferim alguns exemples d'espais quasi-isomètrics:

- Qualsevol grup finit (com a espai mètric) és quasi-isomètric a un punt [18, pàg. 85].

- Si H és un subgrup de G amb índex finit $[G : H]$ i G i H són finitament generats, aleshores $G \sim_{QI} H$, respecte de les seves mètriques de la paraula [33, Proposició 11.41].

- Si G és un grup i X, Y són conjunts finits de generadors de G, aleshores G respecte de la mètrica de la paraula respecte de X és quasi-isomètric a G respecte de la mètrica de la paraula respecte de Y [33, Lemma 11.37]. Aquest resultat té el seu anàleg per als grafs de Cayley (recordem que $d_{\Gamma_{G,X}} = d_{G,X}$): amb les mateixes condicions, $\Gamma_{G,X} \sim_{QI} \Gamma_{G,Y}$ [8, Proposició 4.3].

- Per a tot $n \geq 1$, $\mathbb{Z}^n \sim_{QI} \mathbb{R}^n$, però $\mathbb{Z}^n \not\sim_{QI} \mathbb{Z}^m$, per a tots $n \neq m$.[5]

El bo de les quasi-isometries és que preserven moltes de les propietats geomètriques dels grafs de Cayley quan els seus grups són quasi-isomètrics. Per tant, les quasi-isometries fan invariants certes propietats dels grups. En aquest sentit, una propietat $\mathcal{P}$ és *invariant per quasi-isometries*, si, i només si, si $X \sim_{QI} Y$ i X compleix $\mathcal{P}$, aleshores Y compleix $\mathcal{P}$[6]. Existeixen moltes propietats invariants per quasi-isometries [18, pàg. 114; 33, Teorema 11.46], com per exemple ser finit, però sens dubte les més destacables són les següents:

- Ser finitament presentat és una propietat invariant per quasi-isometries.

- Tenir el problema de la paraula resoluble és una propietat invariant per quasi-isometries. Concretament, tenim els resultats següents:

  Teorema 1.2.5 ([8, Teorema 4.7]). *Siguin G, H grups, $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ una presentació finita de G i Y un conjunt finit de generadors de H tals que $\Gamma_{G,X} \sim_{QI} \Gamma_{H,Y}$. Aleshores existeix un conjunt finit de relacions S de H tal que $\mathcal{Q} = \langle Y \mid S\rangle$ és una presentació finita de H i les funcions de Dehn de les presentacions $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ són $\simeq$-equivalents.*

  Corol·lari 1.2.6 ([8, Corol·lari 4.8]). *Si $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ són presentacions finites d'un grup G i el problema de la paraula és resoluble per $\mathcal{P}$, aleshores també ho és per $\mathcal{Q}$.*

1.2.1.1 Els grafs de Cayley i el problema de la paraula

A més de capturar certes propietats geomètriques dels grups (via quasi-isometries), un dels aspectes dels grafs de Cayley és la seva connexió directa amb el problema de la paraula.

En primer lloc, notem que si G és un grup i $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ és una presentació de G, aleshores una paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$ és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ si, i només si, $\gamma(w)$ és un camí tancat dins el graf de Cayley, és a dir, un camí que comença i acaba a 1 [33,

[5] Aquests fets són conseqüència de què si un grup G actua "prou regularment" en un espai mètric (X, d_X), llavors G és quasi-isomètric a X. Hi ha diverses referències al respecte, on es poden consultar els detalls tècnics [8, 18]. El resultat més destacable és el que es coneix com Teorema Fonamental de la Teoria Geomètrica de Grups (o Teorema de Milnor-Švarc) [12, Proposició A.1.4].

[6] En la literatura, de forma habitual es refereix a aquestes propietats com a *propietats geomètriques*, però hem preferit no emprar aquest terme per a no donar peu a confusió entre les propietats pròpiament geomètriques dels grups, enteses com aquelles que es poden definir mitjançant l'ús d'objectes geomètrics associats a aquests (com són els grafs de Cayley), i les propietats invariants per quasi-isometries. Per exemple, la propietat $\mathcal{P} \equiv$ "Per a qualsevol $g_0 \in G$, $\Gamma_{G,X} \setminus \{g_0\}$ no és arc-connex" és geomètrica però no invariant per quasi-isometries ($\mathcal{P}$ es compleix a $\mathbb{Z}$ amb $X = \{1\}$ però no ho fa amb $X = \{1, 2\}$; figures 1.5 i 1.6) [53]. Una altra propietat geomètrica que no és invariant per quasi-isometries és la quasi-convexitat de Cannon [33].

Proposició 5.7][7]. Això fa pensar que si el graf de Cayley de G es pot construir, aleshores el problema de la paraula serà resoluble (perquè podrem determinar els seus camins tancats des d'1). Com que la majoria dels grafs de Cayley són infinits, hem d'aclarir què s'entén per un graf de Cayley construïble.

Definició 1.2.7. Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G i $g \in G$ un element qualsevol. L'*esfera de radi n centrada a g dins* $\Gamma_{G,X}$ és el conjunt de vèrtexs

$$S_{G,X}(g,n) = \{h \in V(\Gamma_{G,X}) \mid d_{\Gamma_{G,X}}(g,h) = n\}.$$

D'altra banda, la *bolla de radi n centrada a g dins* $\Gamma_{G,X}$ és el conjunt de vèrtexs

$$B_{G,X}(g,n) = \{h \in V(\Gamma_{G,X}) \mid d_{\Gamma_{G,X}}(g,h) \leq n\}.$$

És clar que $B_{G,X}(g,n)$ està format per la unió de $S_{G,X}(g,i)$ per a tots els $i \leq n$. Quan G i X estiguin clars pel context, els ometrem i escriurem, simplement, $S(g,n)$ i $B(g,n)$.

Notació 1.2.8. Donada una bolla $B_{G,X}(g,n)$ dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$, indicarem amb $B^{\Gamma}_{G,X}(g,n)$ el subgraf que té $B_{G,X}(g,n)$ com a conjunt de vèrtexs i com a conjunt d'arcs, els arcs corresponents a tots els camins de longitud $\leq n$ que parteixen des de g.

Definició 1.2.9. Un graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ és *construïble* si, i només si, podem construir en un temps finit $B^{\Gamma}(1,n)$ per a tot $n \geq 1$.

Amb aquestes definicions tenim el teorema següent:

Teorema 1.2.10 ([33, Teorema 5.10]). *Siguin G un grup i X un conjunt finit de generadors de G. Llavors G té el problema de la paraula resoluble si, i només si, el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ és construïble.*

1.2.1.2 Els grafs de Cayley d'algunes construccions de grups

En aquest apartat veurem la forma dels grafs de Cayley del producte directe i del producte lliure de dos grups.

Definició 1.2.11. Siguin G_1, G_2 dos grups qualssevol. El *producte directe de G_1 per G_2* és el grup $(G_1 \times G_2, \cdot)$ definit com:

- El conjunt d'elements és el producte cartesià de G_1 per G_2, és a dir,

$$G_1 \times G_2 = \{(g,h) \mid g \in G_1, h \in G_2\}.$$

- L'operació del grup està definida component a component, o sigui, per a tots $(g_1,h_1),(g_2,h_2) \in G_1 \times G_2$,

[7] Aquesta és una de les raons perquè w es diu nul-homotòpica. Una altra és per la connexió entre paraules nul-homotòpiques i camins nul-homotòpics dins una varietat. Si M és una varietat de Riemann tal que el grup fonamental $\pi_1(M) = G$, llavors les paraules nul-homotòpiques de G corresponen als camins nul-homotòpics dins la varietat M.

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot_{G_1} g_2, h_1 \cdot_{G_2} h_2).$$

Indicarem amb $G_1 \times G_2$ el producte directe de G_1 per G_2.

Es pot veure fàcilment que $G_1 \times G_2$ té estructura de grup (l'element neutre és $(1_{G_1}, 1_{G_2})$ i operació inversa $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$). A més, aquesta definició es pot enunciar per a una família arbitrària de grups $(G_i)_{i\in I}$ de forma anàloga, amb la convenció que si aquesta família és buida, llavors el producte directe, que en aquest cas s'escriu com $\times_{i\in I} G_i$, és igual al grup trivial.

En aquest sentit, es defineix la *suma directa d'una família arbitrària de grups* $(G_i)_{i\in I}$, que s'indica amb $\oplus_{i\in I} G_i$ (i per $G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$ si $I = \{1, \ldots, n\}$ és finit), com el grup format pel conjunt d'elements

$$\{(g_i)_{i\in I} \mid \{i \in I \mid g_i \neq 1_{G_i}\} \text{ és finit}\}$$

amb l'operació definida component a component, com en el cas del producte directe. Quan el conjunt d'índexos és finit, aleshores el producte directe i la suma directa coincideixen[8]. En cas contrari, la suma directa és un subgrup normal dins el producte directe [46].

De forma clara, tenim que $G_1 \times G_2$ conté grups $\hat{G}_1$ i $\hat{G}_2$ isomorfs a G_1 i a G_2, respectivament (per exemple $\hat{G}_1 = \{(g, 1) \mid g \in G_1\}$). A més, aquests subgrups són normals dins $G_1 \times G_2$. Aquesta propietat, de qualque manera, caracteritza el producte directe, tal com mostra el resultat següent:

Proposició 1.2.12 ([24, Proposició 1.1]). *Un grup G és isomorf al producte directe $G_1 \times G_2$ de dos grups G_1 i G_2 si, i només si, G conté dos subgrups normals $A \cong G_1$ i $B \cong G_2$ tals que $A \cap B = 1$ i $G = AB$.*

A vegades, es parla del producte *intern* de dos grups G_1 i G_2 com el grup G tal que G_1 i G_2 són normals dins G, $G_1 \cap G_2 = 1$ i $G = G_1 G_2$, però, a rel d'aquesta proposició, aquest concepte coincideix amb el producte directe de dos grups, que de vegades s'anomena *producte extern*.

Tot seguit adaptam la definició estàndard de producte cartesià de grafs dirigits pel cas en què els grafs són, a més, etiquetats. Per això, ens fa falta notació específica.

Notació 1.2.13. Siguin (X, Y) un parell de conjunts qualssevol i a, b dos símbols. Indicarem amb $\overline{(X,Y)}(a,b)$ el conjunt

$$\overline{(X,Y)}(a,b) = \{(a,y) \mid y \in Y\} \cup \{(x,b) \mid x \in X\}.$$

Definició 1.2.14. Siguin dos símbols fixats a, b. Siguin Γ_1, Γ_2 dos grafs dirigits i etiquetats amb elements de A i B, respectivament. El *producte cartesià* (o *producte de grafs*) *de* Γ_1 *i* Γ_2, que indicarem amb $\Gamma_1 \Box \Gamma_2$, és el graf dirigit i etiquetat amb elements de $\overline{(A,B)}(a,b)$ tal que:

[8] És per això que hem escrit amb la notació de suma directa el grup $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ en tot el text.

- $V(\Gamma_1 \Box \Gamma_2) = V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2)$.

- Per a qualssevol dos vèrtexs $u = (u_1, u_2)$ i $v = (v_1, v_2)$, tenim que $(u, v) \in E(\Gamma_1 \Box \Gamma_2)$ si, i només si, $u_1 = v_1$ i $(u_2, v_2) \in E(\Gamma_2)$ o bé si $(u_1, v_1) \in E(\Gamma_1)$ i $u_2 = v_2$.

  En el primer cas, tenim que l'etiqueta de (u, v) és (a, e) amb e l'etiqueta de (u_2, v_2) i, en el segon, és (e, b) amb e l'etiqueta de l'arc (u_1, v_1).

Lema 1.2.15. *Si G i H són dos grups qualssevol amb conjunts de generadors X i Y, respectivament, aleshores $\overline{(X,Y)}(1_G, 1_H)$ és un conjunt de generadors de $G \times H$, on 1_G i 1_H són els elements neutres de G i H, respectivament. A més, aquest conjunt és finit si X i Y són finits.*

Demostració. Sigui $(g, h) \in G \times H$. Com que X i Y són generadors de G i H, respectivament, aleshores $g = x_1 \cdots x_r$ i $h = y_1 \cdots y_s$, amb $x_i \in X \cup X^{-1}$, $y_j \in Y \cup Y^{-1}$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$, $r, s \geq 0$. Per tant,

$$\begin{aligned} (g, h) &= (x_1, 1) \cdots (x_r, 1) \cdot (1, h) \\ &= (x_1, 1) \cdots (x_r, 1) \cdot (1, y_1) \cdots (1, y_s). \end{aligned}$$

Si X i Y són finits, de forma òbvia, $\overline{(X,Y)}(1_G, 1_H)$ és finit. $\square$

Proposició 1.2.16. *Siguin G, H grups i X, Y conjunts de generadors finits de G i H, respectivament. Notem per $Z = \overline{(X,Y)}(1_G, 1_H)$. Aleshores*

$$\Gamma_{G \times H, Z} = \Gamma_{G,X} \Box \Gamma_{H,Y}.$$

Demostració. Per definició, tenim que $V(\Gamma_{G \times H, Z}) = G \times H = V(\Gamma_{G,X} \Box \Gamma_{H,Y})$. Per tant, només hem de veure que $E(\Gamma_{G \times H, Z}) = E(\Gamma_{G,X} \Box \Gamma_{H,Y})$.

$\subseteq$) Sigui (u, uz) un arc, amb $u = (u_1, u_2) \in V(G \times H)$ i

$$z \in \{(1, y), (x, 1) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Si $z = (1, y)$, aleshores (u, uz) uneix $u = (u_1, u_2)$ amb $uz = (u_1, u_2 y)$ i té com etiqueta $z = (1, y)$. Per tant, (u, uz) pertany a $E(\Gamma_{G,X} \Box \Gamma_{H,Y})$, ja que uneix dos vèrtexs amb la primera component igual i té l'etiqueta dins el conjunt $\overline{(X,Y)}(1_G, 1_H)$. Per simetria, l'altre cas és anàleg. Llavors, en tot cas, (u, uz) és un arc de $\Gamma_{G,X} \Box \Gamma_{H,Y}$.

$\supseteq$) Siguin $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ dos vèrtexs tals que $(u, v) \in E(\Gamma_{G,X} \Box \Gamma_{H,Y})$. Això implica que $u_1 = v_1$ i $(u_2, v_2) \in E(\Gamma_{H,Y})$ o bé que $u_2 = v_2$ i $(u_1, v_1) \in E(\Gamma_{G,X})$.

En el primer cas, tenim que $u = (u_1, u_2)$, $v = (u_1, v_2)$ i $(u_2, v_2) \in E(\Gamma_{H,Y})$. Per tant, $v_2 = u_2 y$, amb $y \in Y$, i (u_2, v_2) té etiqueta $(1, y)$. Llavors (u, v) realment és igual a un arc que uneix (u_1, u_2) i $(u_1, u_2 y)$ i que té etiqueta $(1, y)$. Per tant, (u, v) és un arc de $\Gamma_{G \times H, Z}$.

De la mateixa manera, podem veure que, en el segon cas, l'arc és de $E(\Gamma_{G \times H, Z})$.

$\square$

Corol·lari 1.2.17. *Siguin G i H dos grups finitament generats. Si G i H tenen el problema de la paraula resoluble, llavors $G \times H$ també té el problema de la paraula resoluble.*

Demostració. Siguin X i Y dos conjunts de generadors finits de G i H, respectivament, i $Z = \overline{(X,Y)}(1_G, 1_H)$.

Hem de veure que $G \times H$ té el problema de la paraula resoluble. Pel Teorema 1.2.10, això és equivalent a veure que, per a tot $n \geq 1$, el subgraf $B^{\Gamma}_{G\times H,Z}(1,n)$ dins $\Gamma_{G\times H,Z}$ es pot construir en un temps finit.

Per a tot $n \geq 1$, tenim que

$$B_{G\times H,Z}(1,n) = \bigcup_{s+r=n} (B_{G,X}(1,s) \times B_{H,Y}(1,r)). \tag{1.2}$$

$\subseteq$) Sigui $(g,h) \in B_{G\times H,Z}(1,n)$. Aleshores existeixen $z_1, \ldots, z_n \in Z$ tals que $(g,h) = z_1 \cdots z_n$. Per construcció de Z, cada z_i pertany a $\{1\} \times Y$ o bé a $X \times \{1\}$. Per tant, n'hi ha r dins $\{1\} \times Y$ i s dins $X \times \{1\}$, amb r i s tals que $r + s = n$. Aleshores existeixen $y_1, \ldots, y_r \in Y$ i $x_1, \ldots, x_s \in X$ tals que

$$\begin{aligned}(g,h) &= z_1 \cdots z_n \\ &= (1,1) \cdot (1,y_1) \cdots (1,y_r) \cdot (x_1,1) \cdots (x_s,1) \\ &= (x_1 \cdots x_s, y_1 \cdots y_r),\end{aligned}$$

per la qual cosa $g = x_1 \cdots x_s$ i $h = y_1 \cdots y_r$. Això vol dir que $g \in B_{G,X}(1,s)$ i $h \in B_{H,Y}(1,r)$. Per tant, $B_{G\times H,Z} \subseteq B_{G,X}(1,r) \times B_{H,Y}(1,s)$ i, per tant, també s'inclou dins la unió.

$\supseteq$) Sigui (g,h) un element de la unió. Aleshores existeixen s, r tals que $r + s = n$ i $(g,h) \in B_{G,X}(1,s) \times B_{H,Y}(1,r)$. Per tant, existeixen $x_1, \ldots, x_s \in X$ i $y_1, \ldots, y_r \in Y$ tals que $(g,h) = (x_1 \cdots x_s, y_1 \cdots y_r)$. Llavors

$$\begin{aligned}(g,h) &= (x_1 \cdots x_s, y_1 \cdots y_r) \\ &= (x_1,1) \cdots (x_s,1) \cdot (1,y_1) \cdots (1,y_r),\end{aligned}$$

el que implica que $(g,h) \in B_{G\times H,Z}(1, r+s) = B_{G\times H,Z}(1,n)$.

Com que G i H tenen el problema de la paraula resoluble, aleshores els grafs $B^{\Gamma}_{G,X}(1,n)$ i $B^{\Gamma}_{H,Y}(1,n)$ es poden construir en un temps finit. En particular, es pot determinar en un temps finit el seu conjunt de vèrtexs, és a dir, les bolles $B_{G,X}(1,n)$ i $B_{H,Y}(1,n)$. Llavors, per (1.2), es pot construir la bolla $B_{G\times H,Z}(1,n)$.

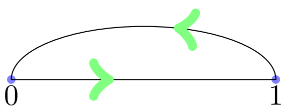
Només ens fa falta determinar els arcs del graf $B^{\Gamma}_{G\times H,Z}(1,n)$. Per la Proposició 1.2.16, el graf de Cayley $\Gamma_{G\times H,Z} = \Gamma_{G,X} \square \Gamma_{H,Y}$, per tant els camins centrats en 1 de longitud $\leq n$ dins $\Gamma_{G\times H,Z}$ es poden determinar amb els camins centrats en 1 de longitud $\leq n$ de $\Gamma_{G,X}$ i $\Gamma_{H,Y}$. A més, aquests darrers dos conjunts són efectivament calculables (perquè

G i H tenen el problema de la paraula resoluble). Per tot això, es poden trobar tots els camins dins $B^{\Gamma}_{G\times H,Z}(1,n)$. $\square$

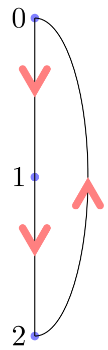
Per últim, vegem alguns exemples de grafs de Cayley de productes directes de grups:

1. El graf de Cayley del producte directe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, que coincideix amb $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, és el graf que es mostra a la Figura 1.4.

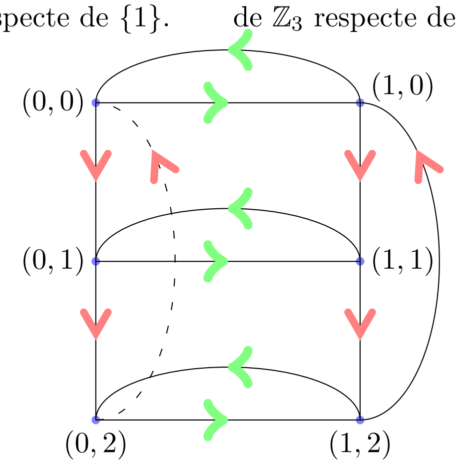
2. Si prenem els conjunts finits de generadors $\{1\}$ de $\mathbb{Z}_2$ i $\{1\}$ de $\mathbb{Z}_3$, aleshores el grup $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ té el graf de Cayley $\Gamma_{\mathbb{Z}_2,1}\square\Gamma_{\mathbb{Z}_3,1}$, el qual es mostra a la Figura 1.13. El seu conjunt de generadors és $\{(1,0),(0,1)\}$.



(a) El graf de Cayley de $\mathbb{Z}_2$ respecte de $\{1\}$.



(b) El graf de Cayley de $\mathbb{Z}_3$ respecte de $\{1\}$.



(c) El graf de Cayley de $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ obtingut com a producte cartesià dels grafs de Cayley de $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_3$.

Figura 1.13 El graf de Cayley de $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$.

3. El grup $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ coincideix amb $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$. A més, tenim que el seu graf de Cayley, respecte del conjunt de generadors

$$\overline{(\{1\},\{1\})}(0,0)=\{(1,0),(0,1)\},$$

consisteix en dues *còpies* dels enters indexades en $\mathbb{Z}_2$: $\mathbb{Z}\times\{0\}$ i $\mathbb{Z}\times\{1\}$ (Figura 1.14).

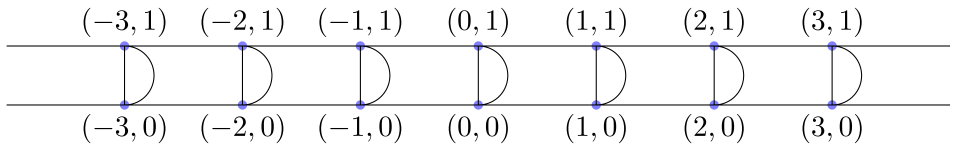


Figura 1.14 El graf de Cayley de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ respecte de $\{(1,0),(0,1)\}$.

D'altra banda, si prenem $\{1,2\}$ com a conjunt de generadors de $\mathbb{Z}$, aleshores el graf de Cayley $\Gamma_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2,Z}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ respecte del conjunt

$$Z = \overline{(\{1,2\},\{1\})}(0,0) = \{(1,0),(2,0),(0,1)\}$$

és el que es mostra a la Figura 1.15. També podem observar que tenim dues còpies dels enters però, aquest cop, amb índexos diferents.

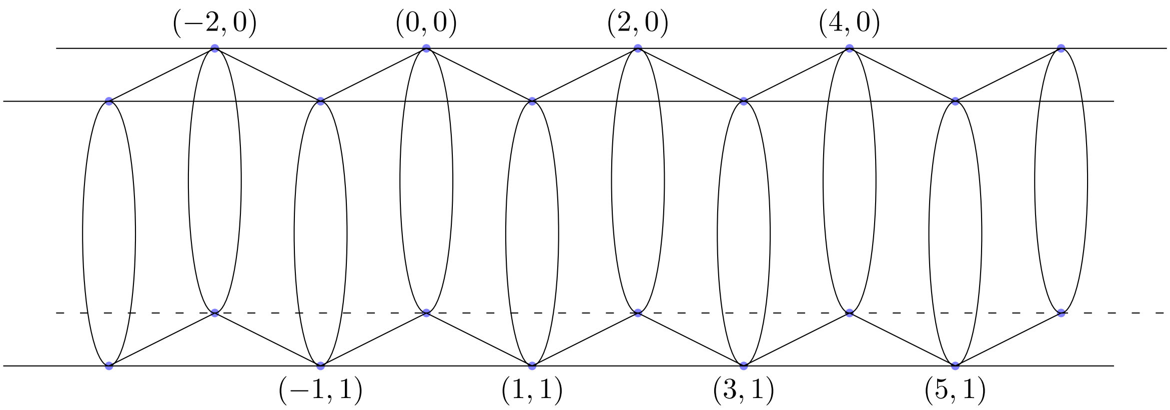


Figura 1.15 El graf de Cayley de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ respecte de Z.

Ocupem-nos ara del producte lliure de dos grups. Recordem la seva definició i algunes propietats. Ens restringirem a productes lliures de dos grups (es poden consultar diverses referències per a la definició general per a famílies arbitràries de grups [18, 46]).

Abans de tot, notem que si G i H són grups, sempre podem suposar que $G \cap H = \{1\}$, ja que, en cas contrari, els podem substituir per grups isomorfs G' i H' tals que $G' \cap H' = \{1\}$: per exemple, podem prendre $G' = \{1\} \cup ((G \setminus \{1_G\}) \times \{2\})$ i $H' = \{1\} \cup ((H \setminus \{1_H\}) \times \{3\})$ amb les operacions induïdes per les bijeccions $\phi\colon G \to G'$ i $\theta\colon H \to H'$ (per exemple, en G', $xy = \phi(\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y))$, per a tots $x, y \in G'$).

D'altra banda, notem que, com que G i H són grups, aleshores el monoide lliure $(G \cup H)^*$ conté els inversos formals de les paraules sobre $G \cup H$ (ja que $G^{-1} = G$ i $H^{-1} = H$).

Definició 1.2.18. Siguin G_1, G_2 dos grups tals que $G_1 \cap G_2 = \{1\}$. Dins el monoide lliure $(G_1 \cup G_2)^*$, considerem la relació d'equivalència $\sim_*$ definida per: $u \sim_* v$ si, i només si, podem passar d'una a l'altra amb un nombre finit de passes de les operacions següents:

1. La inserció o eliminació de l'element neutre 1.

2. Contracció: la substitució d'una ocurrència g_1g_2 (com a paraula) per g on $g = g_1 \cdot g_2$, amb g_1, g_2 dins el mateix grup G_i, amb $i \in \{1, 2\}$.

3. Expansió: la substitució d'un element g de G per g_1g_2 (com a paraula) amb $g_1 \cdot g_2 = g$ dins qualque G_i, $i \in \{1, 2\}$.

El quocient $(G \cup H)^*/\sim_*$ forma un grup ($[\varepsilon]_{\sim_*}$ és l'element neutre i $[w]_{\sim_*}^{-1} = [w^{-1}]_{\sim_*}$, per a tota paraula $w \in (G_1 \cup G_2)^*$), el qual anomenarem *producte lliure de* G_1 *i* G_2 i indicarem amb $G_1 * G_2$. Els grups G_1 i G_2 s'anomenen *factors lliures de* $G_1 * G_2$.

A l'igual que hem fet pel grup lliure, podem definir què s'entén per una paraula reduïda dins el producte lliure.

Definició 1.2.19. Siguin G, H grups tals que $G \cap H = \{1\}$. Una paraula $w \in (G \cup H)^*$ és *reduïda* si, i només si, si no conté lletres consecutives x_i, x_{i+1} tals que $x_i, x_{i+1} \in G$ o $x_i, x_{i+1} \in H$.

Tota classe d'equivalència, mòdul $\sim_*$, conté una única paraula reduïda [46, pàg. 170] (obtinguda aplicant contracció de forma successiva). És més, si indiquem amb $red_*(w)$ la paraula reduïda dins la classe d'equivalència $[w]_{\sim_*}$, llavors, per a tots els grups G, H tals que $G \cap H = \{1\}$, el producte lliure es pot definir com el conjunt de paraules reduïdes de $(G \cup H)^*$ amb l'operació $u \cdot v = red_*(uv)$ [24, Proposició 8.5].

Existeixen injeccions canòniques $\kappa_G \colon G \to G * H$, $\kappa_H \colon H \to G * H$ consistents en enviar cada element de G i H, respectivament, a la classe d'equivalència, mòdul $\sim_*$, de la paraula corresponent d'una sola lletra. Si fem feina amb $G * H$ com a conjunt de paraules reduïdes sobre $(G \cup H)^*$, aleshores κ_G i κ_H corresponen a enviar cada element de G i H, respectivament, a la paraula corresponent d'una sola lletra.

Proposició 1.2.20 ([24, Proposició 8.6]). *Siguin G i H dos grups tals que $G \cap H = \{1\}$. Aleshores $Im\ \kappa_G \cong G$, $Im\ \kappa_H \cong H$, $Im\ \kappa_G \cap Im\ \kappa_H = \{1\}$ i $G * H$ està generat per $Im\ \kappa_G \cup Im\ \kappa_H$.*

A l'igual que pel grup lliure $F(X)$, sovint s'identifica $\mathrm{Im}\ \kappa_G$ amb G i $\mathrm{Im}\ \kappa_H$ amb H. Per aquesta raó es diu que $G * H$ està generat per $G \cup H$.

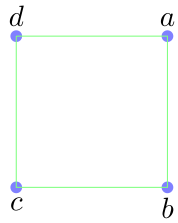
El producte lliure de grups compleix una propietat universal [46]. A més es pot veure que $F(X \cup Y) \cong F(X) * F(Y)$ i que, si $G_1 \cong G_2$ i $H_1 \cong H_2$, aleshores $G_1 * H_1 \cong G_2 * H_2$ [24].

Una propietat important és la següent, la qual relaciona el producte lliure i les presentacions dels seus factors lliures:

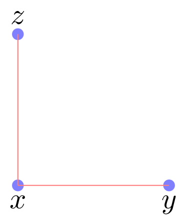
Teorema 1.2.21 ([29, 32]). *Siguin G i H grups i $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ i $\mathcal{Q} = \langle Y \mid S \rangle$ presentacions finites de G i H, respectivament, tals que $X \cap Y = \emptyset$. El producte lliure $G * H$ té com a presentació*

$$\langle X \cup Y \mid R \cup S \rangle.$$

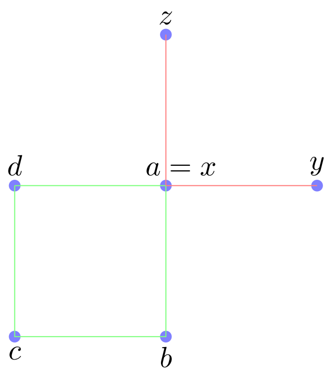
Tot seguit, definirem la suma connexa de dos grafs. Intuïtivament, la suma connexa de dos grafs és el graf resultant de prendre dos vèrtexos, un de cada graf, i *aferrar* els grafs per aquests vèrtexos. Per exemple, la suma connexa de Γ_1 i Γ_2 pels vèrtexos $a \in V(\Gamma_1)$ i $x \in V(\Gamma_2)$ (figures 1.16a i 1.16b) és el graf que es mostra a la Figura 1.16c, mentre que la suma connexa d'aquests mateixos grafs per b i y és el graf de la Figura 1.16d.



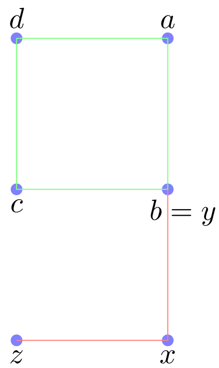
(a) El graf Γ_1.



(b) El graf Γ_2.



(c) La suma connexa de Γ_1 i Γ_2 per a i x.



(d) La suma connexa de Γ_1 i Γ_2 per b i y.

Figura 1.16 La suma connexa de Γ_1 i Γ_2.

La suma connexa de dos grafs es pot definir, en comptes de per a dos vèrtexos, prenent un conjunt arbitrari de vèrtexos en algun dels dos grafs i un vèrtex a l'altre. Això correspon a aferrar *alhora* $\aleph$ còpies d'un graf a l'altre (on $\aleph$ és el cardinal del conjunt de vèrtexos). Continuant amb l'exemple anterior, la suma connexa de Γ_1 i Γ_2 respecte de $\{a, c\} \subseteq V(\Gamma_1)$ i $x \in V(\Gamma_2)$ és el graf que es mostra a la Figura 1.17. Notem que només especifiquem un conjunt de vèrtexos d'un dels dos grafs, ja que no sabem aferrar, alhora, per dos vèrtexos un graf sense *deformar-lo*.

Un exemple més representatiu és el consistent en la suma connexa del graf de Cayley de $\mathbb{Z}$ respecte de $\{1\}$ (Figura 1.5) i Γ_2 per $\{n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ i x. Per comoditat, no escrivim els noms dels vèrtexos. El resultat es pot veure a la Figura 1.18.

Topològicament, el concepte de la suma connexa correspon a l'espai quocient el qual identifica el conjunt de vèrtexos $\{x_i \mid i \in I\}$ d'un graf Γ_1 i y de Γ_2

$$\Gamma_1 \coprod \Gamma_2 / \{x_i \sim y\},$$

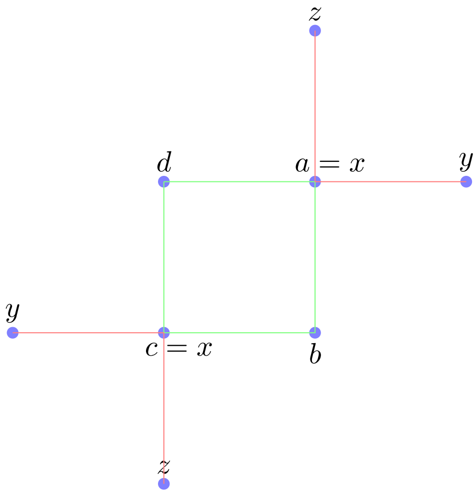


Figura 1.17 La suma connexa de Γ_1 i Γ_2 respecte de $\{a, c\}$ i x.

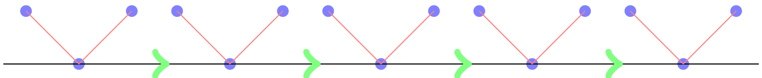


Figura 1.18 La suma connexa del graf de Cayley de $\mathbb{Z}$ i Γ_2 per $\{n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ i x.

on $\Gamma_1 \coprod \Gamma_2$ denota l'espai topològic corresponent a la unió disjunta (amb la topologia induïda per Γ_1 i Γ_2).

Per a la definició formal, hem adaptat aquest concepte topològic general al cas de grafs dirigits i etiquetats, fent servir de model la definició de suma connexa de dos grafs no dirigits per a dos vèrtexs que dóna Quenell [41, Definició 2.6].

Definició 1.2.22. Siguin Γ_1, Γ_2 dos grafs dirigits i etiquetats amb elements de A_1 i A_2, respectivament, un conjunt de vèrtexos $B = \{x_i \mid i \in I\} \subseteq V(\Gamma_1)$ i un vèrtex $y \in V(\Gamma_2)$. La *suma connexa de* Γ_1 *i* Γ_2 *respecte de* B *i* y, que indicarem amb $(\Gamma_1, B)\#(\Gamma_2, y)$, és el graf dirigit i etiquetat resultat del procés següent:

- Substitució dels noms comuns. La substitució de Γ_1 i Γ_2 per grafs isomorfs a aquests si Γ_1 i Γ_2 tenen vèrtexos amb el mateix nom o alguna etiqueta en comú.

  En concret, si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ o $V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2) \neq \emptyset$, aleshores substituïm Γ_1 i Γ_2 pels grafs Γ'_1 i Γ'_2, respectivament, tals que, per a tot $j \in \{1, 2\}$,

  - $V(\Gamma'_j) = V(\Gamma_j) \times \{j\}$.

  - $((z, j), (t, j)) \in E(\Gamma'_i)$ si, i només si, $(z, t) \in E(\Gamma_j)$.

- $A'_j = A_j \times \{j\}$.
- $((z,j),(t,j)) \in E(\Gamma'_j)$ té etiqueta $(e,j) \in A'_j$ si, i només si, $(z,t) \in E(\Gamma_j)$ té etiqueta $e \in A_j$.

- Creació de $|B|$ còpies del graf Γ'_2. Per a tot $i \in I$, sigui $\Gamma'_2(i)$ una còpia de Γ'_2. En concret, podem prendre
  - $V(\Gamma'_2(i)) = V(\Gamma'_2) \times \{i\}$.
  - $((z,i),(t,i)) \in E(\Gamma'_2(i))$ si, i només si $(z,t) \in E(\Gamma'_2)$.
  - $\Gamma'_2(i)$ té com a conjunt d'etiquetes A_2 i, a més, $((z,i),(t,i)) \in E(\Gamma'_2(i))$ té etiqueta e si, i només si, $(z,t) \in E(\Gamma'_2)$ té etiqueta e.

  Indiquem amb y_i el vèrtex de $\Gamma'_2(i)$ corresponent a y.

- Identificació dels vèrtexos de B amb y. Siguin
  - Per a cada $i \in I$, un nou símbol z_i.
  - $V''_1 = V(\Gamma'_1) \setminus \{x_i \mid i \in I\}$ i, per a cada $i \in I$, $V''_2(i) = V(\Gamma'_2(i)) \setminus \{y_i\}$.
  - E''_1 el conjunt format a partir de $E(\Gamma'_1)$ per la substitució de cada ocurrència de x_i per z_i, i $E''_2(i)$ el conjunt format a partir de $E(\Gamma'_2(i))$ substituint cada ocurrència de y_i per z_i

- Construcció del graf de la suma connexa. El graf $(\Gamma_1, B)\#(\Gamma_2, y)$ té com a conjunt de vèrtexos
$$V((\Gamma_1, B)\#(\Gamma_2, y)) = V''_1 \cup \bigcup_{i \in I} V''_2(i) \cup \{z_i \mid i \in I\}$$
  i com a conjunt d'arestes el conjunt
$$E((\Gamma_1, B)\#(\Gamma_2, y)) = E''_1 \cup \bigcup_{i \in I} E''_2(i).$$

Quan B i y siguin clars pel context, els ometrem i escriurem, simplement, $\Gamma_1\#\Gamma_2$.

Notem que, abusant del llenguatge, si Γ_1 i Γ_2 són dos grafs, podem dir que Γ_1 està inclòs a $\Gamma_1\#\Gamma_2$, perquè, realment, existeix una còpia isomorfa a Γ_1 dins $\Gamma_1\#\Gamma_2$. En aquest sentit, una successió de sumes connexes $\Omega_0 = \Gamma_1\#\Gamma_2$, $\Omega_k = \Omega_{k-1}\#\Gamma_2$, per a tot $k \geq 2$, defineix un límit de conjunts igual a la unió dels Ω_k.

Teorema 1.2.23 ([41, Teorema 4.6]). *El graf de Cayley del producte lliure és la suma connexa dels grafs de Cayley. Concretament, si G i H són grups finitament generats tals que $G \cap H = \{1\}$ i X i Y són conjunts finits de generadors de G i H, respectivament, aleshores el graf de Cayley $\Gamma_{G*H, G\cup H}$ és isomorf al graf obtingut com a límit de la successió de grafs de Cayley següent:*

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \Gamma_{G,X},\\
&\Gamma_1 = (\Gamma_{G,X}, \{x \in V(\Gamma_0)\})\#(\Gamma_{H,Y}, 1),\\
&\Gamma_2 = (\Gamma_1, V(\Gamma_1) \setminus V(\Gamma_0))\#(\Gamma_{H,Y}, 1),\\
&\dots\\
&\Gamma_k = (\Gamma_{k-1}, V(\Gamma_{k-1}) \setminus \bigcup_{i \le k-2} V(\Gamma_i))\#(\Gamma_{H,Y}, 1),\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Alguns exemples de grafs de Cayley de productes lliures de grups finitament presentats són els següents:

1. El grup $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ consisteix en les classes d'equivalència, mòdul $\sim_*$, de les paraules sobre $(\mathbb{Z}_3 \cup \mathbb{Z}_4)^*$, encara que és molt més natural veure'l com el conjunt de paraules reduïdes sobre $(\mathbb{Z}_3 \cup \mathbb{Z}_4)^*$. Per tant, si indiquem per $a = 1 \in \mathbb{Z}_3$ i $b = 1 \in \mathbb{Z}_4$, aleshores els elements de $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ són les paraules de la forma $a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2}\dots a^{i_k}b^{j_k}$ o de la forma $b^{j_1}a^{i_1}b^{j_2}a^{i_2}\dots b^{j_k}a^{i_k}$, amb $k \ge 0$ i, per a tot $s \in \{1, \dots, k\}$, $i_s \in \{0, 1, 2\}$, $j_s \in \{0, 1, 2, 3\}$.

   El seu graf de Cayley no dirigit respecte del conjunt de generadors $\{a, b\}$ és graf infinit que es mostra a la Figura 1.19 (només representem tres nivells). Per conveniència hem reduït, successivament, la longitud de les arestes. Aquest graf, pel Teorema 1.2.23, coincideix amb el graf obtingut aplicant, succesivament, la suma connexa entre el graf de Cayley de $\mathbb{Z}_3$ i tres còpies de $\mathbb{Z}_4$, la suma connexa d'aquest graf resultant i nou còpies del graf de Cayley de $\mathbb{Z}_3$, etc.

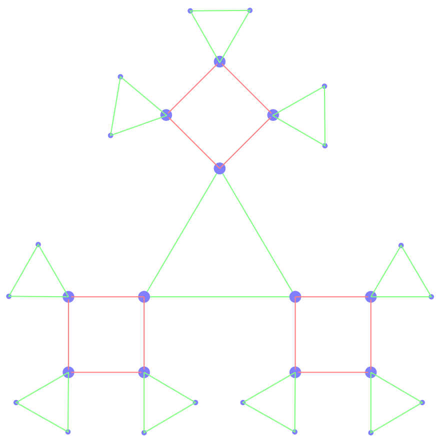


Figura 1.19 El graf de Cayley de $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$.

Notem que aquest graf també coincideix amb el graf obtingut per aplicació successiva de la suma connexa del graf de Cayley de $\mathbb{Z}_4$ i quatre còpies del graf de

Cayley de $\mathbb{Z}_3$, la suma connexa del graf resultant amb vuit còpies del graf de Cayley de $\mathbb{Z}_4$, etc.; o sigui el procés anàleg a l'anterior però amb $\mathbb{Z}_4$ i $\mathbb{Z}_3$ en ordre invers.

2. El graf de Cayley de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ és isomorf al graf de Cayley obtingut aplicant, successivament, la suma connexa de $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ i $|\mathbb{Z}|$ còpies de $\Gamma_{\mathbb{Z}_2}$, la suma connexa del graf resultant i el graf $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ (*aferrant* el graf $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ a cada vèrtex de la frontera d'aquest graf; no aferram $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ als vèrtexs inicials), etc.

Finalment hem de notar que el producte directe de dos grups preserva la decibilitat del problema de la paraula:

Teorema 1.2.24 ([29, Corol·lari 1.3]). *Siguin G i H dos grups finitament generats tals que tenen el problema de la paraula resoluble. Llavors el seu producte directe $G * H$ té també té el problema de la paraula resoluble.*

1.2.2 Diagrames de van Kampen

En aquesta secció, veurem en què consisteixen els diagrames de van Kampen. De forma general, donada una presentació $\mathcal{P}$ d'un grup, els diagrames de van Kampen són objectes geomètrics (presentats en forma de diagrama) associats a paraules sobre els generadors de $\mathcal{P}$. A l'igual que els grafs de Cayley, aquests tenen una estreta relació amb el problema de la paraula. De fet, donen una interpretació topològica de l'àrea algebraica d'una paraula.

Hem de dir que hem adaptat la definició original [8, pàg. 89], amb el propòsit de fer-la menys farragosa. Per aquesta raó, necessitam introduir algunes definicions.

Definició 1.2.25. Donat un alfabet A, una paraula w sobre A és *cíclicament reduïda* si w no acaba i comença simultàniament amb a i a^{-1}, per a algun $a \in A \cup A^{-1}$.

Per exemple, sobre $A = \{a, b\}$, les paraules $ababa$ i abb són cíclicament reduïdes, però aba^{-1} i $b^{-1}a^{-1}bab$ no ho són. La paraula buida és cíclicament reduïda.

Notem que, donada una paraula w sobre un alfabet A, sempre existeix una paraula u cíclicament reduïda tal que $w = v^{-1}uv$, amb $v \in A^*$. A més, d'entre totes les paraules cíclicament reduïdes tal que $w = v^{-1}uv$, amb $v \in A^*$, n'existeix una de sola la qual fa que la longitud $l(v)$ sigui màxima. Aquesta paraula simplement s'obté per aplicació successiva de la transformació $a^{-1}wa \mapsto w$, per a tot $a \in A \cup A^{-1}$. Indicarem amb $cred(w)$ aquesta paraula. En l'exemple anterior, $cred(ababa) = ababa$, $cred(abb) = abb$, $cred(aba^{-1}) = b$, $cred(b^{-1}a^{-1}bab) = b$.

Definició 1.2.26. Donat un alfabet A, dues paraules u, $v \in A^*$ són *cíclicament conjugades* si, i només si, existeixen paraules $w_1, w_2 \in A^*$ tals que $u = w_1w_2$ i $v = w_2w_1$. D'altra banda, donada una paraula w, direm que u és un *conjugat cíclic de* w si u i w són cíclicament conjugades.

Per exemple, $abbcc$ és un conjugat cíclic de $ccabb$ sobre l'alfabet $A = \{a, b, c\}$.

Definició 1.2.27. Sigui $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$, amb $R = \{r_i = 1 \mid i \in I\}$, una presentació. Direm que el conjunt de relacions R és *simètric* si, i només si, per a tota relació $r = 1 \in R$:

- r és reduïda
- r és cíclicament reduïda.
- $r^{-1} = 1$ pertany a R.
- Si s és un conjugat cíclic de r, aleshores $s = 1 \in R$.

Donada una presentació *finita* $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$, sempre podem trobar una presentació $\mathcal{P}' = \langle X \mid S \rangle$ finita amb S simètric i tal que $G(\mathcal{P}) = G(\mathcal{P}')$. Aquest fet és el que estableix el resultat següent.

Proposició 1.2.28. *Sigui $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$, amb $R = \{r_1 = 1, \ldots, r_n = 1\}$, una presentació finita. Aleshores existeix $\mathcal{P}' = \langle X \mid S \rangle$ amb S simètric tal que $G(\mathcal{P}) = G(\mathcal{P}')$. A més, S és finit i és efectivament calculable.*

Demostració. En primer lloc, considerem $T = \{cred(r_1), \ldots, cred(r_n)\} \subseteq F(X)$. Tenim que $\langle\langle T \rangle\rangle = \langle\langle r_1, \ldots, r_n \rangle\rangle$ perquè $\langle\langle x^{-1} r_1 x, r_2, \ldots, r_n \rangle\rangle = \langle\langle r_1, r_2, \ldots, r_n \rangle\rangle$, per a tot $x \in X \cup X^{-1}$, i perquè la paraula $cred(r_i)$ s'obté per reducció cíclica successiva.

Considerem S_0 el conjunt obtingut de la manera següent:

- Per a tot $r \in T$:
  - $r, r^{-1} \in S_0$.
  - Si s és un conjugat cíclic de r, llavors $s = 1 \in S_0$.
- Tot element de S_0 s'ha obtingut per aplicació d'un nombre finit dels passos anteriors.

Aleshores considerem el conjunt de relacions $S = \{r = 1 \mid r \in S_0\}$. Aquest conjunt es diu la *relació simetritzada de R* [29]. Com que $S_0 \supseteq T$, llavors $\langle\langle S_0 \rangle\rangle \supseteq \langle\langle T \rangle\rangle$. D'altra banda, perquè $\langle\langle T \rangle\rangle$ és normal, llavors, per a tot $r \in T$, $r^{-1} \in T$ i si $r = r_1 r_2 \in T$, llavors $r_2 r_1 = r_1^{-1}(r_1 r_2) r_1 \in T$. Per tant, $\langle\langle S_0 \rangle\rangle = \langle\langle T \rangle\rangle$. Aleshores $\langle\langle S_0 \rangle\rangle = \langle\langle r_1, \ldots, r_n \rangle\rangle$. Per això tenim que

$$G(\mathcal{P}) = F(X)/\langle\langle r_1, \ldots, r_n \rangle\rangle \cong F(X)/\langle\langle S_0 \rangle\rangle = G(\mathcal{S}).$$

Finalment notem que S és finit i calculable de forma efectiva, perquè tot aquest procés és finit i acaba en un temps finit. □

A rel d'aquesta proposició, a partir d'ara suposarem que els conjunts de relacions són simètrics. D'altra banda, per comoditat, també podrem suposar que els conjunts de generadors són tancats pels seus inversos formals, és a dir, si G és un grup i X és un conjunt de generadors de G, aleshores $X^{-1} = X$ (això es pot fer simplement prenent $X = Y \cup Y^{-1}$ amb Y un conjunt de generadors de G).

Definició 1.2.29. Siguin $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$, amb $R = \{r_1 = 1, \ldots, r_n = 1\}$, una presentació finita i w una paraula sobre $X \cup X^{-1}$. Un *diagrama de van Kampen* $\mathcal{D}_w$ *per a* w *respecte de* $\mathcal{P}$ és un CW-complex de dimensió 2, finit, planar i contractible amb un punt base $\star$ a la frontera (topològica) $\delta(\mathcal{D}_w)$ de $\mathcal{D}_w$ que satisfà les propietats següents:

- Els seus arcs són dirigits i etiquetats amb elements de $X \cup X^{-1}$.
- Les etiquetes dels arcs de $\delta(\mathcal{D}_w)$ llegides des de $\star$ i en el sentit contrari de les agulles del rellotge formen la paraula w.
- Per a cada cara, les etiquetes dels arcs que l'envolten llegides consecutivament, en un ordre determinat (és a dir, començant des d'un arc determinat) i en el sentit contrari de les agulles del rellotge, formen una paraula de R o de R^{-1}, és a dir, són iguals a algun $r_i^{\pm 1}$.

Quan $\mathcal{P}$ sigui clara pel context, la podrem ometre, i parlarem d'un *diagrama de van Kampen per a* w.

Notem que, si R és simètrica, aleshores la darrera condició de la definició es converteix en què, per a cada cara, les etiquetes dels arcs que l'envolten llegides consecutivament, en qualsevol ordre i en qualsevol sentit, formen una paraula de R, és a dir, són iguals a algun r_i.

Definició 1.2.30. Siguin $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita, $w \in (X \cup X^{-1})^*$ una paraula i $\mathcal{D}$ un diagrama de van Kampen per a w respecte de $\mathcal{P}$. L'*àrea combinatòria (o geomètrica) de* $\mathcal{D}$, que indicarem amb $\mathrm{area}_{c,\mathcal{P}}(\mathcal{D})$, és el nombre de cares de $\mathcal{D}$.

De forma general, no explicitarem el punt base $\star$ de cap diagrama de van Kampen $\mathcal{D}$ per a w respecte de $\mathcal{P}$ perquè aquest es pot obtenir, implícitament, a partir de la paraula w. En aquest sentit, direm que $\mathcal{D}$ *té frontera* w.

Tal com hem anticipat, els diagrames de van Kampen donen una interpretació topològica de l'àrea algebraica d'una paraula. Aquest fet és part del resultat que es coneix com a Lema de van Kampen i que enunciem tot seguit. Es poden trobar diverses referències al respecte [8, Teorema 2.2; 12, Teorema 4.2.2].

Teorema 1.2.31 (Lema de van Kampen). *Siguin G un grup, $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G i $w \in (X \cup X^{-1})^*$ una paraula. Aleshores:*

(a) w és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ si, i només si, existeix un diagrama de van Kampen per a w respecte de $\mathcal{P}$.

(b) Si w és nul-homotòpica, llavors $\mathrm{area}_{a,\mathcal{P}}(w)$ és igual al

$$\min\{\mathrm{area}_{c,\mathcal{P}}(\mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \text{ és un diagrama de van Kampen per a } w \text{ respecte de } \mathcal{P}\}.$$

El segon apartat d'aquest teorema és la raó per la qual es parla, simplement, de l'*àrea d'una paraula w respecte d'una presentació* $\mathcal{P}$, que indicarem amb $\mathrm{area}_{\mathcal{P}}(w)$.

Finalment, donem alguns exemples de diagrames de van Kampen per alguns grups.

1. En $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$, tenim que un diagrama de van Kampen per a $b^3a^{-1}b^{-2}a^{-1}b^{-1}a^2$ és el que està representat a la Figura 1.20 i té àrea 4.

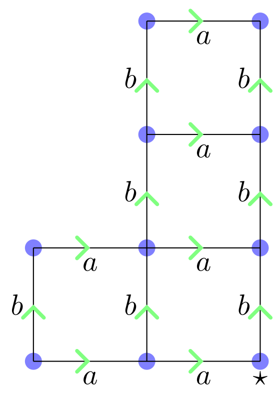


Figura 1.20 Un diagrama de van Kampen per a $b^3a^{-1}b^{-2}a^{-1}b^{-1}a^2$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Aquest diagram es pot representar en forma d'estrella, tal com es pot veure a la Figura 1.21, després d'expressar, en el grup lliure $F(a,b)$, $b^3a^{-1}b^{-2}a^{-1}b^{-1}a^2$ de la forma

$$(b^2a^{-1}rab^{-2})(b^2a^{-1}b^{-1}rbab^{-2})(ba^{-1}a^{-1}b^{-1}rbaab^{-1})(ba^{-1}b^{-1}rbab^{-1}),$$

amb $r = aba^{-1}b^{-1}$.

No està de més dir que tots els diagrames de van Kampen es poden representar en forma d'estrella (seguit potser d'un procés de reducció). De fet, això és part de la demostració del Lema de van Kampen [8, Proposició 2.3].

2. En el grup de Baumslag-Solitar $BS(1,2) = \langle a, b \mid ab = b^2a \rangle$, tenim que el diagrama que es mostra a la Figura 1.22 és un diagrama de van Kampen per a la paraula $w = a^{-2}babab^{-1}ab^{-2}a^{-1}b^{-1}$. A més, al no especificar el punt base, també ho és per a tots els conjugats cíclics de w. En aquest cas, el punt base canvia (depèn de cada paraula) però la *forma* del diagrama és la mateixa.

1.2.3 Quines funcions poden ser funcions de Dehn?

Una de les qüestions fonamentals relativa a les funcions isoperimètriques és la determinació de les funcions que, mòdul $\simeq$, poden ser funcions de Dehn d'un grup.

En primer lloc, hem de notar que no totes les funcions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ poden ser funcions de Dehn de qualque grup finitament presentat. Aquest fet s'estableix per arguments de cardinalitat:

- El conjunt de presentacions finites $\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1 = 1, \ldots, r_k = 1 \rangle$ és numerable, ja que trobar tots els seus elements és equivalent a llistar tots els subconjunts finits de $(X \cup X^{-1}) \times (X \cup X^{-1})^*$ amb $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un conjunt numerable. Llavors també és numerable el conjunt de grups finitament presentats. Per tant, el conjunt

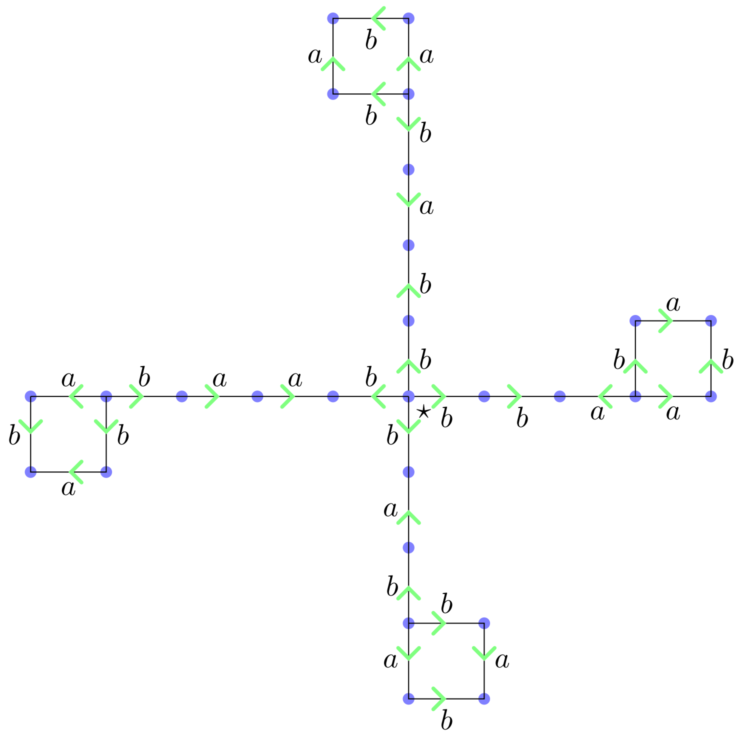


Figura 1.21 Un diagrama de van Kampen per a $b^3a^{-1}b^{-2}a^{-1}b^{-1}a^2$ en forma d'estrella en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

$$\{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{existeixen } G \text{ grup finitament presentat i } \mathcal{P} \text{ presentació de } G \text{ tals que } f \text{ és funció de Dehn de } \mathcal{P}\}$$

té cardinal igual a $|\mathbb{N}|$ (cada parell $(G, \mathcal{P})$, amb G grup finitament presentat i $\mathcal{P}$ presentació de G, té una única funció de Dehn de $\mathcal{P}$ i tota funció de Dehn ho és d'alguna presentació). Llavors el conjunt de classes, mòdul $\simeq$, de les funcions de Dehn dels grups finitament presentat formen un conjunt numerable.

- D'altra banda, el conjunt de les funcions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ té cardinal $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

Per tant, hi ha *moltes* funcions (de fet, en tenim $|\mathbb{R}|$) que no són funcions de Dehn de qualque grup.

1.2.3.1 L'espectre isoperimètric

El problema de determinació de quines són les funcions dels grups finitament presentats s'estudia, principalment, amb l'ajuda del conjunt conegut com *espectre isoperimètric*.

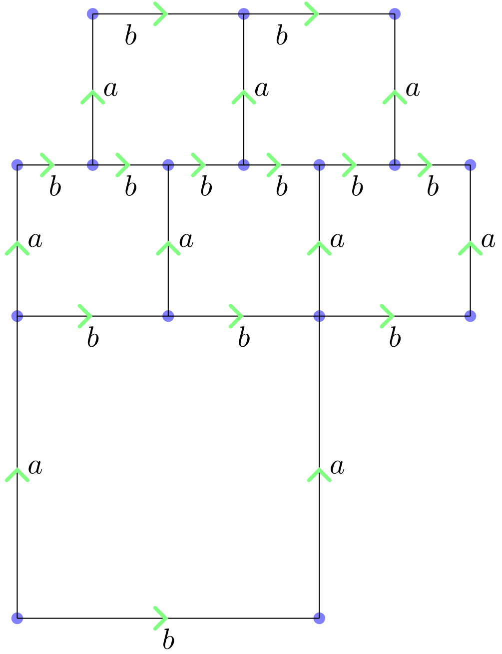


Figura 1.22 Un diagrama de van Kampen per a $a^{-2}babab^{-1}ab^{-2}a^{-1}b^{-1}$ en $BS(1,2)$.

Definició 1.2.32. Un nombre real α es diu que és un *exponent isoperimètric* si la funció $f(n) = n^\alpha$ és una funció de Dehn, per a qualque grup G. Indicarem per IP el conjunt de exponents isoperimètrics i l'anomenarem *espectre isoperimètric*.

Per definició, tenim que IP $\subseteq [1, \infty]$. A més per la discussió anterior, realment IP és un subconjunt comptable de $[1, \infty]$.

Gromov va demostrar esquemàticament [25] el resultat següent. Posteriorment, diversos autors publicaren una demostració formal més rigurosa [4, 40].

Teorema 1.2.33. *Sigui G un grup. Si la seva funció de Dehn δ_G és subquadràtica, o sigui, si $\delta_G(n) \in o(n^2)$, llavors δ_G és lineal (i.e., $\delta_G(n) \simeq n$).*

Per tant, existeix un forat entre 1 i 2, és a dir, IP $\cap (1, 2) = \emptyset$. A rel d'això és pel què l'espectre isoperimètric va prendre interès. Posteriorment, diversos autors demostraren, entre altres coses, que aquest és l'únic forat [5–7, 11]:

Teorema 1.2.34. *Per a tots els enters a, b, c tals que $1 \leq b \leq a < c$, el nombre $c + \frac{a}{b}$ és un exponent isoperimètric. En particular la clausura (topològica) de IP és $\{1\} \cup [2, \infty)$.*

Teorema 1.2.35. *Per a cada parell d'enters positius $p \geq q$, tenim que $2\log_2(2p/q)$ és un exponent isoperimètric*

Una altra resultat que implica que IP sigui dens a $[4, \infty)$ és el teorema de Sapir-Birget-Rips [3, 48] que, a més, connecta l'espectre isoperimètric amb les funcions calculables amb màquines de Turing.

Teorema 1.2.36 (Sapir-Birget-Rips).

(a) Sigui $\alpha > 4$ tal que existeixen una constant $C > 0$ i una màquina de Turing que calcula els primers m dígits de l'expansió decimal de α en un temps com a màxim

$$C \cdot 2^{2^{C \cdot m}},$$

aleshores $\alpha \in IP$.

(b) Si $\alpha \in IP$, llavors existeix una màquina de Turing que calcula els primers m dígits de α en un temps menor o igual que

$$C \cdot 2^{2^{2^{C \cdot m}}}.$$

Definició 1.2.37. Una funció $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és *superadditiva* si, i només si, $f(n+m) \geq f(n) + f(m)$ per a tots $n, m \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.38. *Siguin els conjunts següents:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_4 &= \{[f]_{\simeq} \mid f \text{ funció de Dehn i } \delta_G(n) \succeq n^4\}, \\
\mathcal{T}_4 &= \{[t]_{\simeq} \mid t \text{ funció de temps d'aturada d'una màquina de Turing} \\
&\qquad\qquad \text{tal que } t(n) \succeq n^4\}, \\
\mathcal{T}^4 &= \{[f]_{\simeq} \mid f \text{ superadditiva i } f = t^4, \text{ per una funció de temps d'aturada } t \\
&\qquad\qquad \text{d'una màquina de Turing}\}.
\end{aligned}$$

Aleshores $\mathcal{T}^4 \subseteq \mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{T}_4$.

No es coneix si aquestes inclusions realment són igualtats [12]. De ser així, tendríem una caracterització de les funcions de Dehn δ tals que $\delta(n) \succeq n^4$.

Un corol·lari del teorema de Sapir-Birget-Rips és que qualsevol nombre racional o qualsevol altre nombre *raonable* (per exemple $\pi^2 + e^3$) és un exponent isoperimètric. Igualment, les funcions següents són funcions de Dehn: $f_1(n) = 3^{\sqrt{n}}$, $f_2(n) = e^{n^\pi}$, $f_3(n) = n^2 \log_3(\log_7 n)$, ...

1.2.3.2 Les funcions de Dehn d'alguns grups

Ocupem-nos, tot seguit, de veure algunes funcions de Dehn de determinats grups.

1. Considerem el grup trivial amb la presentació $\mathcal{P} = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$. Com que $\mathcal{P}$ té el conjunt de generadors buit, aleshores el conjunt de paraules sobre aquest conjunt i les seves inverses està format, només, per la paraula buida. Per tant, el morfisme $\pi \colon \{\varepsilon\} \to \{1\}$ és el morfisme trivial. De forma clara, $\text{area}_{a,\mathcal{P}}(\varepsilon) = 0$. Per tant

l'única paraula que existeix és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$. Aleshores la funció de Dehn $\delta_{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ és identicament zero, i.e., $\delta_{\mathcal{P}} \equiv 0$.

El diagrama de la Figura 1.23, el qual no té arcs i només té un vèrtex, és un diagrama de van Kampen per a ε respecte de $\mathcal{P}$. D'això es dedueix que l'àrea geomètrica de ε també és zero.

Figura 1.23 Un diagrama de van Kampen per a ε respecte de $\mathcal{P}$.

2. Si en comptes de la presentació $\mathcal{P}$ per al grup trivial, considerem la presentació $\mathcal{Q} = \langle a \mid a = 1 \rangle$, aleshores la funció de Dehn $\delta_{\mathcal{Q}}$ no és idènticament zero, de fet $\delta_{\mathcal{Q}}(n) = n$. Recordem que suposem que el conjunt de generadors de qualsevol grup no conté l'element neutre, però, en aquest cas, per conveniència, suposarem el contrari[9].

   - Tota paraula sobre $\{a, a^{-1}\}$ és nul-homotòpica per $\mathcal{Q}$, ja que el morfisme $\pi\colon \{a, a^{-1}\}^* \to \{1\}$ ho envia tot a l'element neutre.

   - Per a tot $n \in \mathbb{Z}$, la paraula a^n té àrea algebraica $\text{area}_{a,\mathcal{Q}}(a^n) \leq n$ perquè precisament l'àrea algebraica de a^n respecte de $\mathcal{Q}$ està definida com

   $$\text{area}_{a,\mathcal{Q}}(a^n) = \min\{N \mid a^n = \prod_{i=1}^{N} x_i^{-1} r_i x_i \text{ dins } F(a), \text{ amb } x_i \in F(a), \\ r_i \in \{a, a^{-1}\}\}$$

   i com que, dins el grup lliure $F(a)$,

   $$a^n = \prod_{i=1}^{n} (a^{-1} a a) = a^{-1} a^n a = a^n,$$

   aleshores $\text{area}_{a,\mathcal{Q}}(a^n) \leq n$.

   - Per a tot $n \in \mathbb{Z}$, $\text{area}_{a,\mathcal{Q}}(a^n) \geq n$.

     Aquest fet és trivial per a ε, ja que $\text{area}_{a,\mathcal{Q}}(\varepsilon) = 0$. A més, si $n \neq 0$, aleshores $\text{area}_{a,\mathcal{Q}}(a^n) > 0$, ja que el producte definit dins l'àrea per a $N = 0$ dóna la paraula buida.

     Per a tot $k \geq 1$, considerem els productes

     $$\prod_{i=1}^{k} x_i^{-1} r_i x_i$$

[9] Aquesta condició sobre el conjunt de generadors només afecta a la *forma* dels grafs de Cayley i no als diagrames de van Kampen.

dins $F(a)$, amb $x_i \in F(a)$, $r_i \in \{a, a^{-1}\}$. Com que $x_i \in F(a)$, aleshores x_i ha de ser de la forma a^{n_i} per a qualque $n_i \in \mathbb{Z}$ (amb la convenció que $a^0 = \varepsilon$). Per tant,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k} x_i^{-1} r_i x_i &= \prod_{i=1}^{k} a^{-n_i} a^{e_i} a^{n_i} \\ &= a^{-n_1+e_1+n_1-n_2+e_2+n_2-\ldots-n_k+e_k+n_k} \\ &= a^{e_1+e_2+\ldots+e_k}\end{aligned}$$

amb $n_i \in \mathbb{Z}$ i $e_i \in \{1, -1\}$. Si un d'aquests productes és igual a a^n dins el grup lliure $F(a)$, aleshores $e_1 + \ldots + e_r = n$. Per tant, l'àrea de a^n coindideix amb el mínim $r > 0$ tal que existeixen $e_1, \ldots, e_r \in \{1, -1\}$ tals que

$$e_1 + \ldots + e_r = n.$$

Si $n > 0$, aleshores existeixen i_1, …, i_n tals que $e_{i_1} = 1, \ldots, e_{i_n} = 1$ i, per tant, aquest mínim s'assoleix a n. De forma anàloga, si $n < 0$, llavors existeixen i_1, …, i_{-n} tals que $e_{i_1} = -1, \ldots, e_{i_{-n}} = -1$, per la qual cosa el mínim s'assoleix, un altre cop, a n.

- Per tot això, $\delta_{\mathcal{Q}}(n) = \max\{\text{area}_{a,\mathcal{Q}}(a^i) \mid |i| \leq n\} = n$.

La desigualtat $\text{area}_{\mathcal{Q}}(a^n) \leq n$ es pot interpretar geomètricament: un diagrama de van Kampen per a a^n respecte de $\mathcal{Q}$ es mostra a la Figura 1.24. Per comoditat a l'hora de representar-lo, hem fet un *blow-up* de $\star$ (representat amb un segment discontinu). El diagrama *real* té el vèrtex marcat de cada *circumferència* i $\star$ identificats.

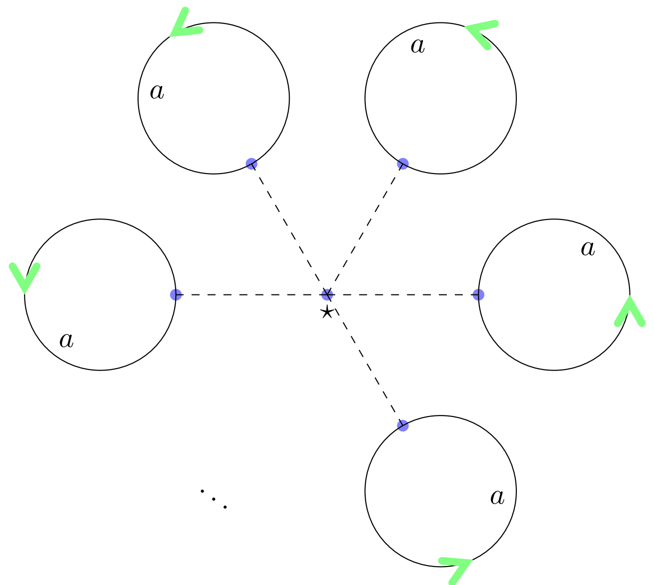


Figura 1.24 Un diagrama de van Kampen per a a^n respecte de $\mathcal{Q}$.

Hem de remarcar que aquest diagrama no serveix per a demostrar que $\text{area}_{\mathcal{Q}}(a^n) \geq n$, ja que necessitam veure que no existeix cap altre diagrama de van Kampen $\mathcal{D}$ per a a^n de menys que n cares. Aquest fer suggereix que els diagrames de van Kampen seran útils per a fitar *superiorment* l'àrea de les paraules.

Per últim, notem que $\delta_{\mathcal{Q}} \simeq \delta_{\mathcal{P}}$, la qual cosa corrabora que les funcions de Dehn de distintes presentacions d'un mateix grup són $\simeq$-equivalents. Per aquesta raó, la funció de Dehn del grup trivial és tal que $\delta_{\{1\}}(x) \simeq x$.

3. El grup $\mathbb{Z}_n$ té funció de Dehn $\delta_{\mathbb{Z}_n} \simeq \text{id}$, o sigui, $\delta_{\mathbb{Z}_n}(x) \simeq x$.

   Per demostrar aquest fet basta trobar una funció de Dehn per una presentació concreta de $\mathbb{Z}_n$ que sigui $\simeq$-equivalent a la funció identitat. Sigui $\mathcal{P} = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ una presentació de $\mathbb{Z}_n$. Vegem que $\delta_{\mathcal{P}}(x) = \lfloor x/n \rfloor$.

   En primer lloc, les paraules nul-homotòpiques són les paraules de la forma a^{kn} amb $k \in \mathbb{Z}$. Això és perquè el morfisme $\pi \colon \{a, a^{-1}\}^* \to \mathbb{Z}_n$ consisteix en enviar $a^m \mapsto m$ i, per tant, $\pi(a^m) = 0$ si, i només si m és un múltiple de k.

   Estrictament parlant, realment tenim que π va de $\{a, a^{-1}\}^*$ al grup $F(a)/N$ amb $N = \langle\langle a^n \rangle\rangle \subseteq F(a)$ i consisteix en enviar $a^m \in \{a, a^{-1}\}^*$ a la classe d'equivalència $[a^m] \in F(a)/N$. Ara bé, com que $F(a)/N \cong \mathbb{Z}_n$, aleshores abusem de notació, identificant π amb la composició $\phi \circ \pi$, amb ϕ l'isomorfisme entre $F(a)/N$ i $\mathbb{Z}_n$ tal que $[a^m] \mapsto m$. Aquesta pràctica és força habitual i la farem servir a partit d'ara.

   Un diagrama de van Kampen per a a^{kn} seria semblant al diagrama de van Kampen de la Figura 1.24. En aquest cas, però, cada *branca* d'aquest diagrama estaria formada per un polígon de n costats (el qual tendria totes les seves arestes etiquetades amb la lletra a en el sentit de les agulles del rellotge) unit a $\star$. A la Figura 1.25 es pot observar aquest diagrama pel cas de $\mathbb{Z}_3$. Cada branca d'aquest diagrama contribueix amb a^3 a la vora del diagrama i hi ha k branques (i, per tant, k cares). Aleshores, en el cas general, tendríem que $\text{area}_{\mathcal{P}}(a^{kn}) \leq k$.

   Un producte de la forma

$$\prod_{i=1}^{s} x_i^{-1} r_i x_i,$$

   amb $x_i \in F(a)$, $r_i \in \{a^n, a^{-n}\}$, és igual a a^{kn} dins el grup lliure $F(a)$ si, i només si, existeixen $n_i \in \mathbb{Z}$ i $e_i \in \{n, -n\}$ tals que $x_i = a^{n_i}$, $r_i = a^{e_i}$ tals que

$$a^{kn} = \prod_{i=1}^{s} a^{-n_i} a^{e_i} a^{n_i} = \prod_{i=1}^{s} a^{e_i}.$$

   Per tant, l'$\text{area}_{\mathcal{P}}(a^{kn})$ és igual a

$$\min\{s \mid kn = e_1 + \ldots + e_r, e_i \in \{n, -n\}\}.$$

   Per la discusió de l'exemple anterior del grup trivial, i treient factor comú n, aquest mínim és igual a

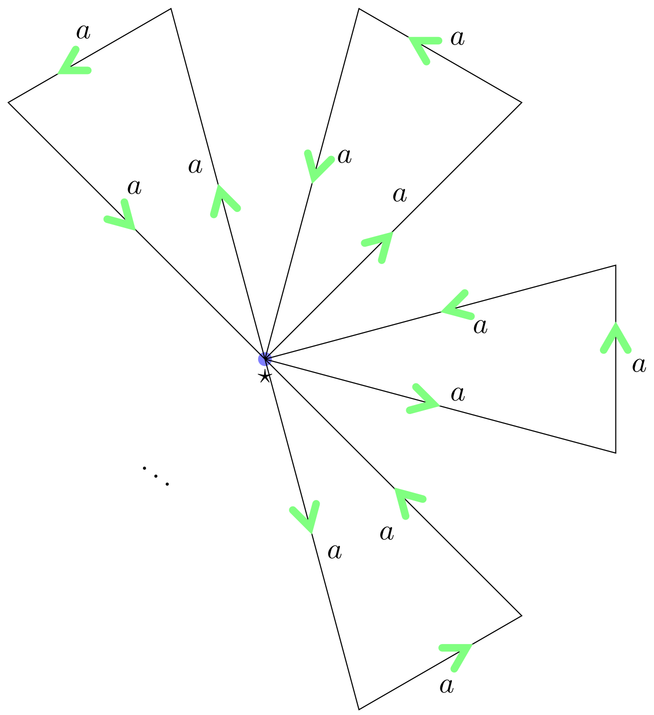


Figura 1.25 Un diagrama de van Kampen per a a^{3k} respecte de $\mathcal{P}$.

$$\min\{s \mid k = e'_1 + \ldots + e'_r, e'_i \in \{1, -1\}\} = k.$$

Per tant, $\mathrm{area}_{\mathcal{P}}(a^{kn}) \geq k$.

De fet, notem que pels mètodes algebraics que hem emprat, no només hem obtingut fites inferiors sobre l'àrea d'una paraula, sinó, realment, una igualtat.

Per tot això, tenim que $\mathrm{area}_{\mathcal{P}}(a^{kn}) = k$ i que la funció de Dehn de $\mathcal{P}$ és igual

$$\delta_{\mathcal{P}}(x) = \{k \mid kn \leq x\} = \lfloor x/n \rfloor.$$

Per tant, $\delta_{\mathcal{P}} \simeq \mathrm{id}$.

4. Que les funcions de Dehn dels dos exemples anteriors siguin d'ordre lineal no és casualitat: tots els grups finits tenen funció de Dehn lineal. De forma més concreta, si G és un grup finit, aleshores $\delta_G \simeq \mathrm{id}$.

   Qualsevol grup finit és quasi-isomètric a un punt (pàgina 23). Per tant, G és quasi-isomètric al grup trivial. De fet, G és quasi-isomètric al graf de Cayley del grup trivial per la presentació $\mathcal{P} = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$ (que és un punt; Figura 1.23), però, com que les mètriques del graf de Cayley i de la paraula coincideixen, aleshores G és quasi-isomètric al grup trivial. El grup trivial té funció de Dehn $\simeq$-equivalent a la funció identitat. Per tant, aplicant el Teorema 1.2.5, G té funció de Dehn $\delta_G \simeq \mathrm{id}$.

5. La funció de Dehn de $\mathbb{Z}$ respecte de la presentació $\mathcal{P} = \langle a \mid \emptyset \rangle$, $\delta_{\mathcal{P}}$, és idènticament zero. El morfisme $\pi\colon \{a, a^{-1}\}^* \to \mathbb{Z}$ consisteix en enviar $a^n \mapsto n$. Per tant $w \in \{a, a^{-1}\}^*$ és nul-homotòpica si, i només si, $w = \varepsilon$ (és a dir, $n = 0$). Per tant, $\delta_{\mathcal{P}}(n) = \text{area}_{\mathcal{P}}(\varepsilon) = 0$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, la funció de Dehn de $\mathbb{Z}$ serà d'ordre lineal.

6. El grup lliure F_n de rang n també té la seva funció de Dehn igual d'ordre lineal. Per al grup lliure $G = F(x_1, \ldots, x_n)$ de base $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i per a la presentació $\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n \mid \emptyset \rangle$, la funció $\pi\colon (X \cup X^{-1})^* \to F(X)$ assigna $w \to [w]_\sim$. Aleshores una paraula w sobre $X \cup X^{-1}$ és nul-homotòpica si, i només si, $w \sim \varepsilon$ o, equivalentment, si aplicant reducció de forma successiva obtenim la paraula buida. En aquest cas, $\text{area}_{\mathcal{P}}(w) = 0$ (basta prendre $N = 0$). Aleshores $\delta_{\mathcal{P}} \equiv 0$. Per tant, la funció de Dehn de $F(X)$ és $\simeq$-equivalent a la identitat.

7. El grup abelià $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ té una funció de Dehn quadràtica. En concret, la funció de Dehn de $\mathcal{P} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ satisfà $(n^2 - 2n - 3)/16 \leq \delta_{\mathcal{P}}(n) \leq n^2/16$ [12, Exemple 3.1.2]. Tot seguit demostrarem la fita superior.

   El morfisme $\pi\colon \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}^* \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ és tal que $a \mapsto (1, 0)$, $b \mapsto (0, 1)$ i, per a tota paraula $w = w_1 \ldots, w_r$, $\pi(w_1 \ldots, w_r) = \pi(w_1) + \ldots + \pi(w_r)$ (i, per ser morfisme, $\pi(\varepsilon) = (0, 0)$). Per tant, les paraules nul-homotòpiques són aquelles tals que la suma dels exponents de les a i de les b siguin iguals a zero. Això és perquè, per a qualsevol paraula $w = w_1, \ldots, w_r$, $\pi(w) = \pi(w_1) + \ldots + \pi(w_r)$ és una suma de sumants dins el conjunt $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, on cada lletra $a^{\pm 1}$ de la paraula w contribueix en $(\pm 1, 0)$ en aquesta suma i, respectivament, $b^{\pm 1}$ contribueix en $(0, \pm 1)$ en la suma. Per tant, si aquesta suma és zero és perquè tenim el mateix nombre de a i a^{-1} i el mateix nombre de b i b^{-1} en w. Aquest fet es pot visualitzar fàcilment dins el graf de Cayley: un camí γ és un camí tancat des de l'origen si, i només si, les seves projeccions, component a component, comencen i acaben a 0 (és a dir, si anam a l'esquerra i a la dreta, i adalt i abaix, el mateix nombre de vegades). Notem que el graf de Cayley (no dirigit) de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ respecte de $\{a, b\}$ és isomorf a la representació del reticle $\mathbb{Z}^2$ (Figura 1.4) i, per tant, en el transcurs d'aquest exemple els identificarem.

   Seguint amb la interpretació geomètrica de les paraules nul-homotòpiques com a camins tancats des de $(0, 0)$ en $\mathbb{Z}^2$, és fàcil demostrar la fita superior $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq n^2/16$. Per a qualsevol paraula w, la seva àrea és igual a l'àrea de la seva paraula reduïda $red(w)$ (dins el grup lliure són la mateixa paraula i, per tant, les àrees algebraiques són iguals). Per tant,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) = \max\{\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \mid w \text{ reduïda, } w \text{ nul-homotòpica per } \mathcal{P} \text{ i } l(w) \leq n\}.$$

   Si w és una paraula reduïda qualsevol, aleshores w és de la forma $a^{m_1} b^{s_1} a^{m_2} b^{s_2} \ldots a^{m_k} b^{s_k}$ o de la forma $b^{s_1} a^{m_1} b^{s_2} a^{m_2} \ldots b^{s_k} a^{m_k}$, amb $\sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{j=1}^{k} s_j = 0$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ i $k \geq 0$. Siguin

$$m = \sum_{\substack{m_i > 0, \\ i \in \{1,\ldots,k\}}} m_i,$$

$$s = \sum_{\substack{s_j > 0, \\ j \in \{1,\ldots,k\}}} s_j.$$

El camí $\gamma(w)$ té longitud $2m + 2s$ (perquè w té longitud $2m + 2s$) i està dins el rectangle tancat $[-m, m] \times [-s, s] \subseteq \mathbb{Z}^2$. Un diagrama de van Kampen $\mathcal{D}_w$ per a w és el que té el punt base $\star = (0, 0)$, que recorre $\gamma(w)$ en sentit contrari de les agulles del rellotge per a formar la vora $\delta(\mathcal{D}_w)$ del diagrama, i que té com a cares els “quadrats” que formen les relacions $aba^{-1}b^{-1}$ (Figura 1.26; no dibuixem les arestes fora de $\gamma(w)$). Per tant, $\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq m \cdot s$. D'altra banda, la paraula $u_{m,s} = a^m b^s a^{-m} b^{-s}$ també té longitud $2m + 2s$ i $\text{area}_{\mathcal{P}}(u_{m,s}) \leq m \cdot s$. Per tant,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) = \max\{\text{area}_{\mathcal{P}}(u_{m,s}) \mid l(u_{m,s}) \leq n\}.$$

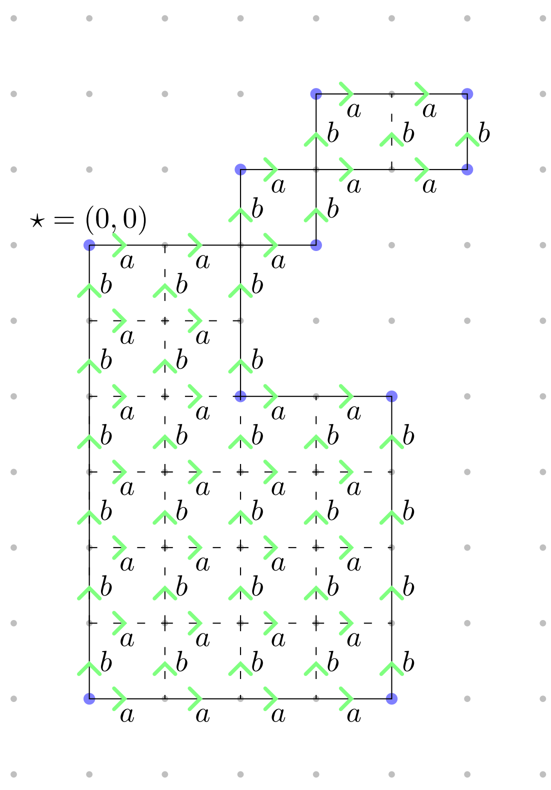


Figura 1.26 Un diagrama de van Kampen per a la paraula nul-homotòpica $w = b^{-6}a^4b^4a^{-2}b^3a^3ba^2b^{-2}a^{-3}$ en $\mathbb{Z}^2$.

Les paraules $u_{m,s}$ corresponen als rectangles de $\mathbb{Z}^2$. Per tant, el màxim de les seves àrees s'assoleix per $m = s$ i, en aquest cas, $\text{area}_{\mathcal{P}}(u_{m,m}) \leq m^2$ (de fet, es pot veure que es tracta d'una igualtat)[10]. Per tant,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq \max\{m^2 \mid 4m \leq n\} = n^2/16.$$

Notem que hem encastat el diagrama de van Kampen dins el graf de Cayley, prenent $\star$ l'element neutre del grup. Això es pot fer sempre que el graf de Cayley Γ_G d'un grup G sigui planar[11]. De fet, basta que Γ_G sigui localment planar (per a qualsevol vèrtex g, existeix un entorn de g tal que, en aquest entorn, Γ_G és planar).

Per demostrar la fita superior de la funció $\delta_{\mathcal{P}}$, hem fet servir mètodes geomètrics. Si volem obtenir aquesta fita emprant mètodes algebraics (amb l'àrea algebraica), per ser més formals, el procés es complica. Amb l'objectiu de provar la fita superior que hem obtingut d'una manera més còmoda i, a la vegada, més formal, intepretarem l'àrea d'una paraula des del punt de vista computacional [8, 44][12]:

Definició 1.2.39. Siguin $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$, amb $R = \{r_1 = 1, \ldots, r_n = 1\}$, una presentació finita i $w \in (X \cup X^{-1})^*$ una paraula. Una *nul-seqüència per a w respecte de $\mathcal{P}$* és una successió finita $(w_i)_{i=0,\ldots,m}$ tal que $w_0 = w$, $w_m = \varepsilon$ i, per a tot $i \in \{0, \ldots, m\}$, cada w_{i+1} s'obté de w_i mitjançant l'aplicació de, només, un dels passos següents:

1. Reducció: L'eliminació d'una ocurrència de la forma xx^{-1} de w_i, amb $x \in X \cup X^{-1}$.

2. Amplificació: La inserció d'una ocurrència de la forma xx^{-1} a w_i, amb $x \in X \cup X^{-1}$. Per tant, $w_{i+1} = uxx^{-1}v$, per qualques paraules u, v sobre $X \cup X^{-1}$ tals que $w_i = uv$.

3. Aplicació d'una relació: Si $w_i = \alpha u \beta$, aleshores $w_{i+1} = \alpha v \beta$, amb u, v, α, β són paraules sobre $X \cup X^{-1}$ tals que un conjugat cíclic de $uv^{-1} \in \{r_1, \ldots, r_n\}$.

Indiquem per $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(w)$ el conjunt de les nul-seqüències per a w respecte de $\mathcal{P}$. Quan $\mathcal{P}$ sigui clara pel context, la ometrem i escriurem, simplement, $\mathcal{N}(w)$.

Si $(w_i)_{i=0,\ldots,m} \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(w)$, aleshores $A((w_i)_{i=0,\ldots,m})$ indicarà el nombre dels i tals que w_{i+1} s'ha obtingut de w_i aplicant la regla de l'aplicació d'una relació.

---

[10] Aquesta és una de les raons per les quals les funcions isoperimètriques reben aquest nom: el *problema isoperimètric* tracta de determinar, donat un nombre n, quin és l'àrea màxima que es pot aconseguir amb un camí de longitud n. En general es pot plantejar aquest problema per a un espai mètric mesurable M. Per a $M = \mathbb{R}^2$, aquest màxim s'assoleix pel cas en què el camí forma una circumferència i, per a $M = \mathbb{Z}^2$, quan forma un quadrat. Quan M és una varietat de Riemmann, es denota per $Fill_M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció que fa dependre aquesta àrea màxima en funció de n. Si G és un grup que actua de forma *prou* regular en M, llavors $Fill_M \simeq \delta_{\pi_1(M)}$ [16].

[11] Malauradament, la propietat de què un grup tengui un graf de Cayley planar no és decidible [43].

[12] Des d'aquest *punt de vista computacional*, mereix la pena destacar el treball de Vaccaro [52], que interpreta l'àrea d'una paraula com una aplicació del conjunt de certs tipus de programes als nombres naturals. Així, obté una demostració computacional del Lema de van Kampen.

Proposició 1.2.40 ([8, Lema 1.5.1]). *Siguin $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ una presentació finita i w una paraula sobre $X \cup X^{-1}$. La paraula w és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ si, i només si, existeix una nul-seqüència per a w respecte de $\mathcal{P}$.*

Proposició 1.2.41 ([8, Proposició 1.5.2]). *Siguin una presentació finita $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ i w una paraula sobre $X \cup X^{-1}$. Aleshores*

$$area_{\mathcal{P}}(w) = \min\{A((w_i)_{i=0,\dots,m}) \mid (w_i)_{i=0,\dots,m} \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(w)\}.$$

Constinuant amb l'exemple, sigui w una paraula reduïda sobre $\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ tal que té m i s lletres de la forma $a^{\pm 1}$ i $b^{\pm 1}$, respectivament. Podem passar totes les lletres de la forma $a^{\pm 1}$ a l'esquerra aplicant la relació $aba^{-1}b^{-1}$, ja que, per mor d'aquesta relació, tot els símbols commuten ($a^{\pm 1}b^{\pm 1} = b^{\pm 1}a^{\pm 1}$). Com a màxim ens faran falta $m \cdot s$ passes per fer aquest *traspàs* (el màxim s'assoleix amb les paraules de la forma $b^{n_1} \dots b^{n_s} a^{n_1} \dots a^{n_m}$). Per tant, obtindrem una paraula no reduïda de forma $a^{n_1} \dots a^{n_m} b^{m_1} \dots b^{m_s}$, amb $n_i, m_j \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$ i $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, $\sum_{j=1}^{s} n_j = s$. Després d'això, reduïrem les lletres. Amb aquest procés, podem construir una nul-seqüència $(w_i)_{i \in I}$, amb $I = \{0 \dots, m/2 + s/2 + m \cdot s\}$, per a w respecte de $\mathcal{P}$ tal que $A((w_i)_{i \in I}) \leq m \cdot s$. Per tant, l'àrea de w està fitada superiorment per $m \cdot s$. Per a $m = s$, s'assoleix el màxim (el producte $x \cdot y$, per $x, y \in \mathbb{N}$, és màxim quan $x = y$). Llavors $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq n^2/16$.

Per últim, comentar que no només $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ té la funció de Dehn quadràtica. Tots els grups abelians $\mathbb{Z}^r$, amb $r \geq 2$, tenen funció de Dehn $\simeq$-equivalent a la funció $n \mapsto n^2$ [12].

8. Existeixen grups amb funcions de Dehn d'ordre considerablement gran, en concret, d'ordre estrictament major que el polinomial[13]:

   - Siguin les funcions $\varepsilon_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definides com $\varepsilon_0(n) = n$, $\varepsilon_1(n) = 2^n$ i $\varepsilon_m(n) = 2^{\varepsilon_{m-1}(n)}$, per a tot $m \geq 2$. Aleshores el grup

     $$B_m = \langle x_0, x_1, \dots, x_m \mid x_i^{-1} x_{i-1} x_i = x_{i-1}^2 \text{ per } i = 1, \dots, m\rangle$$

     és tal que la seva funció de Dehn és $\simeq$-equivalent a ε_m [12, Proposició 3.2.2].

   - El grup

     $$S = \langle x, y \mid (yxy^{-1})^{-1} x (yxy^{-1}) = x^2\rangle$$

     té funció de Dehn $\delta_S \simeq \Lambda$, amb $\Lambda(n) = \varepsilon_n(n)$, tal com va demostrar Gersten [22]. Es conjectura que si G és un grup finitament presentat amb una presentació d'una sola relació, aleshores $\varepsilon_n \succeq \delta_G$ [12, pàg. 16; 8, pàg. 105] (recordem que els grups finitament presentats per presentacions amb una sola relació tenen el problema de la paraula resoluble). En aquest sentit, Bernasconi provà que una funció $\simeq$-equivalent a la funció d'Ackermann és $\succeq \delta_G$ (i, per

[13] Per tant, que no es poden estudiar amb l'espectre isoperimètric.

tant, la funció d'Ackermann). En concret, si $G = \langle X \mid r = 1\rangle$ amb r una paraula de longitud k, aleshores

$$\delta_G \preceq F_{2k+1} \preceq F_\omega,$$

on $F_m\colon \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ i $F_\omega\colon \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ estan definides com

$$F_m(n) = \begin{cases} 2n & m = 1, \\ F_{m-1}^{(n)}(n) & \text{altrament} \end{cases}$$
$$F_\omega(n) = F_n(n),$$

i on $F_m^{(n)}$ indica la composició successiva de F_m n cops [2, Teorema 18]. A més, en aquest cas, F_ω és $\simeq$-equivalent a la funció d'Ackermann [2, Corol·lari 12].

Un tema important, que mereix ser tractar a part, és la determinació de les funcions de Dehn de les construccions de grups i, en concret, del producte directe $G\times H$ i del producte lliure $G{*}H$ de dos grups G i H qualssevol. Es coneixen fites, superiors i inferiors, d'aquestes funcions de Dehn en funció de les funcions de Dehn δ_G i δ_H, tal com mostren els resultats següents.

Teorema 1.2.42 ([12, pàg. 19; 9, Proposició 2.1, Corol·lari 2.3]). *Siguin G, H grups finitament presentats. Aleshores la funció de Dehn $\delta_{G\times H}$ del producte directe $G\times H$ satisfà*

$$\max\{\delta_G(n), \delta_H(n)\} \preceq \delta_{G\times H}(n) \preceq \max\{n^2, \delta_G(n), \delta_H(n)\} \preceq n^2 + \max\{\delta_G(n), \delta_H(n)\}.$$

Notació 1.2.43. Sigui $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Indicarem amb $\overline{f}$ la funció definida com

$$\overline{f}(n) = \max\{\sum_{i=1}^{r} f(n_i) \mid \sum_{i=1}^{r} n_i = n\}$$

i l'anomenarem la *clausura superadditiva de f*.

La clausura superadditiva $\overline{f}$ de f és la funció més petita de les funcions superadditives majors o iguals, punt a punt, que f [26]. També compleix diverses propietats: si $f \preceq g$, aleshores $\overline{f} \preceq \overline{g}$, en particular, per a tot $k \geq 1$, si $f(n) \leq n^k$, llavors $\overline{f}(n) \leq n_k$ [9].

Teorema 1.2.44 ([26]). *Siguin G, H dos grups finitament presentats no trivials. Aleshores $\delta_{G*H} \simeq \overline{\delta}_{G*H}$.*

Corol·lari 1.2.45 ([9, 12, 26]). *Siguin G, H dos grups finitament presentats. Aleshores:*

(a) $\delta_{G*H}(n) \simeq \max\{\overline{\delta}_G(n), \overline{\delta}_H(n)\}$.

(b) $\max\{\delta_G(n), \delta_H(n)\} \preceq \delta_{G*H}(n) \preceq \max\{\overline{\delta}_G(n), \overline{\delta}_H(n)\}$.

1.2.4 Funcions d'emplenament

A part de les funcions de Dehn, es poden definir certes funcions sobre els diagrames de van Kampen que també són invariants per quasi-isometries. Aquestes funcions s'anomenen *funcions d'emplenament*[14]. Aquestes funcions també tenen connexió amb el problema de la paraula. En aquesta secció, definirem les funcions d'emplenament més importants (el *diàmetre intrínsic* i la *longitud d'emplenament*[15]) i llistarem els resultats principals. Es poden consultar diverses referències sobre el tema [8, 14, 44].

Definició 1.2.46. Siguin $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita, w una paraula sobre $X \cup X^{-1}$, i $\mathcal{D}_w$ un diagrama de van Kampen per a w respecte de $\mathcal{P}$. Un *shelling per a* $\mathcal{D}_w$ és un successió finita $\mathcal{S} = (\mathcal{D}_i)_{i=0,\ldots,m}$ tal que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_w$, $\mathcal{D}_m = \star$ i $\mathcal{D}_{i+1}$ s'obté de $\mathcal{D}_i$ mitjançant l'aplicació d'un dels passos següents (Figura 1.27):

- Colapse d'un arc: l'eliminació d'un parell (e^1, e^0) tal que e^1 és un arc, e^0 és un vèrtex, e^0 pertany a la frontera $\delta(e^1)$ de e^1, $e^0 \neq \star$ i e^1 està connectada a la resta del diagrama per l'altre vèrtex de la seva frontera que no és e^0.

- Expansió d'un arc: si (e^1, e^0) és un parell tal que e^1 és un arc de $\mathcal{D}_i$, e^0 és un vèrtex de $\mathcal{D}_i$ i $e^0 \in (\delta(e^1) \cap \delta(\mathcal{D}_i))$, aleshores es dupliquen e^0 i e^1 a $\mathcal{D}_{i+1}$. Això té l'efecte d'introduir dos arcs nous en la frontera del diagrama.

- Colapse d'una cara: l'eliminació d'un parell (e^2, e^1) tal que e^2 és un cara de $\mathcal{D}_i$, e^1 és un arc de $\mathcal{D}_i$, $e^1 \in (\delta(e^2) \cap \delta(\mathcal{D}_i))$. L'efecte d'aquest pas és la substitució de e^1 per $\delta(e^2) \setminus e^1$.

Definició 1.2.47. Siguin $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita, w una paraula sobre $X \cup X^{-1}$, i $\mathcal{D}_w$ un diagrama de van Kampen per a w respecte de $\mathcal{P}$.

(a) El *diàmetre intrínsic* (o simplement *diàmetre*) *de* $\mathcal{D}_w$, que indicarem amb $\mathrm{Diam}(\mathcal{D}_w)$, és

$$\mathrm{Diam}(\mathcal{D}_w) = \max\{\rho(a,b) \mid a, b \in \mathcal{D}_w\},$$

on ρ és el nombre mínim d'arcs de $\mathcal{D}_w$ tals que existeix un camí sobre $\mathcal{D}_w$ que passa, exactament, per aquests arcs des de a fins a b (o sigui, la distància combinatòria dins el conjunt d'arcs del diagrama de van Kampen $\mathcal{D}_w$).

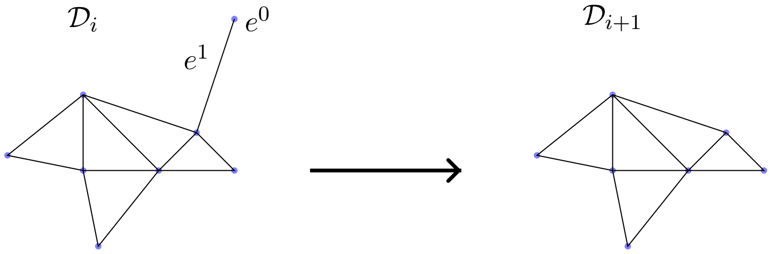
(b) La *longitud d'emplenament*, que indicarem amb $\mathrm{FL}(\mathcal{D}_w)$, és igual a

$$\mathrm{FL}(\mathcal{D}_w) = \min\{L \mid \exists\, (\mathcal{D}_i)_{i \in I} \textit{ shelling} \text{ tal que } \max_i l(\delta(\mathcal{D}_i)) \leq L\}.$$

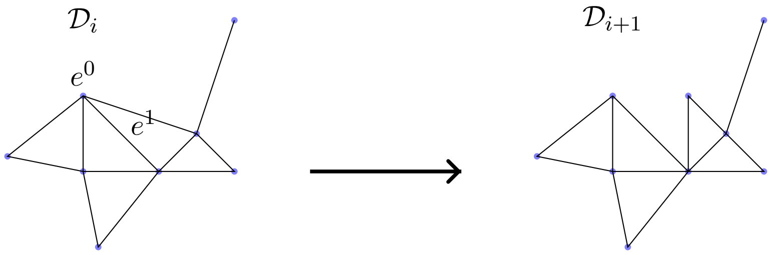
Sigui $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$. Abusant del llenguate, indicarem amb els mateixos símbols les funcions següents:

[14] Hem traduït de l'anglès el terme "filling functions" com a "funcions d'emplenament".

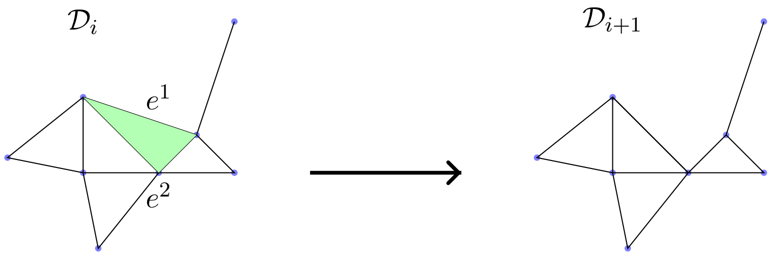
[15] Existeixen altres funcions d'emplenament: el diàmetre extrínsic EDiam, la longitud de galeria GL, la longitud d'emplenament lliure FFL, la longitud d'emplenament lliure de fragmentació FFFL, etc. Hi ha aspectes (per exemple la seva interpretació algebraica) que no es coneixen d'algunes d'aquestes funcions.



(a) Colapse d'un arc.



(b) Expansió d'un arc.



(c) Colapse d'una cara.

Figura 1.27 Els possibles passos d'un *shelling*.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Diam}(w) &= \min\{\mathrm{Diam}(\mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \text{ un diagrama de van Kampen per a } w\},\\
\mathrm{FL}(w) &= \min\{\mathrm{FL}(\mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \text{ un diagrama de van Kampen per a } w\},\\
\mathrm{Diam}(n) &= \max\{\mathrm{Diam}(w) \mid w \text{ nul-homotòpica per } \mathcal{P} \text{ i } l(w) \leq n\},\\
\mathrm{FL}(n) &= \max\{\mathrm{FL}(w) \mid w \text{ nul-homotòpica per } \mathcal{P} \text{ i } l(w) \leq n\},
\end{aligned}$$

on w és una paraula sobre X i $n \in \mathbb{N}$. Pel context es distingirà si Diam i FL s'apliquen a diagrames de van Kampen, a paraules o a nombres. Notem que no especifiquem la presentació en les notacions. Això és perquè, com passa amb les funcions de Dehn, per a presentacions distintes, les funcions Diam i FL són bilipschitz equivalents. De fet, són invariants per quasi-isometries [8, 14–15]. En aquest sentit, si G és un grup qualsevol, es parla de *la funció isodiamètrica de G*, que es denota per Diam_G, i de *la funció de longitud d'emplenament de G*, que indicarem per FL_G. Si volem concretar la presentació $\mathcal{P}$ per a les funcions $\mathrm{Diam}(n)$ i $\mathrm{FL}(n)$, ho indicarem per $\mathrm{Diam}_{\mathcal{P}}(n)$ i $\mathrm{FL}_{\mathcal{P}}(n)$, respectivament.

Un grup G té el problema de la paraula resoluble, si i només si, una de les funcions δ_G, Diam_G o FL_G és recursiva. De fet, una d'aquestes funcions és recursiva si, i només si, ho són totes [8, pàg. 104].[16]

La funció isodiamètrica es pot interpretar de forma algebraica [12, pàg. 45]: si $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ és una presentació finita i w és una paraula sobre $X \cup X^{-1}$, aleshores $\mathrm{Diam}(w)$ coincideix amb el

$$\min\{\max_i l(x_i) \mid w = \prod_{i=1}^{N} x_i^{-1} r x_i \text{ dins } F(X), x_i \in F(X), r \in R_*^{\pm 1}\},$$

on $R_* = \{uv^{-1} \mid (u, v) \in R\} \subseteq F(X)$.

Proposició 1.2.48 ([8, Cap. 2]). *Sigui $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G. Aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$, tenim que:*

(a) Existeix $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{Diam}_{\mathcal{P}}(n) \leq \mathrm{FL}_{\mathcal{P}}(n) \leq K\delta_{\mathcal{P}}(n) + n.$$

(b) Sigui $C = 2|X| + 1$. Aleshores

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq C^{\mathrm{FL}_{\mathcal{P}}(n)}.$$

Teorema 1.2.49 (Teorema del doble exponencial [8, Teorema 2.1.2]). *Sigui $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita. Existeix $C > 0$, la qual només depèn de $\mathcal{P}$, tal que*

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq n^{C^{C^{\mathrm{Diam}_{\mathcal{P}}(n)}}},$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$.

És un problema obert si es pot davallar aquesta fita superior, simplement, a una exponencial [8].

1.3 Les seccions dels grups

En aquest apartat introduirem el concepte de la secció d'un grup i veurem la seva connexió amb diversos aspectes dels grups, en particular amb el problema de la paraula. Sota certes condicions, les seccions ens proporcionaran fites superiors de les funcions de Dehn.

Donat un grup G i X un conjunt finit de generadors de G, existeixen, en principi, moltes paraules w sobre $X \cup X^{-1}$ tals que $\pi(w) = 1$. Amb una secció triarem un d'aquests elements:

[16] D'altra banda, G té el problema de la paraula resoluble si existeixen una presentació finita $\mathcal{P}$ de G i una funció $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Diam}(n) \leq f(n)$, $\mathrm{FL}(n) \leq f(n)$ o $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq f(n)$ en $\mathcal{P}$. Per a Diam, aquest tipus de funcions s'anomenen *funcions isodiamètriques*.

Definició 1.3.1. Sigui G un grup i X un conjunt finit de generadors de G. Una *secció de G respecte de X* és una aplicació $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ tal que la composició $\pi \circ \sigma\colon G \to G$ és igual a la funció identitat en G. Per comoditat, per a tot $g \in G$, podrem escriure per σ_g la imatge de g per σ.

Notem que, com que σ_g és una paraula, aleshores, realment, elegim un camí des de 1 fins a g dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$, per a tot $g \in G$ (aquest camí és, de fet, $\gamma(\sigma_g)$). A partir d'ara, identificarem σ_g amb aquest camí, no fent distinció a l'hora d'escriure'ls.[17] En aquest sentit, per a tot $t \in \mathbb{N}$, $\sigma_g(t)$ podrà indicar una paraula (com al prefix de longitud t de la paraula σ_g) o un element de G (com el vèrtex t-èssim del camí $\gamma(\sigma_g)$).

Depenent de l'autor, a la literatura, sovint s'identifica una secció $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ amb la seva imatge Im σ.[18] En aquest sentit, una secció no és res més que un subconjunt de $(X \cup X^{-1})^*$ que està en bijecció amb G per π. Nosaltres evitarem aquesta identificació i usarem el terme secció, exclusivament, per referir-nos a l'aplicació de G a $(X \cup X^{-1})^*$.

Vegem alguns exemples de seccions:

0. El grup trivial amb la presentació $\mathcal{P} = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle$ admet una única secció, la consistent en enviar $1 \mapsto \varepsilon$. Això concorda amb l'aspecte geomètric de la secció: només hi ha un camí al graf de Cayley de $\{1\}$ respecte de $\mathcal{P}$, no moure's de 1 (Figura 1.1a). I, per a la presentació $\mathcal{Q} = \langle a \mid a = 1 \rangle$, $\{1\}$ només n'admet, essencialment, tres: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\colon \{1\} \to \{a, a^{-1}\}^*$ definides com $\sigma_1 \equiv a$, $\sigma_2 \equiv a^{-1}$ i $\sigma_3 \equiv \varepsilon$. Les altres hi són *equivalents* en el sentit que defineixen el mateix camí sobre el graf de Cayley (la Figura 1.1a mostra que només hi ha tres camins dins el graf de Cayley de $\{1\}$ respecte de $\mathcal{Q}$: prendre la *ruta* de 1 o la de 1^{-1} o quedar-se quiet).

1. L'aplicació que fa correspondre a cada classe d'equivalència $[w]$ del grup lliure $F(X)$ la paraula reduïda del seu representant, $red(w)$, és una secció del grup lliure $F(X)$ respecte de X.

2. El grup $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ amb els generadors $a = (1, 0)$ i $b = (0, 1)$, té com a secció

$$\sigma((i, j)) = a^i b^j.$$

La raó és perquè, com que a i b commuten, aleshores, per a tota paraula w, existeix u de la forma $a^i b^j$, per qualques $i, j \in \mathbb{Z}$, tal que $\pi(w) = \pi(u)$ (u simplement s'obté passant totes les lletres $a^{\pm 1}$ a l'esquerra i reduint la paraula resultant, obtenint una paraula reduïda). Geomètricament aquest fet és evident: per a qualsevol element $(i, j) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, existeix un camí dins el graf de Cayley que va a parar a aquest element i que té la forma $a^i b^j$, $i, j \in \mathbb{Z}$ (Figura 1.28a).[19]

[17] En la literatura, una secció és un *combing*. En comptes de traduir aquesta paraula de forma literal per "pentinat", hem preferit traduir-la per "secció", ja que és el terme habitual per referir-nos a la inversa per l'esquerra d'una projecció. El terme anglès té la seva explicació en què amb una secció es *pentina* el graf de Cayley d'un grup, triant un sol camí per anar a cada vèrtex (seguint amb l'analogia, tots els possibles camins dins els graf de Cayley serien els *cabells*). Sovint, les seccions també s'anomenen *formes normals* si es destaca el seu aspecte més algebraic (de tria de paraules).

[18] Aquesta pràctica la realitza, per exemple, Meier [33].

[19] Tornem a notar aquí que identifiquem camins amb paraules.

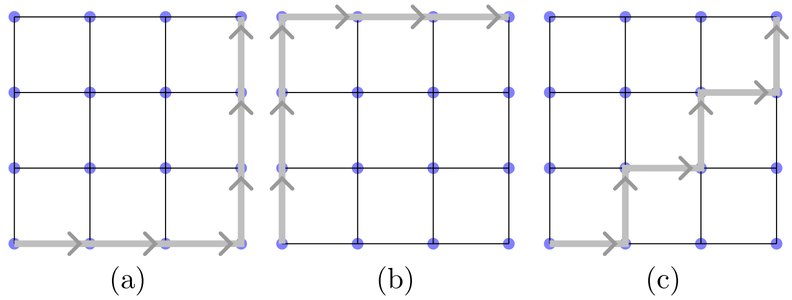


Figura 1.28 Els camins corresponents a les tres seccions σ, κ i λ. Aquests camins uneixen $(0,0)$ amb el vèrtex $\pi(a^3b^2) = \pi(b^2a^3) = \pi((ab)^3b^{-1}) = (3,2)$.

De la mateixa manera, es pot veure que les aplicacions $\kappa, \lambda : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}^*$ definides com

$$\kappa((i,j)) = b^j a^i,$$
$$\lambda((i,j)) = (ab)^i b^j$$

són seccions de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ respecte de $\{a,b\}$ (Figura 1.28).

3. Considerem $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$ amb els generadors $x = (1,0)$ i $y = (0,1)$. L'aplicació $\sigma: G \to \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}^*$ definida com

$$\sigma((i,j)) = x^i y^j,$$

per a tot $(i,j) \in G$, és una secció de G respecte de $\{x,y\}$, tal com es pot veure a la Figura 1.29.

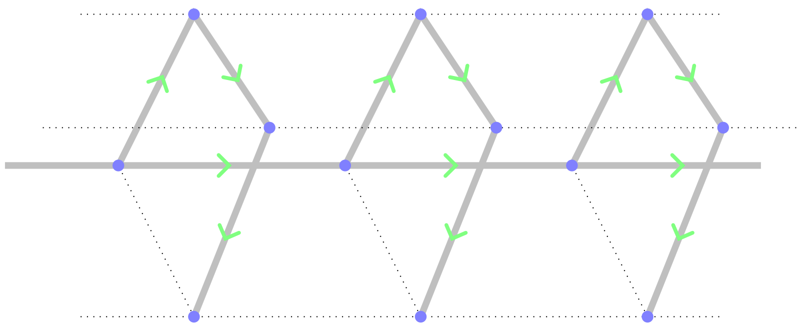


Figura 1.29 La secció σ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$ tal que $\sigma((i,j)) = x^i y^j$.

També tenim com a secció l'aplicació κ, la qual va en sentit contrari de σ, consistent en l'assignació

$$\kappa((i,j)) = \begin{cases} x^i & \text{si } j = 0 \\ x^i y^{-(4-j)} & \text{si } j > 0 \end{cases},$$

per a cada $(i,j) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$. Per exemple, $\kappa((2,2))$ passaria pels vèrtexos $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,-1) = (2,3)$ i $(2,-2) = (2,2)$, mentre que $\sigma((2,2))$ passaria pels vèrtexos $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ i $(2,2)$.[20]

4. En el grup de Baumslag-Solitar $BS(1,2) = \langle a, b \mid ab = b^2 a \rangle$ tenim que cada element es pot representar com una paraula de la forma

$$W = \{a^{-k} b^m a^{k+n} \mid k, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

[33, pàg. 108]. Ara bé, no existeix cap secció σ tal que Im $\sigma = W$. La raó d'això és perquè paraules diferents de W poden representar el mateix element: les paraules aba^{-1} ($k = -1$, $m = 1$ i $n = 0$) i b^2 ($k = n = 0$ i $m = 2$) són ambdues de W però $\pi(aba^{-1}) = \pi(b^2) \in BS(1,2)$ (Figura 1.9). D'aquesta manera, W no està en bijecció amb $BS(1,2)$ per π (l'aplicació $\pi\colon \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\} \to BS(1,2)$ restringida a W només és exhaustiva) i, per tant, no pot ser imatge de cap secció.

Proposició 1.3.2 ([33, Proposició 5.4]). *Sigui el conjunt de paraules*

$$W' = \{a^{-k} b^{2m+1} a^{k+n} \mid k, m, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $\sigma\colon G \to \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}^*$ *és una aplicació tal que Im* $\sigma = W'$*, llavors* σ *és una secció de* $BS(1,2)$ *respecte de* $\{a, b\}$*.*

1.3.1 Els llenguatges formals i les seccions

Donada una secció σ d'un grup G respecte d'un conjunt de generadors X, la seva imatge Im σ és un subconjunt de $(X \cup X^{-1})^*$ o, en altres paraules, un *llenguatge* sobre $X \cup X^{-1}$. Aleshores podem estudiar-la des del punt de vista de la Teoria dels Llenguatges Formals. Hi haurà certa correspondència entre les propietats de Im σ i les de G.[21]

Definició 1.3.3. Una secció $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ de G respecte de X es diu *regular* si, i només si, el llenguatge Im σ és regular.

Es pot veure que el conjunt de paraules reduïdes sobre un alfabet finit és un conjunt regular [33, Exemple 7.22]. D'altra banda, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ té una secció regular: per exemple $\sigma\colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}^*$ definida a l'Exemple 2 (pàgina 55) i que consisteix en enviar $(i,j) \mapsto a^i b^j$, on $a = (1,0)$ i $b = (0,1)$. Im σ és igual a la concatenació de $\{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ i $\{b^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ i ambdós conjunts són regulars.

Tenir una secció regular es preserva per canvi de generadors i per les construccions més usuals de grups [33]:

[20] Val la pena dir que no entenem $\mathbb{Z}_4$ com el grup quocient $\mathbb{Z}/\mathrm{mod}_4$ sinó com un conjunt finit de símbols $\{0,1,2,3\}$ juntament amb l'operació *natural*: $1 + 3 = 0$, $-3 = 1$, $-2 + 1 = 3$ etc. la qual es pot especificar amb una taula de productes finita.

[21] Suposem que el lector coneix els conceptes i resultats bàsics dels llenguatges formals i, sobretot, els distints tipus de famílies de llenguatges: regulars, lliures de context, recursius i recusivament enumerables. Es poden consultar diverses referències al respecte [17, 27, 33].

Proposició 1.3.4. *Siguin G un grup i X i Y dos conjunts finits de generadors de G. Aleshores, si G admet una secció regular respecte de X, llavors G admet una secció regular respecte de Y.*

Proposició 1.3.5. *Siguin G, H dos grups finitament generats. Si G i H admeten una secció regular per qualque conjunt finit de generadors, aleshores els grups $G \times H$ i $G * H$ també admeten una secció regular per qualque conjunt finit de generadors.*

Teorema 1.3.6. *Sigui G un grup finitament generat. Si G admet una secció regular (respecte algun conjunt finit de generadors) i G és infinit, aleshores G té un element d'ordre infinit.*

Per tant, els grups finitament generats que tenen tots els seus elements d'ordre finit no admeten una secció regular.

Amb l'ajuda de les seccions regulars es pot demostrar que els subgrups finitaments generats d'un grup lliure són tots lliures [33]. Aquest fet pot ser demostrat com a corol·lari del resultat següent:

Proposició 1.3.7. *Siguin G un grup i X un conjunt finit de generadors de G. Un subgrup H de G és finitament generat si, i només si, H és la imatge per π d'un llenguatge regular $L \subseteq (X \cup X^{-1})^*$.*

Així com la regularitat de les seccions d'un grup ens dóna informació sobre aquest, pareix raonable estudiar quan el conjunt de paraules w tals que $\pi(w) = 1$ és regular i esbrinar quines propietats del grup es poden deduir. Com veurem, aquesta condició és molt més restrictiva que la regularitat sobre les seccions.

Definició 1.3.8. Siguin G un grup i X un conjunt finit de generadors de G. Indicarem per $WP(G,X)$ el conjunt següent

$$WP(G,X) = \{w \in (X \cup X^{-1})^* \mid \pi(w) = 1\} \subseteq (X \cup X^{-1})^*.$$

Es pot veure que el conjunt de paraules nul-homotòpiques de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ per a la presentació $\mathcal{P} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$, que recordem que són les paraules tals que la suma dels exponents de a i de b són zero (pàg. 47), no és un conjunt regular [33]. Aquest fet concorda amb el teorema següent:

Teorema 1.3.9 ([33, 38]). *Siguin G un grup i X un conjunt finit de generadors de G. Aleshores*

(a) $WP(G,X)$ *és regular si, i només si, G és finit.*

(b) $WP(G,X)$ *és lliure de context, si i només si G conté un subgrup d'índex finit H que és lliure.*

Notem que, si el subgrup lliure d'índex finit que apareix en el darrer apartat del teorema és finitament generat, aleshores la funció de Dehn de G té ordre lineal.

Si diem H a aquest subgrup, aleshores $\delta_H \simeq \mathrm{id}$, ja que tot grup lliure té funció de Dehn lineal (pàgina 47). D'altra banda, $\delta_G \simeq \delta_H$ perquè H té índex $[G : H]$ finit (pàgina 23). Per tant, pel Teorema 1.2.5, $\delta_G \simeq \delta_H \simeq \mathrm{id}$.

1.3.2 Els grups sincrònica i asincrònicament seccionables

En aquesta secció introduirem certes propietats de les seccions: les propietats del k-company de viatge de manera sincrònica i asincrònica, les quals utilitzarem per obtenir fites superiors de les funcions de Dehn.

Definició 1.3.10. Una aplicació $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és una *reparametrització de* $\mathbb{N}$ si, i només si, ρ no està fitada, $\rho(0) = 0$ i $\rho(n+1) \in \{\rho(n), \rho(n)+1\}$.

Definició 1.3.11. Siguin $k \geq 0$, G un grup, X un conjunt finit de generadors de G i $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció.

(a) Direm que σ satisfà la *propietat del k-company de viatge de manera sincrònica*, o que és *k-sincrònica*, si es satifà la propietat següent:

$$\forall g, h \in G,\ (d_{G,X}(g,h) = 1 \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{N}, d_{G,X}(\sigma_g(t), \sigma_h(t)) \leq k).$$

(b) Direm que σ satisfà la *propietat del k-company de viatge de manera asincrònica*, o que és *k-asincrònica*, si, per a tots $g, h \in G$ tals que $d_{G,X}(g,h) = 1$, existeixen reparametritzacions de $\mathbb{N}$, ρ, ρ' (que depenen de g i h), tals que, per a tot $t \in \mathbb{N}$,

$$d_{G,X}(\sigma_g(\rho(t)), \sigma_h(\rho'(t))) \leq k.$$

Quan obviem la constant k, simplement direm que σ és *sincrònica* o *asincrònica*, respectivament.

Definició 1.3.12. Sigui G un grup finitament generat. Direm que:

(a) G és *sincrònicament seccionable*, si existeix una secció sincrònica σ, respecte d'algun conjunt finit de generadors de G.

(b) G és *asincrònicament seccionable*, si existeix una secció asincrònica σ, respecte d'algun conjunt finit de generadors de G

En tots dos casos, quan coneguem la constant k respecte de la qual σ és k-sincrònica o k-asincrònica, direm que G és *k-sincrònicament seccionable* o *k-asincrònicament seccionable*, respectivament.

Aquesta definició té sentit a rel del resultat següent, el qual implica, en particular, que l'existència de seccions k-sincròniques no depèn dels generadors (recordem que si X i Y són conjunts finits de generadors de G, aleshores $(G, d_{G,X}) \sim_{QI} (G, d_{G,Y})$). Existeix un resultat anàleg pel cas asincrònic [10, Lema 7.4].

Proposició 1.3.13 ([50, Proposició 1.2]). *Siguin G i H dos grups tals que $G \sim_{QI} H$. Si G és sincrònicament seccionable, aleshores H també ho és.*

Proposició 1.3.14 ([50, Proposició 1.3]). *Siguin G, H grups finitament generats. Si G i H són sincrònicament seccionables, aleshores:*

(a) El producte directe $G \times H$ és sincrònicament seccionable.

(b) El producte lliure $G * H$ és sincrònicament seccionable.

De manera òbvia, si G és sincrònicament seccionable, aleshores G és asincrònicament seccionable (podem prendre $\rho = \rho' = \mathrm{id}$).

Definició 1.3.15. Siguin G un grup, X un conjunt de generadors de G i σ una secció de G respecte X. La *longitud de* σ és la funció $L_\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per

$$L_\sigma(n) = \max\{l(\sigma_g) \mid d_{G,X}(1, g) \leq n\}.$$

Quan σ sigui clara pel context, ometrem el subíndex de la longitud de σ.

L'ordre de la longitud d'una secció es manté pel canvi de generadors. En concret, si G és un grup, X i X' són conjunts finits de generadors de G i σ és una secció sincrònica respecte de X, aleshores existeix σ' una secció sincrònica respecte de X' tal que $L_\sigma \simeq L'_\sigma$. El mateix passa pel cas asincrònic [8].

El concepte de grup sincrònicament seccionable prové del concepte de *grup automàtic*. Un grup G és automàtic si admet una secció sincrònica σ que, a més, sigui regular. Els grups automàtics varen sorgir a finals de la dècada de 1980 amb el treball de J. Cannon i W. Thurston. En els anys posteriors, la Teoria dels Grups Automàtics es va desenvolupar. Epstein, juntament amb altres autors (entre els que figuren Cannon i Thurston), la va recollir en el que és *el* llibre de referència [21].

Els grups automàtics tenen funcions de Dehn d'ordre quadràtic [21, Teorema 2.3.12]. Una anàlisi de la demostració d'aquest resultat va mostrar que les tècniques emprades es podien usar per trobar fites superiors de les funcions de Dehn en altres casos. D'aquesta manera, el concepte de grup automàtic es generalitzà, paral·lelament, de dues maneres:

- D'una banda, relaxant les condicions sobre la regularitat de σ, fent pertanyar $\mathrm{Im}\,\sigma$ a altres classes de llenguatges. Així varen sorgir el grups CF-seccionables, Ind-seccionables, Recurs-seccionables, ..., corresponents, respectivament, a què $\mathrm{Im}\,\sigma$ sigui un llenguatge lliure de context, indexat, recursiu, etc. Els grups automàtics són, exactament, els grups Reg-seccionables, on Reg indica la classe dels llenguatges regulars.

- De l'altra, només tenint en compte l'aspecte geomètric de σ, és a dir, la propietat del k-company de viatge i prescindint de qualsevol condició sobre $\mathrm{Im}\,\sigma$. Els grups sincrònicament seccionables corresponen a aquesta via.

Els grups automàtics són grups sincrònicament seccionables, però la implicació inversa és falsa. De fet, existeixen grups sincrònicament seccionables amb funció de Dehn cúbica [13, Teorema B]. D'altra banda, existeixen grups Ind-seccionables que no són Reg-seccionables (o sigui, automàtics) [13, Teorema D]. Per tant, cadascuna d'aquestes generalitzacions dels grups automàtics dóna una classe de grups estrictament major que la classe de grups automàtics.

És un problema obert si existeixen grups CF-seccionables que no siguin Reg-seccionables [42].

Existeix el concepte anàleg dels grups automàtics pel cas en què σ satisfà la propietat del k-company de viatge de manera asincrònica. Aquests grups reben el nom de *grups asincrònicament automàtics*. De forma òbvia, els grups automàtics són asincrònicament automàtics, però la implicació inversa és falsa: els grups $BS(m,n)$, amb $m \neq n$, són asincrònicament automàtics però no automàtics [21, Exemple 7.4.1]. A més, tots els grups asincrònicament automàtics tenen funcions de Dehn d'ordre exponencial [21, Teorema 7.3.4][22]. Això contrasta amb que no es coneix si tots els grups asincrònicament seccionables són sincrònicament seccionables (encara que es creu que aquest fet és fals).

Per últim comentar que existeixen diversos problemes oberts en la Teoria de Grups Automàtics. El més famós, sense dubte, és el de veure si els grups biautomàtics són automàtics (la implicació contrària és vertadera): un grup G és *biautomàtic* quan admet una secció $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ regular tal que, per a tots $g, h \in G$ tals que $d_{G,X}(g,h) \leq 1$, per a tot $t \in \mathbb{N}$,

$$d_{G,X}(\sigma_g(t), \sigma_h(t)) \leq k,$$

per algun $k \geq 0$.

1.3.2.1 Exemples de grups seccionables

Tot seguit oferim alguns exemples de grups seccionables, sincrònica i asincrònicament, i de les longituds d'algunes seccions.

1. Els grups finits són sincrònicament seccionables. Considerem G un grup finit i X és un conjunt (finit) de generadors de G. Sigui k el diàmetre de $\Gamma_{G,X}$, és a dir,

   $$k = \max\{d_{G,X}(g,h) \mid g, h \in G\}.$$

   Si, per a qualsevol $g \in G$, elegim un camí γ_g qualsevol fins a g, aleshores tenim que $\sigma(g) = \gamma_g$ és un secció k-sincrònica. A més, elegim γ_g de manera que sigui geodèsic, llavors σ satisfà que $L(n) \leq \min\{n, k\}$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

2. En el grup lliure $F(X)$ de base $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, la secció σ que fa correspondre a cada classe $[w]$, la paraula reduïda $red(w)$ és 1-sincrònica. Si u, u'

[22] En la demostració que el grup $BS(m,n)$ no és automàtic es veu realment que la seva funció de Dehn és $\succ$ que la funció $x \mapsto x^2$.

són dues paraules reduïdes que representen elements $[u]$, $[u']$ a distància unitat, aleshores $u = u'x$ per qualque $x \in X \cup X^{-1}$ (excepte al final, en tot el recorregut $\sigma([u])$ és igual a $\sigma([u'])$).

3. En $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, la secció σ definida com $\sigma((i,j)) = a^i b^j$, per a tot $(i,j) \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, amb $a = (1,0)$ i $b = (0,1)$, és 2-sincrònica (Exemple 2, pàg. 55). Geomètricament aquest fet és evident, tal com es pot veure a la Figura 1.4.

   De forma algebraica, tenim que els elements a distància unitat de (i,j) són $(i+1,j)$, $(i-1,j)$, $(i,j+1)$ i $(i,j-1)$. Els camins $\sigma((i+1,j)) = a^{i+1}b^j$ i $\sigma((i,j)) = a^i b^j$ estan com a màxim a distància 2. De fet, els seus vèrtexos compleixen que

$$d_{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\{a,b\}}(\sigma_{((i,j))}(t), \sigma_{((i+1,j))}(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq i \\ 2 & \text{si } i+1 \leq t \leq i+j \\ 1 & \text{si } i+j < t. \end{cases}$$

   De forma simètrica es poden veure els altres casos.

   De fet, $\mathbb{Z}^r$ és 2-sincrònicament seccionable, per a tot $r \geq 2$ [8, Exemple 1.3.1.2].

4. El grup $BS(m,n)$ és asincrònicament seccionable [8, Exemple 1.3.1.3].

1.3.2.2 Les funcions de Dehn dels grups seccionables

En aquesta secció establirem les fites superiors de les funcions de Dehn dels grups sincrònica i asincrònicament seccionables.

A falta de referències on apareguin les demostracions dels resultats següents, oferim les seves demostracions estàndard.

Lema 1.3.16. *Siguin G un grup, $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G i w una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$. Aleshores, per a tots $t_0, t_1 \in \mathbb{N}$,*

$$d_{G,X}(\pi(w(t_0)), \pi(w(t_1))) \leq l(w)/2.$$

En particular,

$$d_{G,X}(\pi(w(t_0)), 1) \leq l(w)/2.$$

Demostració. Prenent $t_1 = 0$, tenim que la segona desigualtat és conseqüència directa de la primera.

Podem suposar que $t_0, t_1 \in \{0, \ldots, l(w)\}$, ja que $\pi(w(t)) = \pi(w(0)) = 1$ per a tot $t < 0$, i $\pi(w(t)) = \pi(w(l(w))) = 1$ per a tot $t > l(w)$. A més, per simetria, podem suposar que $t_0 \leq t_1$.

Sigui $L(t_0, t_1)$ la longitud del menor subcamí de $\gamma(w)$ que uneix $\pi(w(t_0))$ i $\pi(w(t_1))$. Aleshores

$$d_{G,X}(\pi(w(t_0)), \pi(w(t_1))) \leq L(t_0, t_1).$$

Si $t_1 - t_0 \leq l(w)/2$, aleshores $L(t_0, t_1) \leq l(w)/2$, ja que podem seguir el subcamí de $\gamma(w)$ determinat pels vèrtexos $w(t_0), w(t_0+1), \ldots, w(t_1)$. D'altra banda, si $t_1 - t_0 > l(w)/2$, llavors el cardinal

$$|\{t_1, \ldots, l(w)\} \cup \{0, \ldots, t_0\}| \leq l(w)/2$$

(aquest conjunt és el complement del conjunt $\{t_0, \ldots, t_1\}$ que té cardinal $> l(w)/2$ per hipòtesi). Per tant, el subcamí de $\gamma(w)$ determinat pels vèrtexos

$$\pi(w(t_1)), \pi(w(t_1+1)), \ldots, \pi(w(l(w))), \pi(w(1)), \ldots, \pi(w(t_0))$$

té longitud menor o igual que $l(w)/2$. Llavors $L(t_0, t_1) \leq l(w)/2$.

□

Proposició 1.3.17. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G i $k \geq 0$. Aleshores:*

(a) Si G admet una secció k-sincrònica $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$, aleshores existeix una presentació finita $\mathcal{P}$ de G de la forma $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ amb $|R| \leq (2|X|)^{2k+2}$ i tal que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq n L_\sigma(\lfloor n/2 \rfloor).$$

(b) Si G admet una secció k-asincrònica $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$, aleshores existeix una presentació finita $\mathcal{P}$ de G de la forma $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ amb $|R| \leq (2|X|)^{2k+2}$ i tal que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq 2n L_\sigma(\lfloor n/2 \rfloor).$$

Demostració.

(a) Demostrem aquest cas amb detall. Com que X és un conjunt de generadors, tenim el morfisme $\pi\colon (X \cup X^{-1})^* \to G$, el qual és exhaustiu. Considerem el conjunt de relacions

$$R = \{w = 1 \mid w \in (X \cup X^{-1})^*, \pi(w) = 1, l(w) \leq 2k+2\}.$$

Per la Proposició 1.2.28, podem suposar que R és simètric. D'altra banda, $|R| \leq (2|X|)^{2k+2}$. Considerem la presentació finita $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$.

Volem veure que $\mathcal{P}$ és una presentació de G. Per això basta veure que el conjunt

$$N = \{w \in (X \cup X^{-1})^* \mid \pi(w) = 1\}$$

coincideix amb les paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$: X és un conjunt finit de generadors de G, aleshores existeix $\mathcal{Q} = \langle X \mid S \rangle$, amb S possiblement infinit, tal que $G(\mathcal{Q}) \simeq G$ i el conjunt de les paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{Q}$ és igual a N. Per tant, $G(\mathcal{P}) = F(X)/\langle\langle R_* \rangle\rangle \cong F(X)/\langle\langle S_* \rangle\rangle = G(\mathcal{Q})$ si, i només si, $\langle\langle R_* \rangle\rangle = \langle\langle S_* \rangle\rangle$, o sigui si les paraules nul-homotòpiques coincideixen.

De forma evident, el conjunt de paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$ estan a N. Per veure la implicació contrària, pel Lema 1.2.31, per a qualsevol paraula $w \in N$, basta trobar un diagrama de van Kampen per a w sobre $\mathcal{P}$.

Sigui w una paraula sobre $X \cup X^{-1}$ tal que $\pi(w) = 1$. Construirem un diagrama de van Kampen $\mathcal{D}_w$ per a w respecte de $\mathcal{P}$ (que, a més, tendrà els seus vèrtexos etiquetats). Considerem el polígon regular de $l(w)$ costats tal que les seves arestes són dirigides i etiquetades amb elements de $X \cup X^{-1}$ i els seus vèrtexs estan etiquetats amb elements del conjunt $\{\pi(w(i)) \mid i = 0, \ldots, l(w)\} \cup \{\star\} \subseteq G \cup \{\star\}$. El procés d'etiquetatge d'aquest polígon és el següent:

- L'elecció d'un vèrtex qualsevol, el qual etiquetarem, a la vegada, amb $\star$ i $\pi(w(0)) = 1$ i que anomenarem *punt base* del polígon.

- En el sentit contrari a les agulles del rellotge, l'etiquetatge de l'i-èssim vèrtex consecutiu al punt base per $\pi(w(i))$, amb $i \in \{1, \ldots, l(w)\}$.

- L'etiquetatge, de forma consecutiva i en sentit contrari a les agulles del rellotge, de l'aresta i-èssima del polígon per la lletra i-èssima de w. Així, si $x \in X \cup X^{-1}$ és l'etiqueta de l'aresta que uneix els vèrtexos etiquetats amb g i h, aleshores $gx = h$. A més, el sentit de l'aresta que uneix el vèrtex i-èssim amb el vèrtex $(i+1)$-èssim serà cap a aquest darrer.

D'aquesta manera, obtenim un polígon tal que les etiquetes de les seves arestes llegides, en el sentit contrari a les agulles del rellotge, des del punt base formen la paraula w. Aquest polígon està representat a la Figura 1.30 per a una paraula $w = x_1 \ldots x_r$. Notem que prenem aquest polígon regular, simplement, per comoditat (per la unicitat dels polígons regulars d'un nombre determinat de costats), però aquesta construcció es pot fer, d'igual manera, per a un polígon no regular determinat.

Per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w)\}$, indiquem amb σ_i, la imatge de $\pi(w(i))$ per la secció σ (és a dir, $\sigma_{\pi(w(i))}$), i considerem el segment que uneix el punt base $\star$ fins al vèrtex etiquetat amb $\pi(w(i))$ i dividim-lo en $l(\sigma_i)$ punts etitquetats amb $\sigma_i(j) \in G$, per qualque $j \in \{0, \ldots, l(\sigma_i)\}$, de manera que:

- El punts etiquetats amb $\sigma_i(0)$ i $\sigma_i(l(\sigma_i))$ coincideixen amb $\star$ i $\pi(w(i))$, respectivament.

- El segment que uneix $\sigma_i(j)$ i $\sigma_i(j+1)$ està orientat cap a aquest darrer punt. A més, aquest segment està etiquetat amb la lletra $(j+1)$-èssima de σ_i o, amb altres paraules, amb l'element $x \in X \cup X^{-1}$ tal que $\sigma_i(j)x = \sigma_i(j+1)$.

- Els segments determinats per $\sigma_i(j)$ i per $\sigma_{i+1}(j)$ no es toquen enlloc. Això passa, en particular, si aquests segments són rectes.

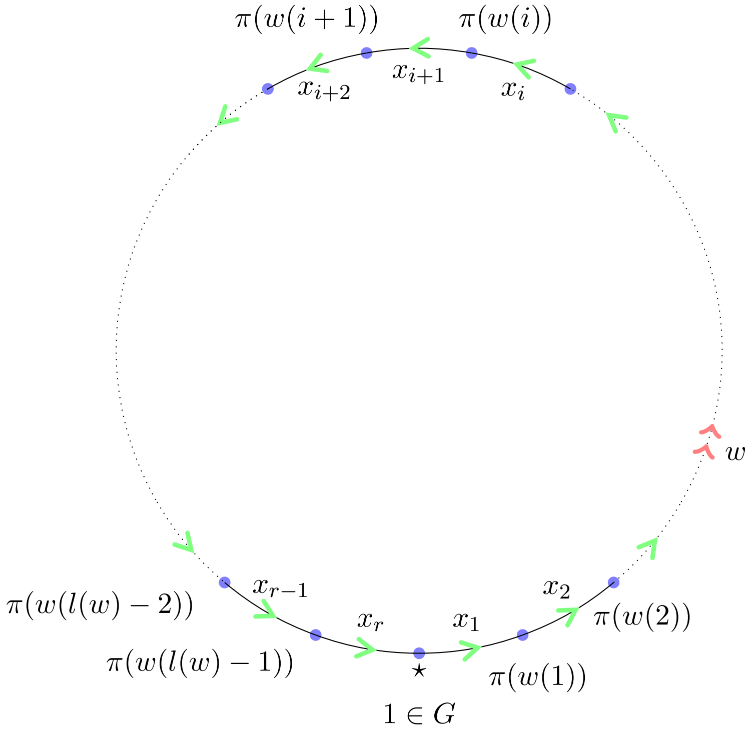


Figura 1.30 El polígon regular amb *frontera* $w = x_1 \ldots x_r$.

Per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$, $\pi(w(i))$ i $\pi(w(i+1))$ estan a distància unitat dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$. Com que σ és k-sincrònica, aleshores

$$d_{G,X}(\sigma_i(t), \sigma_{i+1}(t)) \leq k,$$

per a tot $t \in \mathbb{N}$. Per tant, existeix un camí des de $\sigma_i(j)$ fins a $\sigma_{i+1}(j)$ de longitud menor o igual que k, per a tots

$$i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}, j \in \{0, \ldots, \max\{l(\sigma_i), l(\sigma_{i+1})\}\}$$

(notem que, per a tot $j > l(\sigma_i)$, $\sigma_i(j) = \sigma_i(l(\sigma_i))$). Sigui $w_{i,j}$ la paraula sobre $X \cup X^{-1}$ corresponent a aquest camí (podem prendre $w_{i,j}$ la paraula que representa l'element $(\sigma_i(j))^{-1}\sigma_{i+1}(j)$). En el polígon regular que hem construït, prenem el segment (que pot no ser recte) que uneix $\sigma_i(j)$ i $\sigma_{i+1}(j)$ i dividim-lo amb $l(w_{i,j}) \leq k$ vèrtexos de manera que el primer i el darrer coincideixin amb $\sigma_i(j)$ i $\sigma_{i+1}(j)$. A més, etiquetem successivament els segments que determina aquesta divisió amb les lletres de $w_{i,j}$ i en sentit contrari a les agulles del rellotge. Anomenem $\mathcal{D}_w$ a la construcció resultant, la qual està representada a la Figura 1.31.

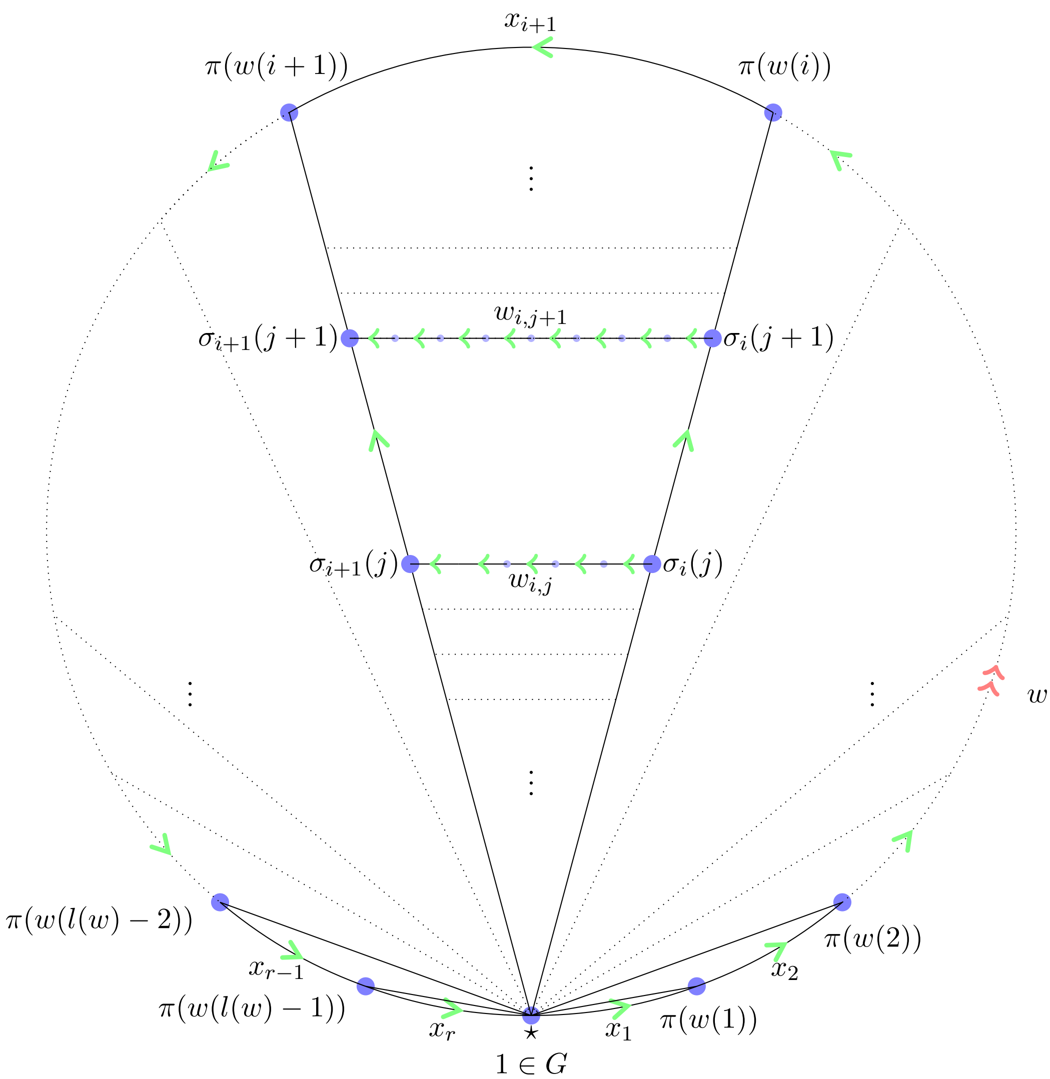


Figura 1.31 El complex $\mathcal{D}_w$ per a $w = x_1 \dots x_r$, construït a partir de σ, amb el detall en una cara.

Per construcció, $\mathcal{D}_w$ és un diagrama de van Kampen per a w respecte de $\mathcal{P}$:

- Les etiquetes llegides en sentit contrari a les agulles del rellotge des de $\star$ formen la paraula w.
- Les etiquetes de les cares llegides de forma consecutiva, en qualsevol ordre i en qualsevol sentit, formen una paraula de R (R és simètrica), és a dir, una paraula nul-homotòpica de longitud menor o igual que $2k+2$. Podem prendre com a aquesta paraula nul-homotòpica la paraula formada per la concatenació de $w_{i,j}$, la lletra $(j+1)$-èssima de σ_i, la inversa de $w_{i,j+1}$ i

la inversa de la lletra $(j+1)$-èssima de σ_{i+1}, per a tot $i \in \{0, \dots, l(w)\}$ i $j \in \{0, \dots, \max\{l(\sigma_i), l(\sigma_{i+1})\}\}$.

- $\mathcal{D}_w$ és planar, ja que els segments construïts no es creuen entre si.

D'altra banda, el nombre de cares d'aquest diagrama és una fita superior de area(w) (l'àrea de w és el nombre de cares mínim sobre tots els diagrames de van Kampen per a w). El nombre de cares de $\mathcal{D}_w$ entre σ_i i σ_{i+1} és igual al $\max\{l(\sigma_i), l(\sigma_{i+1})\}$. Pel Lema 1.3.16, per a tot $i \in \{0, \dots, l(w)\}$,

$$d_{G,X}(\sigma_i(l(\sigma_i)), 1) \leq l(w)/2$$

i, com que la distància és discreta, llavors tenim, realment, que

$$d_{G,X}(\sigma_i(l(\sigma_i)), 1) \leq \lfloor l(w)/2 \rfloor.$$

Per tant,

$$l(\sigma_i) \leq L_\sigma(\lfloor l(w)/2 \rfloor),$$

per a tot $i \in \{0, \dots, l(w)\}$. Per tant, el nombre de cares de $\mathcal{D}_w$ entre σ_i i σ_{i+1} està fitat per $L_\sigma(\lfloor l(w)/2 \rfloor)$, amb $i \in \{0, \dots, l(w)\}$. Com que existeixen $l(w)+1$ segments des de $\star$ en $\mathcal{D}_w$, llavors

$$\text{area}_{c,\mathcal{P}}(\mathcal{D}_w) \leq l(w) \cdot L_\sigma(\lfloor l(w)/2 \rfloor),$$

per la qual cosa

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{P}}(n) &= \max\{\text{area}_{c,\mathcal{P}}(\mathcal{D}_w) \mid w \text{ nul-homotòpica per } \mathcal{P}, l(w) \leq n\} \\ &= nL_\sigma(\lfloor n/2 \rfloor). \end{aligned}$$

(b) El cas asincrònic és anàleg al cas sincrònic. L'única diferència és que, per a tot $i \in \{0, \dots, l(w)\}$, si ρ i ρ' són les reparametritzacions de $\mathbb{N}$ respecte de les quals σ és k-asincrònica en $\pi(w(i))$ i $\pi(w(i+1))$ (recordem que les reparametritzacions depenen de cada parell d'elements), llavors etiquetarem els vèrtexos del segment que uneix $\star$ i $\pi(w(i))$ amb les etiquetes

$$\{\sigma_i(\rho(j)) \mid j = 0, \dots, j_0\},$$

on j_0 és tal que $\sigma_i(\rho(j_0)) = \pi(w(i))$, i els vèrtexos del segment que uneix $\star$ i $\pi(w(i+1))$ amb les etiquetes

$$\{\sigma_{i+1}(\rho'(j)) \mid j = 0, \dots, j_1\},$$

on j_1 és tal que $\sigma_{i+1}(\rho'(j_0)) = \pi(w(i+1))$, de manera que si $\rho(m) = \rho(m+1)$ i $\rho'(m) = \rho'(m+1)$ per algun $m \in \mathbb{N}$, aleshores només etiquetarem els vèrtexos corresponents una sola vegada, amb $\sigma_i(\rho(m))$ i $\sigma_{i+1}(\rho'(m))$. A més, unirem $\sigma_i(\rho(j))$ amb $\sigma_{i+1}(\rho'(j))$ mitjançant una paraula de longitud $\leq k$ (podem fer això ja que σ és k-asincrònica). Notem que aquest procés d'etiquetatge depèn de cada parell $(\pi(w(i)), \pi(w(i+1)))$, amb $i \in \{0, \dots, l(w)\}$ i, per tant, tenim

$l(w)$ etiquetats diferents. Així obtindrem un diagrama de van Kampen $\mathcal{D}_w$ per a w sobre $\mathcal{P}$.

Per a cada $i \in \{0, \dots, l(w)\}$, el nombre de cares de $\mathcal{D}_w$ entre σ_i i σ_{i+1} com a màxim $l(\sigma_i)+l(\sigma_{i+1}) \leq 2L_\sigma(\lfloor l(w)/2 \rfloor)$. Aleshores, aplicant aquesta fita, tenim que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq 2nL_\sigma(\lfloor n/2 \rfloor).$$

□

Notem que, en aquesta proposició, la constant k per la qual la secció σ és k-sincrònica o k-asincrònica només apareix, de forma explícita, en el cardinal de la presentació.

Corol·lari 1.3.18 ([8, Teorema 1.3.4; 12, Proposició 7.1.2]). *Siguin G un grup i X un conjunt de generadors de G. Si G admet una secció $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ asincrònica, aleshores*

$$\delta_G(n) \preceq nL_\sigma(n).$$

Demostració. Pel resultat anterior i per ser L_σ creixent, tenim que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq 2nL_\sigma(\lfloor n/2 \rfloor) \leq 2nL_\sigma(n),$$

per tant, $\delta_G(n) \preceq nL_\sigma(n)$. □

Es poden obtenir fites superiors independents de la longitud de la secció:

Proposició 1.3.19 ([12, Proposició 7.1.2]). *Sigui G un grup. Si G és asincrònicament seccionable, aleshores*

$$\delta_G(n) \preceq 2^n.$$

1.3.3 Una generalització dels grups seccionables

Des del punt de vista geomètric, a part de la longitud d'una secció, podem ocupar-nos de la seva altra *dimensió*: la seva amplada.

Notació 1.3.20. Indicarem per $\mathcal{R}(\mathbb{N})$ el conjunt de reparametritzacions de $\mathbb{N}$.

Notació 1.3.21. Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció de G respecte de X i $g, h \in G$. Indicarem per $D_\sigma(g,h)$ el nombre

$$D_\sigma(g,h) = \min_{\rho,\rho' \in \mathcal{R}(\mathbb{N})} \{\max\{d(\sigma_g(\rho(t)), \sigma_h(\rho'(t))) \mid t \in \mathbb{N}\}\}.$$

Definició 1.3.22. Siguin G un grup, X un conjunt de generadors de G i σ una secció de G respecte de X.

(a) L'*amplada sincrònica de* σ, o simplement *amplada*, és la funció $\varphi_\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per

$$\varphi_\sigma(n) = \max\{d(\sigma_g(t), \sigma_h(t)) \mid t \in \mathbb{N}, d(1, g), d(1, h) \leq n, d(g, h) = 1\},$$

per a tot $n \geq 1$ i $\varphi(0) = 0$.

(b) L'*amplada asincrònica de* σ és la funció $\Phi_\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per

$$\Phi_\sigma(n) = \max\{D_\sigma(g, h) \mid d(1, g), d(1, h) \leq n, d(g, h) = 1\},$$

per a tot $n \geq 1$ i $\Phi(0) = 0$.

Quan σ sigui clara pel context, la ometrem en els subíndexos de φ_σ i Φ_σ.

Per a tota secció σ, estendrem les amplades φ_σ, Φ_σ i la longitud L_σ als nombres reals de la forma:

$$\varphi_\sigma(x) = \begin{cases} \varphi_\sigma(0) & \text{si } x < 0 \\ \varphi_\sigma(\lfloor x \rfloor) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_\sigma(x) = \begin{cases} \Phi_\sigma(0) & \text{si } x < 0 \\ \Phi_\sigma(\lfloor x \rfloor) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$L_\sigma(x) = \begin{cases} L_\sigma(0) & \text{si } x < 0 \\ L_\sigma(\lfloor x \rfloor) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

D'altra banda, hem de notar que $\Phi_\sigma \leq \varphi_\sigma$ (podem prendre $\rho = \rho' = \mathrm{id}$).

De forma clara, tenim que una secció σ és k-sincrònica si, i només si, la seva amplada φ_σ està fitada, superiorment, per k, i σ és k-asincrònica si, i només si, la seva amplada asincrònica Φ_σ està fitada, superiorment, per k.

Per tant, si un grup G admet una secció σ tal que $\varphi_\sigma(n) \leq k$ o bé $\Phi_\sigma(n) \leq k$, per alguna constant k, aleshores G té el problema de la paraula resoluble (en aquest cas, G és sincrònica i asincrònicament seccionable). De forma natural, doncs, sorgeix la pregunta sobre si passa el mateix quan G admet seccions amb amplades (sincròniques o asincròniques) no fitades superiorment per una constant.

Bridson [10] i Riley [45] varen respondre a aquesta pregunta, demostrant que si G admet una secció amb amplada (sincrònica i asincrònica) no *molt gran*, aleshores G té el problema de la paraula resoluble (Bridson s'ocupà del cas general, mentre que Riley estudià el cas en què aquesta secció és geodèsica). Concretament, varen obtenir, entre d'altres, els resultats següents:

Teorema 1.3.23 ([10, Proposició 1.1, Proposició 3.1]). *Sigui G un grup finitament generat qualsevol.*

(a) G admet una secció σ tal que $L_\sigma(n) = n$ i $\varphi_\sigma(n) \leq n$ i $\Phi_\sigma(n) \leq n$.

(b) Si G admet una secció σ tal que $\varphi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran, aleshores G és finitament presentat. A més, si X és un conjunt finit de generadors de G tal que $X = X^{-1}$, i $\pi \colon X^* \to G$ és el morfisme exhaustiu natural, aleshores

$$\langle X \mid w = 1, \text{ on } w \in X^*, \pi(w) = 1, l(w) \leq 2n_0 \rangle$$

és una presentació finita de G, on $n_0 \in \mathbb{N}$ és tal que $\varphi_\sigma(n) < n - 1$, per a tot $n \geq n_0$.

(c) *Si G admet una secció σ tal que $\Phi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran, aleshores G és finitament presentat.*

Teorema 1.3.24 ([10, Teorema 4.3]). *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G tal que $X^{-1} = X$ i $\sigma\colon G \to X^*$ una secció. Si $\varphi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran, aleshores existeix $k > 0$ tal que*

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq e^{kn^3},$$

per a alguna presentació finita $\mathcal{P}$ de G.

Teorema 1.3.25 ([10, Teorema 6.1]). *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G tal que $X^{-1} = X$ i $\sigma\colon G \to X^*$ una secció.*

(a) *Si $\Phi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran, aleshores existeix $k > 0$ tal que*

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq e^{kn^3},$$

per a alguna presentació finita $\mathcal{P}$ de G.

(b) *Si Φ_σ és sublineal (és a dir, $\Phi_\sigma(n) \in o(n)$), aleshores existeix una constant $k > 0$ tal que*

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq e^{kn\Phi(n)},$$

per a alguna presentació finita $\mathcal{P}$ de G.

En particular, el darrer apartat d'aquest teorema implica que σ és k-asincrònica, aleshores existeixen constants $C_1, C_2 > 0$ tal que $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq e^{C_1 n} \preceq 2^{C_2 n}$, el que concorda amb la Proposició 1.3.19.

Els teoremes 1.3.24 i 1.3.25, es poden resumir en el resultat següent:

Proposició 1.3.26. *Sigui G un grup finitament generat tal que admet una secció σ, respecte d'algun conjunt finit de generadors de G, tal que $\Phi_\sigma(n) < n - 1$ o $\varphi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran. Aleshores, G és finitament presentat i existeix $k > 0$ tal que la seva funció de Dehn satisfà*

$$\delta_G(n) \preceq e^{kn^3}.$$

Demostració. Existeix una presentació $\mathcal{P}_0$ de G tal que existeix $k > 0$ tal que

$$\delta_{\mathcal{P}_0}(n) \leq e^{kn^3}.$$

Si $\mathcal{P}$ és una altra presentació de G, tenim que $\delta_{\mathcal{P}} \simeq \delta_{\mathcal{P}_0}$. Fàcilment es pot veure que per a qualssevol funcions $f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g \leq f$, $h \simeq g$, aleshores $h \preceq f$. Per tant,

$$\delta_P \preceq e^{kn^3},$$

i com que δ_G és la classe d'equivalència de les funcions de Dehn de presentacions finites de G mòdul $\simeq$, aleshores, tenim que

$$\delta_G \preceq e^{kn^3}.$$

□

Definició 1.3.27. Siguin G un grup i X un conjunt finit de generadors de G. Una secció $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ és *geodèsica* si, i només si, per a tot $g \in G$, el camí σ_g és geodèsic dins $\Gamma_{G,X}$.

Teorema 1.3.28 ([45, Teorema 2]). *Sigui G un grup finitament generat tal que admet una secció* geodèsica *σ tal que $\Phi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran, aleshores G és finitament presentat i la seva funció de Dehn és tal que*

$$\delta_G(n) \preceq n!.$$

Pel que fa a la construcció de grups, tenim que el producte directe $G \times H$ i el producte lliure $G * H$ de grups G, H, admeten seccions que preserven l'ordre de l'amplada, l'amplada asincrònica i la longitud de seccions de G i H.

Teorema 1.3.29 ([10, Lema 7.3]). *Siguin G_1 i G_2 grups, X_1 i X_2 conjunts finits de generadors de G_1 i G_2 respectivament, tals que $X_1 = X_1^{-1}$, $X_2 = X_2^{-1}$ i, per a tot $i \in \{1, 2\}$, $\sigma^i\colon G_i \to X_i^*$ una secció amb amplada φ_i, amplada asincrònica Φ_i i longitud L_i. Aleshores $G_1 \times G_2$ i $G_1 * G_2$ admeten seccions σ i κ, respectivament, tals que*

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma(n) &= \varphi_\kappa(n) = \max\{\varphi_1(n), \varphi_2(n)\},\\
\Phi_\sigma(n) &= \Phi_\kappa(n) = \max\{\Phi_1(n), \Phi_2(n)\},\\
L_\sigma(n) &= L_\kappa(n) = 2\max\{L_1(n), L_2(n)\}.
\end{aligned}$$

Els grups quasi-isomètrics admeten seccions amb amplades (sincròniques i asincròniques) i longituds $\simeq$-equivalents.

Teorema 1.3.30 ([10, Lema 7.4]). *Siguin G i H grups, X i Y un conjunt de generadors de G i H, respectivament, tals que $X^{-1} = X$ i $Y^{-1} = Y$. Si $G \sim_{QI} H$, aleshores, per a tota secció $\sigma\colon G \to X^*$, existeix $\kappa\colon H \to Y$ tal que $\varphi_\sigma \simeq \varphi_\kappa$, $\Phi_\sigma \simeq \Phi_\kappa$ i $L_\sigma \simeq L_\kappa$.*

En aquests darrers resultats, el cas particular de què les amplades o les amplades asincròniques estiguin fitades superiorment per una constant correspon a les proposicions 1.3.14 i 1.3.13.

2 Resultats principals

En aquest capítol es detallarà la meva contribució al camp de la Teoria Geomètrica de Grups i, en concret, al problema de la paraula. De forma general, aquesta contribució consisteix en la millora de l'ordre de la funció de Dehn per als grups que admetin una secció geodèsica σ tal que $\varphi_\sigma(n) < n-1$, per a n suficientment gran, i en diverses generalitzacions de l'amplada d'una secció.

2.1 Grups amb seccions geodèsiques d'amplada no molt gran

Si un grup G admet una secció geodèsica σ tal que $\Phi_\sigma(n) < n-1$ per a n suficientment gran, aleshores G té el problema de la paraula resoluble i, a més, la seva funció de Dehn δ_G és tal que $\delta_G(n) \preceq n!$ (Teorema 1.3.28). En aquesta secció, millorarem aquesta fita superior de la funció de Dehn per als grups que admetin una secció geodèsica σ tal que $\varphi_\sigma(n) < n-1$, per a n suficientment gran.

En primer lloc, demostrarem una sèrie de lemes que ens conduiran a veure que, per a qualsevol presentació $\mathcal{P}$, la funció $\text{area}_\mathcal{P}$ és subadditiva per a certa operació entre paraules nul-homotòpiques, el que implicarà una desigualtat de la funció de Dehn (Proposició 2.1.6).

Lema 2.1.1. *Siguin G un grup, $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ una presentació finita de G i $u, v, w \in (X \cup X^{-1})^*$ paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$. Si $w = uv$ dins el grup lliure $F(X)$,[23] aleshores*

$$area_\mathcal{P}(w) \leq area_\mathcal{P}(u) + area_\mathcal{P}(v).$$

Demostració. Si $\text{area}_\mathcal{P}(u) = N$ i $\text{area}_\mathcal{P}(v) = M$, aleshores

$$u = \prod_{i=1}^{N} x_i^{-1} r_i x_i,$$
$$v = \prod_{j=1}^{M} y_j^{-1} s_j y_j,$$

per a alguns $x_i, y_j \in F(X)$, $r_i, s_j \in R_*$, on aquestes igualtats són dins el grup lliure $F(X)$. Com que $w = uv$ també dins el grup lliure, aleshores

[23] Recordem que dues paraules w_1, w_2 sobre $(X \cup X^{-1})^*$ són iguals dins el grup lliure si $[w_1]_\sim = [w_2]_\sim \in F(X)$.

$$
\begin{aligned}
w = uv &= (\prod_{i=1}^{N} x_i^{-1} r_i x_i) \cdot (\prod_{j=1}^{M} y_j^{-1} s_j y_j) \\
&= (x_1^{-1} r_1 x_1) \cdots (x_N^{-1} r_N x_N) \cdot (y_1^{-1} s_1 y_1) \cdots (y_M^{-1} s_M y_M) \\
&= \prod_{k=1}^{M+N} z_k^{-1} t_k z_k
\end{aligned}
$$

on

$$
z_k = \begin{cases} x_k & 1 \leq k \leq N \\ y_{k-N} & N+1 \leq k \leq N+M, \end{cases} \qquad t_k = \begin{cases} r_k & 1 \leq k \leq N \\ s_{k-N} & N+1 \leq k \leq N+M. \end{cases}
$$

Llavors, per definició, $\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq N + M = \text{area}_{\mathcal{P}}(u) + \text{area}_{\mathcal{P}}(v)$. □

Lema 2.1.2. *Siguin G un grup i $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G. Si $w \in (X \cup X^{-1})^*$ és una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ i $x \in X \cup X^{-1}$, llavors*

$$
\mathit{area}_{\mathcal{P}}(x^{-1}wx) = \mathit{area}_{\mathcal{P}}(w).
$$

Demostració. Suposem que $\text{area}_{\mathcal{P}}(w) = N$. Aleshores existeixen $x_i \in F(X)$ i $r_i \in R_*$, amb $i \in \{1, \ldots, N\}$, tals que

$$
w = \prod_{i=1}^{N} x_i^{-1} r_i x_i,
$$

on aquesta igualtat és dins el grup lliure $F(X)$. Aleshores, dins el grup lliure, tenim que

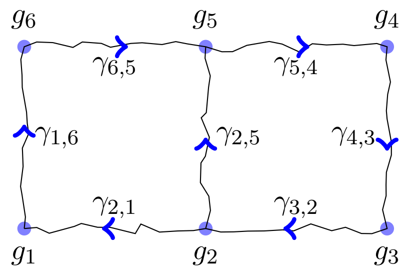
$$
\begin{aligned}
x^{-1}wx &= x^{-1}(\prod_{i=1}^{N} x_i^{-1} r_i x_i) x \\
&= x^{-1}(x_1^{-1} r_1 x_1) \cdots (x_N^{-1} r_N x_N) x \\
&= (x^{-1} x_1^{-1} r_1 x_1 x)(x^{-1} x_2^{-1} r_2 x_2 x) \cdots (x^{-1} x_N^{-1} r_N x_N x) \\
&= \prod_{i=1}^{N} x^{-1} x_i^{-1} r_i x_i x \\
&= \prod_{i=1}^{N} (x_i x)^{-1} r_i (x_i x),
\end{aligned}
$$

per la qual cosa tenim que $\text{area}_{\mathcal{P}}(x^{-1}wx) \leq N = \text{area}_{\mathcal{P}}(w)$. Per tant,

$$
\text{area}_{\mathcal{P}}(w) = \text{area}_{\mathcal{P}}(x(x^{-1}wx)x^{-1}) \leq \text{area}_{\mathcal{P}}(x^{-1}wx) \leq \text{area}_{\mathcal{P}}(w),
$$

el que implica que $\text{area}_{\mathcal{P}}(x^{-1}wx) = \text{area}_{\mathcal{P}}(w)$. □

Lema 2.1.3. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G i $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G, $g_i \in G$, amb $i \in \{1, \ldots, 6\}$, i $\gamma_{2,1}$, $\gamma_{3,2}$, $\gamma_{4,3}$, $\gamma_{5,4}$, $\gamma_{6,5}$, $\gamma_{1,6}$ i $\gamma_{2,5}$ els camins dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ que uneixen, en aquest ordre, els parells de punts (g_2, g_1), (g_3, g_2), (g_4, g_3), (g_5, g_4), (g_6, g_5), (g_1, g_6) i (g_2, g_5), respectivament (tal com es representa a la figura).*



Per a cadascun d'aquest camins $\gamma_{i,j}$, sigui $w_{i,j}$ la paraula corresponent ($\gamma(w_{i,j}) = \gamma_{i,j}$ per a cada $(i,j) \in \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5), (1,6), (2,5)\}$). Siguin, finalment, u, v i $w \in (X \cup X^{-1})^*$ les paraules definides com:

$$u = w_{1,6} \cdot w_{6,5} \cdot w_{2,5}^{-1} \cdot w_{2,1},$$

$$v = w_{5,4} \cdot w_{4,3} \cdot w_{3,2} \cdot w_{2,5},$$

$$w = w_{1,6} \cdot w_{6,5} \cdot w_{5,4} \cdot w_{4,3} \cdot w_{3,2} \cdot w_{2,1}.$$

Aleshores u, v, w són nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$ i a més,

$$\mathit{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \mathit{area}_{\mathcal{P}}(u) + \mathit{area}_{\mathcal{P}}(v).$$

Demostració. De forma òbvia tenim que u, v i w són nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$, ja el seus camins dins el graf de Cayley formen cicles (per exemple el camí corresponent a u forma un cicle amb punt inicial i punt final g_1, perquè és composició de camins de g_1 a g_6, de g_6 a g_5, de g_5 a g_2 i, finalment, de g_2 a g_1).

D'altra banda, dins el grup lliure $F(X)$ tenim que

$$\begin{aligned} w &= \left[w_{1,6} \cdot w_{6,5} \cdot w_{2,5}^{-1} \cdot w_{2,1}\right] \cdot w_{2,1}^{-1} \cdot w_{2,5} \cdot \left[w_{5,4} \cdot w_{4,3} \cdot w_{3,2} \cdot w_{2,5}\right] \cdot w_{2,5}^{-1} \cdot w_{2,1} \\ &= u \cdot w_{2,1}^{-1} \cdot w_{2,5} \cdot v \cdot (w_{2,1}^{-1} \cdot w_{2,5})^{-1}. \end{aligned}$$

Per tant, dins $F(X)$, $w = ux^{-1}vx$ amb $x \in F(X)$. Llavors, aplicant el lemes 2.1.1 i 2.1.2, tenim que

$$\mathrm{area}_{\mathcal{P}}(w) = \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(ux^{-1}vx) \leq \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(u) + \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(x^{-1}vx) \leq \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(u) + \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(v).$$

$\square$

Definició 2.1.4. Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G i $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G. Dues paraules $w_1, w_2 \in (X \cup X^{-1})^*$

nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$ són *congruents* si, i només si, dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ existeixen punts $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 \in G$ i camins $\gamma_{2,1}, \gamma_{3,2}, \gamma_{4,3}, \gamma_{5,4}, \gamma_{6,5}, \gamma_{1,6}, \gamma_{2,5}$ que uneixen els parells de punts (g_2, g_1), (g_3, g_2), (g_4, g_3), (g_5, g_4), (g_6, g_5), (g_1, g_6) i (g_2, g_5), respectivament, tals que les seves paraules corresponents, que indicarem amb $w_{i,j}$, on $(i, j) \in \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (1, 6), (2, 5)\}$, satisfan

$$w_1 = w_{1,6} \cdot w_{6,5} \cdot w_{2,5}^{-1} \cdot w_{2,1},$$

$$w_2 = w_{5,4} \cdot w_{4,3} \cdot w_{3,2} \cdot w_{2,5}.$$

En aquest cas, indicarem amb $w_1 \sharp w_2$ a la paraula definida com

$$w_1 \sharp w_2 = w_{1,6} \cdot w_{6,5} \cdot w_{5,4} \cdot w_{4,3} \cdot w_{3,2} \cdot w_{2,1}.$$

Del lema previ i d'aquesta definició tenim que si u, v són paraules congruents, aleshores $u \sharp v$ és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ i $\mathrm{area}_{\mathcal{P}}(u \sharp v) \leq \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(u) + \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(v)$, o sigui, tenim que la funció $\mathrm{area}_{\mathcal{P}} \colon \{w \in (X \cup X^{-1})^* \mid \text{nul-homotòpica per } \mathcal{P}\} \to \mathbb{N}$ és subadditiva per l'operació $\sharp$ aplicada a parells congruents.

Lema 2.1.5. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G, $\sigma \colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció geodèsica de G respecte de X. Aleshores, per a tota paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$ nul-homotòpica per $\mathcal{P}$, existeixen paraules $u_1, \ldots, u_{l(w)^2/2}$ nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$ de longitud menor o igual que $2\varphi_\sigma(l(w)/2) + 2$ tals que*

$$\mathit{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \sum_{k=1}^{l(w)^2/2} \mathit{area}_{\mathcal{P}}(u_k).$$

Demostració. Sigui w una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$. Si $w = \varepsilon$, aleshores el resultat és obvi, ja que $\mathrm{area}_{\mathcal{P}}(\varepsilon) = 0$ i la suma de la dreta és zero (el conjunt d'índexos és buit). Per tant, podem suposar que $l(w) \geq 1$. Per tant, $w = x_1 \ldots x_r$, amb $r \geq 1$, $x_i \in X \cup X^{-1}$ i $i \in \{0, \ldots, r\}$.

Per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w) - 1\}$, considerem la paraula v_i definida per la concatenació següent:

$$v_i = \sigma_{\pi(w(i))} \cdot x_{i+1} \cdot \sigma_{\pi(w(i+1))}^{-1}.$$

A la Figura 2.1 es mostra el seu corresponent camí $\gamma(v_i)$ dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$. Per a cada $i \in \{0, \ldots, l(w) - 1\}$, v_i és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$, ja que forma un cicle dins el graf de Cayley ($\gamma(v_i)$ passa per 1, $\pi(w(i))$ i $\pi(w(i + 1))$ i torna a 1). I, a més, per construcció

$$w = v_0 \sharp (v_1 \sharp (\ldots, \sharp (v_{l(w)-1}) \ldots).$$

Per tant, per aplicació reiterada del Lema 2.1.3,

$$\mathrm{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \sum_{i=0}^{l(w)-1} \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(v_i). \tag{2.1}$$

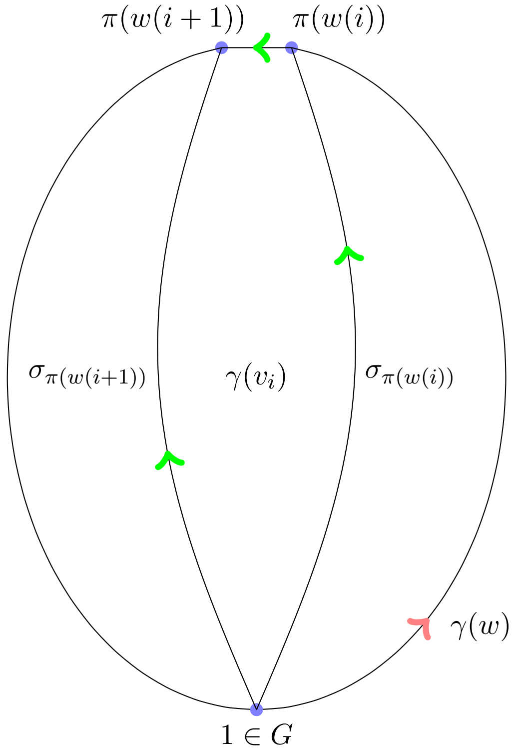


Figura 2.1 El camí $\gamma(v_i)$, el qual passa per 1, $\pi(w(i))$ i $\pi(w(i+1))$.

Pel Lema 1.3.16,

$$d_{G,X}(\pi(w(i)), 1) \leq l(w)/2, \tag{2.2}$$

per a tot $i \in \{0, \dots, l(w)\}$. Com que σ és geodèsica, aleshores la longitud de σ_i és menor o igual que $l(w)/2$, per a tot $i \in \{0, \dots, l(w)\}$. Indiquem amb $x_i^{j)}$ la paraula (de com a màxim una lletra) corresponent al camí geodèsic que va des de $\sigma_i(j)$ a $\sigma_i(j+1)$, amb $i \in \{0, \dots, l(w)\}$ i $0 \leq j \leq l(w)/2 - 1$ ($x_i^{j)}$ coincideix amb la lletra $(j+1)$-èssima de σ_i quan $j \leq l(\sigma_i) - 1$ i és igual a ε altrament).

Per a tots $i \in \{0, \dots, l(w) - 1\}$ i $0 \leq j \leq l(w)/2$, siguin $\overline{v}_{i,j}$ la paraula corresponent a un camí geodèsic que va des de $\sigma_i(j)$ fins a $\sigma_{i+1}(j)$, i $u_{i,j}$ la paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ formada per la concatenació

$$x_i^{j+1)} \cdot \overline{v}_{i,j+1} \cdot \left(x_{i+1}^{j+1)}\right)^{-1} \cdot \overline{v}_{i,j}^{-1},$$

els camins de les quals es poden observar a la Figura 2.2. Per contrucció, per a tot $i \in \{0, \dots, l(w) - 1\}$,

$$v_i = u_{i,0} \sharp (u_{i,1} \sharp (\dots, \sharp (u_{i,l(w)/2-1}) \dots),$$

per la qual cosa, pel Lema 2.1.3,

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(v_i) \leq \sum_{j=0}^{l(w)/2-1} \text{area}_{\mathcal{P}}(u_{i,j}). \tag{2.3}$$

Aleshores, combinant (2.1) i (2.3), tenim que

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \sum_{i=0}^{l(w)-1} \sum_{j=0}^{l(w)/2-1} \text{area}_{\mathcal{P}}(u_{i,j}).$$

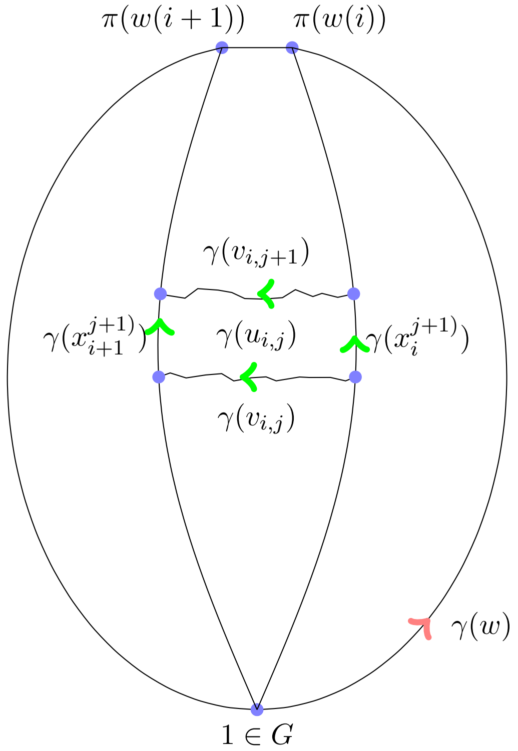


Figura 2.2 El camí $\gamma(u_{i,j})$ corresponent a la paraula $u_{i,j}$.

Per a tots $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$ i $j \in \{0, \ldots, l(w)/2-1\}$, per definició de φ_σ i per (2.2), $l(\overline{v}_{i,j}) \leq \varphi_\sigma(l(w)/2)$, per la qual cosa $l(u_{i,j}) \leq 2 + 2\varphi_\sigma(l(w)/2)$. Per tant, reindexant aquest sumatori amb la bijecció

$$\{u_{i,j} \mid 0 \leq i \leq l(w)-1, 0 \leq j \leq l(w)/2-1\} \longleftrightarrow \{u_k \mid 1 \leq k \leq l(w)^2/2\},$$

existeixen com a màxim $l(w)^2/2$ paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$, u_k, tals que $l(u_k) \leq 2 + 2\varphi_\sigma(l(w)/2)$ i

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \sum_{k=1}^{l(w)^2/2} \text{area}_{\mathcal{P}}(u_k).$$

$\square$

Proposició 2.1.6. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G i $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció geodèsica. Aleshores*

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq \frac{1}{2}\delta_{\mathcal{P}}(2\varphi_\sigma(n/2)+2) \cdot n^2.$$

Demostració. Sigui w una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$. Pel Lema 2.1.5, tenim que existeixen $u_1, \ldots, u_{l(w)^2/2}$ paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$ de longitud menor o igual que $2\varphi_\sigma(l(w)/2)+2$ tals que

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \sum_{i=1}^{l(w)^2/2} \text{area}_{\mathcal{P}}(u_k).$$

Com que $l(u_k) \leq 2\varphi_\sigma(l(w)/2)+2$ per a tot $k \in \{1, \ldots, l(w)^2/2\}$, aleshores $\text{area}_{\mathcal{P}}(u_k) \leq \delta_{\mathcal{P}}(2\varphi_\sigma(l(w)/2)+2)$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\text{area}_{\mathcal{P}}(w) &\leq \sum_{k=1}^{l(w)^2/2} \text{area}_{\mathcal{P}}(u_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{l(w)^2/2} \delta_{\mathcal{P}}(2\varphi_\sigma(l(w)/2)+2) \\
&\leq \frac{1}{2} l(w)^2 \cdot \delta_{\mathcal{P}}(2\varphi_\sigma(l(w)/2)+2).
\end{aligned}$$

Llavors

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathcal{P}}(n) &= \max\{\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \mid w \text{ nul-homotòpica per } \mathcal{P}, l(w) \leq n\} \\
&\leq \max\{\frac{1}{2} l(w)^2 \cdot \delta_{\mathcal{P}}(2\varphi_\sigma(l(w)/2)+2) \mid w \text{ nul-homotòpica per } \mathcal{P}, l(w) \leq n\} \\
&\leq \frac{1}{2} n^2 \cdot \delta_{\mathcal{P}}(2\varphi_\sigma(n/2)+2).
\end{aligned}$$

$\square$

Aquesta recursió dóna lloc a una fita superior de la funció de Dehn per als grups tals que admetin una secció geodèsica σ tal que $\varphi_\sigma(n) < n-1$ per a n suficientment gran.

Lema 2.1.7. *Sigui $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una funció que cumpleix la recursió*

$$F(n) = F(n-2) + 2\ln n + \ln\frac{1}{2}.$$

Aleshores

$$F(n) = \begin{cases} F(0) + 2\ln n!! - \dfrac{n}{2}\ln 2 & \textit{si } n \textit{ parell} \\ F(1) + 2\ln n!! - \dfrac{n+1}{2}\ln 2 & \textit{si } n \textit{ senar} \end{cases}$$

on $n!!$ *denota el doble factorial, definit recursivament per* $0!! = 1$*,* $1!! = 1$*,* $n!! = n \cdot (n-2)!!$.

Demostració. Com que la recursió $F(n) = F(n-2) + 2\ln n + \ln\frac{1}{2}$ és lineal d'ordre 2, per la Teoria d'Equacions en Diferències, la solució d'aquesta recursió és única si es coneixen les condicions inicials $F(1)$ i $F(0)$. Per tant, basta comprovar que si F té aquesta forma, aleshores F satisfà la recursió inicial, el que es pot veure amb un simple càlcul. □

Teorema 2.1.8. *Siguin* G *un grup,* X *un conjunt finit de generadors de* G*,* $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ *una presentació finita de* G *i* $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ *una secció geodèsica tal que existeix un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\varphi_\sigma(n) < n-1$ *per a tot* $n \geq n_0$*. Aleshores existeix una constant* C*, que només depèn de* n_0 *(i de* $\mathcal{P}$*), tal que*

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq C \cdot \frac{(n!!)^2}{2^{n/2}},$$

per a tot $n \geq n_0$*. De fet, podem prendre*

$$C = \frac{(\delta_{\mathcal{P}}(n_0)+1)\cdot 2^{\frac{n_0+1}{2}}}{(n_0!!)^2}.$$

Demostració. Per la Proposició 2.1.6, tenim que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq \frac{1}{2}\delta_{\mathcal{P}}(2\varphi_\sigma(n/2)+2)\cdot n^2.$$

Com que $\varphi_\sigma(n) < n-1$ per a tot $n \geq n_0$, llavors $\varphi_\sigma(n) \leq n-2$, ja que la funció φ només pren valors naturals. Per això, per a tot $n \geq n_0$, tenim que $2\varphi_\sigma(n/2)+2 = 2\varphi_\sigma(\lfloor n/2\rfloor)+2 \leq 2\lfloor n/2\rfloor - 2 \leq n-2$. Per tant, $\delta_{\mathcal{P}}$ satisfà la desigualtat

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq \frac{1}{2}\delta_{\mathcal{P}}(n-2)\cdot n^2, \tag{2.4}$$

per a tot $n \geq n_0$.

Sigui $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ una funció tal que

$$\begin{cases} f(n) = \dfrac{1}{2}f(n-2)\cdot n^2, \\ f(n_0) \geq \delta_{\mathcal{P}}(n_0). \end{cases} \tag{2.5}$$

La desigualtat (2.4) implica que $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq f(n)$ per a tot $n \geq n_0$. Vegem-ho per inducció sobre n:

- Si $n = n_0$, aleshores $\delta_{\mathcal{P}}(n_0) \leq f(n_0)$ per construcció de f.
- Suposem-ho cert fins a n i provem-ho per a $n+1$. Aplicant hipòtesi d'inducció i (2.4), tenim que

$$f(n+1) = \frac{1}{2} f(n-1) \cdot (n+1)^2 \geq \frac{1}{2} \delta_{\mathcal{P}}(n-1) \cdot (n+1)^2 \geq \delta_{\mathcal{P}}(n+1).$$

Considerem la funció $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida per $F(n) = \ln f(n)$. F està ben definida, ja que $\operatorname{Im} f = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Per (2.5) prenent logaritmes i operant, tenim que F compleix que

$$\begin{cases} F(n) = F(n-2) + 2\ln n + \ln \dfrac{1}{2}, \\ F(n_0) = \ln f(n_0). \end{cases}$$

Pel Lema 2.1.7, F és de la forma

$$F(n) = \begin{cases} F(0) + 2\ln n!! - \dfrac{n}{2} \ln 2 & \text{si } n \text{ parell} \\ F(1) + 2\ln n!! - \dfrac{n+1}{2} \ln 2 & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}$$

Prenent $f(n_0) \geq \delta_{\mathcal{P}}(n_0) + 1 > 0$, $F(0) = \ln C_1$ i $F(1) = \ln C_2$ amb C_1 i C_2 constants que només depenen de n_0 i de $\delta_{\mathcal{P}}$ i que satisfan

$$C_1 = \frac{f(n_0) \cdot 2^{n_0/2}}{(n_0!!)^2},$$

$$C_2 = \frac{f(n_0) \cdot 2^{\frac{n_0+1}{2}}}{(n_0!!)^2},$$

aleshores tenim que $F(n_0) = \ln f(n_0)$. Notem que és necessari prendre $f(n_0) > 0$ per assegurar l'existència de $\ln C_1$ i $\ln C_2$ i que sempre podem fer aquesta elecció perquè $f(n_0) \geq \delta_{\mathcal{P}}(n_0)$. Per tot això, F té la forma

$$F(n) = \begin{cases} \ln C_1 + 2\ln n!! - \dfrac{n}{2} \ln 2 & \text{si } n \text{ parell} \\ \ln C_2 + 2\ln n!! - \dfrac{n+1}{2} \ln 2 & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}$$

De forma clara, $F(n) \leq \ln C_2 + 2\ln n!! - \frac{n}{2}\ln 2$, per la qual cosa tenim que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq f(n) = e^{F(n)} \leq C_2 \cdot \frac{(n!!)^2}{2^{n/2}},$$

per a tot $n \geq n_0$. Llavors si diem $C = C_2$, tenim el que volíem. □

Hem de notar que la Proposició 2.1.6 també implica fites inferiors sobre $\delta_{\mathcal{P}}$: tot grup G admet una secció $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ tal que $\varphi_\sigma(n) \leq n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$

(Teorema 1.3.23). Per tant, per a tota presentació $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ de G i per a tot $n \in \mathbb{N}$, tenim que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq \frac{1}{2}\delta_{\mathcal{P}}(n+2) \cdot n^2,$$

ja que $2\varphi_\sigma(n/2) + 2 \leq 2(n/2) + 2 = n + 2$. Per tant,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \geq \frac{2\delta_{\mathcal{P}}(n-2)}{(n-2)^2}.$$

Aquesta recursió, però, dóna lloc a una fita inferior molt grollera, la qual, tot d'una, es converteix en una fita trivial.

Teorema 2.1.9. *Sigui G un grup finitament generat. Si existeix una secció geodèsica σ, respecte d'algun conjunt de generadors finit de G, tal que $\varphi_\sigma(n) < n-1$ per a n suficientment gran, aleshores G és finitament presentat i la funció de Dehn de G safisfà que*

$$\delta_G(n) \preceq \frac{(n!!)^2}{2^{n/2}}.$$

Demostració. Pel Teorema 1.3.23, G és finitament presentat. A més, per aquest mateix teorema, si σ és una secció respecte d'un conjunt de generadors X, aleshores existeix una presentació finita de la forma $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$.

Sigui n_0 tal que $\varphi_\sigma(n) < n-1$ per a tot $n \geq n_0$. Pel Teorema 2.1.8 existeix una constant $C_{\mathcal{P},n_0}$, que depèn de $\mathcal{P}$ i de n_0, tal que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq C_{\mathcal{P},n_0} \cdot \frac{(n!!)^2}{2^{n/2}}. \tag{2.6}$$

per a tot $n \geq n_0$. De forma clara, podem prendre $C_{\mathcal{P},n_0}$ prou gran per a què aquesta desigualtat es compleixi per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Com que δ_G és la classe d'equivalència de les funcions de Dehn de les presentacions finites de G mòdul $\simeq$, tenim que existeix $C' > 1$ tal que

$$\delta_G(n) \preceq C' \frac{(n!!)^2}{2^{n/2}}.$$

Com que per a qualssevol funcions $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ creixents i $C > 1$ constant, $f \preceq g$ implica que $f \preceq Cg$ (ja que $f(x) \leq kg(kx+k) + kx + k \leq kCg(kx+k) + kx + k$, per alguna constant $k > 0$), aleshores això implica que

$$\delta_G(n) \preceq \frac{(n!!)^2}{2^{n/2}}.$$

□

Pel Teorema 1.3.28, si G admet una secció geodèsica σ tal que $\varphi_\sigma(n) < n-1$ per a n suficientment gran, aleshores $\delta_G \preceq n!$. Vegem que aquesta fita és més grollera que la que hem obtingut en el resultat anterior.

Lema 2.1.10. *Siguin $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tals que $g(n) \geq n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ i f i g són creixents. Si $f(n)/g(n) \geq h(x)$ amb $h(x)$ una funció tal que*

$$\lim_{x\to\infty} f^2(x)/h(kx) = \infty,$$

per a tota constant $k > 2$, aleshores $f \not\preceq g$.

Demostració. Demostrem-ho per reducció a l'absurd. Si $f \preceq g$, aleshores existeix $k > 0$ tal que

$$f(x) \leq kg(kx+k) + kx + k,$$

per a tot $x \in \mathbb{N}$. Podem suposar $k > 2$. Com que $g(n) \geq n$, aleshores

$$\begin{aligned} f(x) &\leq kg(kx+k) + kx + k \\ &\leq kg(kx+k) + g(kx+k) \\ &\leq (k+1)g(kx+k) \\ &\leq 2kg(kx+k). \end{aligned}$$

Per tant, $f(x)/g(kx+k) \leq 2k$, per a tot $x \in \mathbb{N}$. Com que $k > 2$, aleshores $kx + k \leq k^2x$ i, com que g és creixent, aleshores $g(kx+k) \leq g(k^2x)$. Per tant,

$$f(x)/g(k^2x) \leq f(x)/g(kx+k) \leq 2k.$$

Per veure que això és impossible, basta veure que per a tot $k > 2$, el límit del quocient $f(x)/g(kx)$ tendeix a infinit quan x tendeix a infinit. Com que $f(x)/g(x) \geq h(x)$, aleshores $g(x) \leq f(x)/h(x)$. Per tant, com que f és creixent,

$$\frac{f(x)}{g(kx)} \geq \frac{f(x)}{h(kx)/f(kx)} = \frac{f(x)f(kx)}{h(kx)} \geq \frac{f^2(x)}{h(kx)}.$$

□

Proposició 2.1.11. *Sigui la funció $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida com*

$$F(n) = \frac{(n!!)^2}{2^{n/2}}.$$

Aleshores, per a n suficientment gran, tenim que $F(n) < n!$, $(n!!)^2 \not\leq n!$ i $n! < e^{kn^3}$, i, a més, $n! \not\preceq F(n)$.

Demostració. En primer lloc, vegem que existeix una funció $G\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{F(n)}{n!} = \frac{(n!!)^2}{n! \cdot 2^{n/2}} \leq G(n),$$

i tal que

$$G(n) \sim C \cdot \frac{n^{1/2}}{2^{n/2}},$$

per a qualque $C > 0$ constant.

Diferenciem els casos parell i senar. Com que $(2n)!! = 2^n \cdot n!$, llavors, si n és parell, $n!! = 2^{n/2} \cdot (n/2)!$. Si n és parell, usant la fórmula d'Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n$, tenim que

$$\begin{aligned}\frac{(n!!)^2}{n! \cdot 2^{n/2}} &\sim \frac{2^n \pi n \cdot \left(\frac{n/2}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n \cdot 2^{n/2}} \\ &\sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{n/2}}.\end{aligned}$$

Si n és senar, aleshores

$$n!! = \frac{n!! \cdot (n-1)!!}{(n-1)!!} = \frac{n!}{(n-1)!!} = \frac{n!!}{2^{(n-1)/2} \cdot ((n-1)/2)!}.$$

Per tant, operant,

$$\begin{aligned}\frac{(n!!)^2}{n! \cdot 2^{n/2}} &= \frac{(n!)^2}{2^{n-1} \cdot \left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2 \cdot n! \cdot 2^{n/2}} \\ &= \frac{n!}{2^{n-1} \cdot 2^{n/2} \cdot \left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n}{2^{n-1} \cdot 2^{n/2} \cdot \pi(n-1) \cdot \big((n-1)/(2e)\big)^{n-1}} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{n-1}}{2^{n-1} \cdot \pi n \cdot (n-1)^{n-1} \cdot e^n} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \cdot e} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{n/2}}.\end{aligned}$$

En tots dos casos, existeix una constant $C > 0$ tal que $F(n)/n! \leq G(n)$ on

$$G(n) \sim C \cdot \frac{n^{1/2}}{2^{n/2}}.$$

A rel d'això tenim que el quocient $F(n)/n!$ tendeix a zero quan n tendeix a infinit. Per tant, $F(n) < n!$ per a n suficientment gran.

Vegem que $n! \not\preceq F(n)$. Per l'anterior, $n!/F(n) \geq 1/G(n) \sim C \cdot 2^{n/2} \cdot n^{-1/2}$. Pel Lema 2.1.10, basta veure que, per a tot $k > 2$,

$$\lim_{x \to \infty} (n!)^2 / (C \cdot 2^{kn/2} \cdot (kn)^{-1/2}) = \infty$$

Per la fórmula de Stirling, tenim que

$$\frac{(n!)^2}{C \cdot 2^{kn/2} \cdot (kn)^{-1/2}} \sim \frac{2\pi n \cdot (n/e)^{2n} \cdot (kn)^{1/2}}{C \cdot 2^{kn/2}} \geq \frac{2\pi n \cdot (kn)^{1/2}}{C} \cdot \left(\frac{n}{2^k e}\right)^{2n},$$

que clarament tendeix a infinit quan x tendeix a infinit.

D'altra banda, n suficientment gran, $(n!!)^2 \not\preceq n!$, ja que, usant $n!! = 2^{n/2} \cdot (n/2)!$ per a n parell i la fórmula de Stirling, tenim que

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(n!!)^2} &\sim \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n}{2^n \cdot \pi n \cdot \left(\frac{n/2}{e}\right)^n} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{\pi n} \\ &\sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \cdot n}.\end{aligned}$$

Per tant, tenim una successió de nombres naturals $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (tots els nombres parells) tal que

$$\frac{n_i!}{(n_i!!)^2}$$

tendeix a zero quan n_i tendeix a infinit. Per això, $(n!!)^2 \not\preceq n!$ per a n suficientment gran, ja que, en cas contrari, tendríem que $n!/(n!!)^2 \geq 1$.

Per últim, vegem que $n! < e^{kn^3}$, per a tota constant $k > 0$ i per a n prou gran. Usant la fórmula de Stirling i operant, tenim que

$$\ln n! \sim \ln\big(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\big) = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln n + n \ln n - n < kn^3,$$

del que es dedueix la desigualtat de forma directa.

□

Sigui un grup G. Si G admet una secció σ tal que $\varphi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran, aleshores $\delta_G(n) \preceq e^{kn^3}$, per a qualque $k > 0$ (Teorema 1.3.24), i si G admet una secció geodèsica σ tal que $\Phi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran, aleshores $\delta_G \preceq n!$ (Teorema 1.3.28). Aquestes fites superiors de la funció de Dehn de G varen ser obtingudes per Bridson [10] i Riley [45], respectivament. Nosaltres hem vist, en el Teorema 2.1.9, que si G admet una secció geodèsica σ tal que $\varphi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran, aleshores $\delta_G(n) \preceq (n!!)^2/2^{n/2}$. Aquesta proposició ens diu que la fita superior de la funció de Dehn que hem obtingut és estrictament menor que les dues fites anteriors.

2.1.1 Anàlisi del cas asincrònic

Al contrari del cas en què un grup G admet una secció σ tal que la seva amplada sincrònica $\varphi_\sigma(n) < n - 1$, per a n suficientment gran, amb les tècniques que hem introduït i reproduint els mateixos arguments, no sabem millorar, en general, la fita $\delta_G \preceq n!$ quan $\Phi_\sigma(n) < n-1$, per a n suficientment gran[24]. Aquest fet es posa de manifest si intentem obtenir resultats anàlegs als obtinguts pel cas asincrònic:

Lema 2.1.12. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ una presentació finita de G, $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció geodèsica de G respecte de X. Aleshores, per a tota paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$ nul-homotòpica per $\mathcal{P}$, existeixen paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$, $u_1, \ldots, u_{l(w)^2+l(w)}$, de longitud menor o igual que $2\Phi(l(w)/2) + 2$ tals que*

$$area_{\mathcal{P}}(w) \le \sum_{k=1}^{l(w)^2+l(w)} area_{\mathcal{P}}(u'_k).$$

Demostració. La demostració és anàloga al cas sincrònic. Sigui w una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$. Si $w = \varepsilon$, aleshores el resultat és obvi. Si $w = x_1 \ldots x_r$, amb $r \ge 1$, $x_i \in X \cup X^{-1}$ i $i \in \{0, \ldots, r\}$. En aquest cas, per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$, considerem la paraula v_i definida per la concatenació següent:

$$v_i = \sigma_{\pi(w(i))} \cdot x_{i+1} \cdot \sigma^{-1}_{\pi(w(i+1))}.$$

Per a cada $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$, v_i és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$, ja que forma un cicle dins el graf de Cayley. I, a més, per construcció

$$w = v_0 \sharp (v_1 \sharp (\ldots, \sharp (v_{l(w)-1}) \ldots).$$

Per tant, pel Lema 2.1.3,

$$\mathrm{area}_{\mathcal{P}}(w) \le \sum_{i=0}^{l(w)-1} \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(v_i). \tag{2.7}$$

Per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$, siguin ρ_i, ρ'_i reparametritzacions de $\mathbb{N}$ per a $\pi(w(i))$ i $\pi(w(i+1))$. Pel Lema 1.3.16,

$$d_{G,X}(\pi(w(i)), 1) \le l(w)/2, \tag{2.8}$$

per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w)\}$. Com que σ és geodèsica, aleshores, per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w)\}$, la longitud de σ_i és menor o igual que $l(w)/2$ i els conjunts

$$\{\sigma_i(\rho_i(t)) \mid t \in \mathbb{N}\}, \quad \{\sigma_i(\rho'_i(t)) \mid t \in \mathbb{N}\}$$

tenen, com a màxim, $l(w)/2$ elements diferents.

Per a tots $i \in \{0, \ldots, l(w)\}$ i $t \in \mathbb{N}$, siguin

[24] Per demostrar que aquesta fita superior és òptima, s'hauria de trobar un exemple d'un grup G tal que $\delta_G \simeq n!$ i $\Phi_\sigma(n) < n-1$, per a n suficientment gran, per qualque secció σ de G.

- $x_i^{t)}$ la paraula (de com a màxim una lletra) corresponent al camí geodèsic que va des de $\sigma_i(\rho_i(t))$ a $\sigma_i(\rho_i(t+1))$.

- $\overline{v}_{i,t}$ la paraula corresponent a un camí geodèsic que vagi des de $\sigma_i(\rho_i(t))$ fins a $\sigma_{i+1}(\rho_i'(t))$.

- $u_{i,t}$ la paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ formada per la concatenació

$$x_i^{t+1)} \cdot \overline{v}_{i,t+1} \cdot \left(x_{i+1}^{t+1)}\right)^{-1} \cdot \overline{v}_{i,t}^{-1},$$

Com a màxim hi ha $l(\sigma_i) + l(\sigma_{i+1}) \leq 2l(w)/2 = l(w)$ paraules $u_{i,t}$, ja que quan

$$\begin{cases} \sigma_i(\rho_i(m)) & = \sigma_i(\rho_i(m+1)), \\ \sigma_i(\rho_i'(m)) & = \sigma_i(\rho_i'(m+1)), \end{cases}$$

per a algun $m \in \mathbb{Z}$, aleshores $u_{i,m} = u_{i,m+1}$. Per tant, per a tot $i \in \{0, \dots, l(w)-1\}$, existeixen $t_1, \dots, t_{l(w)}$ tals que,

$$v_i = u_{i,t_1} \sharp (u_{i,t_2} \sharp (\dots, \sharp (u_{i,t_{l(w)}}) \dots),$$

per la qual cosa, pel Lema 2.1.3,

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(v_i) \leq \sum_{j=0}^{l(w)} \text{area}_{\mathcal{P}}(u_{i,t_j}). \tag{2.9}$$

Aleshores, combinant (2.7) i (2.9), tenim que

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \sum_{i=0}^{l(w)-1} \sum_{j=0}^{l(w)} \text{area}_{\mathcal{P}}(u_{i,t_j}).$$

Per a tots $i \in \{0, \dots, l(w)-1\}$ i $t \in \mathbb{N}$, per definició de Φ i per (2.8), $l(\overline{v}_{i,t}) \leq \Phi(l(w)/2)$, per la qual cosa $l(u_{i,t}) \leq 2 + 2\varphi(l(w)/2)$. Per tant, reindexant el sumatori, tenim que existeixen com a màxim $l(w)(l(w)+1)$ paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$, u_k', tals que $l(u_k') \leq 2 + 2\Phi(l(w)/2)$ i

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \sum_{k=1}^{l(w)^2+l(w)} \text{area}_{\mathcal{P}}(u_k').$$

□

Amb una anàlisi de la demostració es pot veure que la fita superior del sumatori no es pot millorar (llevat de substraccions de constants) sense hipòtesis suplementàries.

Proposició 2.1.13. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G i $\sigma \colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció geodèsica tal que existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi_\sigma(n) < n-1$ per a tot $n \geq n_0$. Aleshores existeix una constant $C \geq 1$, $C \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq C \cdot (n+1)!,$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Demostració. Com que $\Phi_\sigma(n) < n-1$ per a tot $n \geq n_0$ i Φ_σ pren valors enters, aleshores $\Phi_\sigma(n) \leq n-2$ per a tot $n \geq n_0$.

Pel Lema 2.1.12, tenim que $\delta_{\mathcal{P}}$ segueix la recursió

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq (n^2+n) \cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2),$$

per a tot $n \geq n_0$.

Sigui $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definida per la recursió

$$\begin{cases} f(n) = (n^2+n) \cdot f(n-2), \\ f(n_0) \geq \delta_{\mathcal{P}}(n_0). \end{cases}$$

Aleshores tenim que $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq f(n)$ per a tot $n \geq n_0$.

Considerem la funció $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida per $F(n) = \ln f(n)$. Tenim que $F(n)$ satisfà la recursió

$$\begin{cases} F(n) = \ln n + \ln(n+1) + F(n-2), \\ F(n_0) = \ln f(n_0). \end{cases}$$

Es pot veure que F és de la forma

$$F(n) = \begin{cases} F(0) + \ln(n+1)! & \text{si } n \text{ parell} \\ F(1) + \ln(n+1)! & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}$$

Per tant, prenent $K = \max\{F(0), F(1)\}$, tenim que $F(n) \leq K + \ln(n+1)!$, i, per tant,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq f(n) \leq e^{F(n)} \leq e^K \cdot (n+1)!,$$

per a tot $n \geq n_0$. Ara bé, podem prendre $C \geq e^K$, $C \in \mathbb{N}$, prou gran tal que $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq C \cdot (n+1)!$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema 2.1.14. *Siguin $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $C \geq 1$, $C \in \mathbb{N}$, una constant.*

(a) Si g és creixent i $f \preceq Cg$, aleshores $f \preceq g$.

(b) $(n+1)! \simeq n!$.

Demostració.

(a) Si $f \preceq Cg$, aleshores existeix $k > 0$ tal que $f(x) \leq kCg(kx+k) + kx + k$. Com que g és creixent i $C \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &\leq kCg(kx+k) + kx + k \\ &\leq kCg(kCx + kC) + kCx + kC \\ &\leq (kC)g((kC)x + (kC)) + (kC)x + (kC). \end{aligned}$$

Per tant, $f \preceq g$.

(b) De forma obvia, tenim que $(n+1)! \leq k(kn+k)! + kn + k$ prenent $k = 1$. Per tant, $(n+1)! \preceq n!$. D'altra banda, com que $n! \leq (n+1)!$, tenim que $n! \preceq (n+1)!$. Per tant, $n! \simeq (n+1)!$.

$\square$

Proposició 2.1.15. *Sigui G un grup finitament generat. Si existeix una secció geodèsica σ, respecte d'algun conjunt de generadors finit de G, tal que $\Phi(n) < n-1$ per a n suficientment gran, aleshores G és finitament presentat i la funció de Dehn de G, δ_G, satisfà que $\delta_G(n) \preceq (n+1)! \simeq n!$.*

Demostració. Pel Teorema 1.3.23, G és finitament presentat. Si σ és una secció respecte d'un conjunt de generadors X, sigui $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G (tota presentació finita $\mathcal{P}' = \langle Y \mid S \rangle$ en tendrà una d'equivalent d'aquesta forma).

Sigui n_0 tal que $\Phi_\sigma(n) < n-1$ per a tot $n \geq n_0$. Per la Proposició 2.1.13 existeix una constant $C \geq 1$ tal que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq C \cdot (n+1)!.$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Com que δ_G és la classe d'equivalència de les funcions de Dehn de les presentacions finites de G mòdul $\simeq$, tenim que existeix $C' \geq 1$ tal que

$$\delta_G(n) \preceq C' \cdot (n+1)!.$$

Ara bé, pel Lema 2.1.14,

$$\delta_G(n) \preceq (n+1)! \simeq n!.$$

$\square$

Aquesta proposició realment confirma que, amb el mateix argument del cas sincrònic, no sabem millorar la fita de la funció de Dehn per a grups que admeten una secció σ tal que $\Phi_\sigma(n) < n-1$ per a n suficientment gran.

2.2 L'amplada mitjana respecte de dos valors

En aquesta secció definirem l'amplada mitjana d'una secció σ respecte de dos valors, $\lambda_{\sigma,s,k}$, i veurem que si un grup G admet una secció tal que la seva amplada mitjana no és *molt gran*, aleshores G és finitament presentat i té el problema de la paraula resoluble.

Notació 2.2.1. Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G i $n \in \mathbb{N}$. Indicarem amb $K_{G,X}(n)$ el conjunt

$$K_{G,X}(n) = \{(g,h) \in G \times G \mid d_{G,X}(1,g), d_{G,X}(1,h) \leq n,\ d_{G,X}(g,h) = 1\}.$$

Quan G i X siguin clars pel context, els podrem ometre i escriure, simplement, $K(n)$.

Notació 2.2.2. Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció, $g, h \in G$ i $t \in \mathbb{N}$. Indicarem amb $D_{\sigma,g,h}(t)$ el nombre

$$D_{\sigma,g,h}(t) = d_{G,X}(\sigma_g(t), \sigma_h(t)).$$

Definició 2.2.3. Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció, $s, k \in \mathbb{N}$. La (s,k)-*amplada mitjana de* σ, o *amplada mitjana de* σ *respecte de* s *i* k, és la funció $\lambda_{\sigma,s,k}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per $\lambda_{\sigma,s,k}(0) = 0$ i, per a tot $n > 0$,

$$\lambda_{\sigma,s,k}(n) = \max\{(D_{\sigma,g,h}(t+s) + D_{\sigma,g,h}(t+k))/2 \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\}.$$

Escriurem simplement $\lambda_{s,k}(n)$ quan σ sigui clara pel context o quan no existeixi confusió possible.

Estemdrem aquesta funció als nombres reals mitjançant $\lambda_{\sigma,s,k}(x) = \lambda_{\sigma,s,k}(\lfloor x \rfloor)$ si $x > 0$ i $\lambda_{\sigma,s,k}(x) = \lambda_{\sigma,s,k}(0)$ si $x < 0$.

Per simetria, tenim que $\lambda_{\sigma,s,k} = \lambda_{\sigma,k,s}$, per a tots $s, k \in \mathbb{N}$. Per tant, a partir d'ara, suposarem que $s \leq k$.

Lema 2.2.4. *Siguin* G *un grup,* X *un conjunt finit de generadors de* G *i* $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$. *Aleshores* $\lambda_{\sigma,s,k}(n) \leq \varphi_\sigma(n)$, *per a tots* $s \leq k \in \mathbb{N}$.

Demostració. Per a tot $s \in \mathbb{N}$, indiquem amb

$$M_s(n) = \max\{d_{G,X}(\sigma_g(t+s), \sigma_h(t+s)) \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\}.$$

De forma clara tenim que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $M_s(n) \leq \varphi_\sigma(n)$ i $2\lambda_{\sigma,s,k}(n) \leq M_s(n) + M_k(n)$. Per tant, $\lambda_{\sigma,s,k}(n) \leq \varphi_\sigma(n)$. □

Corol·lari 2.2.5. *Siguin* $s \leq k \in \mathbb{N}$. *Tot grup finitament generat admet una secció* σ, *respecte d'algun conjunt finit de generadors, tal que* $L_\sigma(n) = n$ *i* $\lambda_{\sigma,s,k}(n) \leq n$, *per a tot* $n \in \mathbb{N}$.

Demostració. Pel Teorema 1.3.23, tot grup finitament generat admet una secció σ, respecte d'algun conjunt finit de generadors, tal que $L_\sigma(n) = n$ i $\varphi_\sigma(n) \leq n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. Aplicant el lema anterior, tenim que $\lambda_{\sigma,s,k}(n) \leq n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. □

Volem veure que si un grup finitament generat G admet una secció σ tal que, per a alguns $s \leq k \in \mathbb{N}$, $\lambda_{\sigma,s,k}(n) < n - (k-s)$, per a n suficientment gran, aleshores G és finitament presentat i G té el problema de la paraula resoluble. En comptes de demostrar aquest fet per a tots s, k, ho demostrarem només per a $s = 0$ i $k = 1$, reduint els altres casos a aquest.

2.2.1 Reducció de $\lambda_{s,k}$ a $\lambda_{0,1}$

Lema 2.2.6. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})$ una secció, $0 < s \leq k \in \mathbb{N}$ i $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funció qualsevol. Aleshores:*

(a) Si $\lambda_{\sigma,0,k-s}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran, aleshores $\lambda_{\sigma,s,k}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran.

(b) Si f és estrictament creixent, aleshores si $\lambda_{\sigma,s,k}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran, llavors $\lambda_{\sigma,0,k-s}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran.

Demostració.

(a) Fent el canvi de variable $t' = t + s$, tenim que

$$\begin{aligned}
2\lambda_{\sigma,s,k}(n) &= \max\{D_{\sigma,g,h}(t+s) + D_{\sigma,g,h}(t+k) \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} \\
&= \max\{D_{\sigma,g,h}(t') + D_{\sigma,g,h}(t'+k-s) \mid t' \geq s, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} \\
&\leq 2\lambda_{\sigma,0,k-s}(n),
\end{aligned}$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$, Per tant, $\lambda_{\sigma,s,k}(n) \leq \lambda_{\sigma,0,k-s}(n)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, per hipòtesi, $\lambda_{\sigma,s,k}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran.

(b) Per a tot $n \in \mathbb{N}$, indiquem amb $N_{s,k}(n)$ el màxim

$$\max\{D_{\sigma,g,h}(t) + D_{\sigma,g,h}(t+k-s) \mid t = 0, \ldots, s-1, (g,h) \in K_{G,X}(n)\}.$$

Tenim que

$$\begin{aligned}
2\lambda_{\sigma,0,k-s}(n) &= \max\{D_{\sigma,g,h}(t) + D_{\sigma,g,h}(t+k-s) \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} \\
&= \max\big\{\max\{D_{\sigma,g,h}(t) + D_{\sigma,g,h}(t+k-s) \mid t \geq s, (g,h) \in K_{G,X}(n)\}, \\
&\qquad\quad N_{s,k}(n)\big\} \\
&= \max\{2\lambda_{\sigma,s,k}(n), N_{s,k}(n)\}
\end{aligned}$$

(el darrer pas s'aconsegueix fent el canvi de variable $t' = t - s$; vegeu l'apartat anterior).

$N_{s,k}(n)$ satisfà que

$$\begin{aligned}
N_{s,k}(n) &\leq \max\{D_{\sigma,g,h}(t) \mid t = 0, \ldots, s-1, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} \\
&\qquad + \max\{D_{\sigma,g,h}(t+s) \mid t = 0, \ldots, s-1, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} \\
&\leq 2\max\{D_{\sigma,g,h}(t) \mid t = 0, \ldots, s-1, (g,h) \in K_{G,X}(n)\}, \\
&\leq 2\max\{d_{G,X}(g,h) \mid (g,h) \in B_{G,X}(1, s-1)\}.
\end{aligned}$$

La darrera desigualtat és perquè la distància entre $\sigma_g(t)$ i $\sigma_h(t)$ és menor que la màxima distància entre dos elements de la bolla $B_{G,X}(1, s-1)$, ja que $\sigma_g(t)$ i $\sigma_h(t)$ pertanyen a aquesta bolla, per a qualssevol $g, h \in K_{G,X}(n)$. Per tant, com que f és estrictament creixent, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$, independent de n (n_1 només depèn de s), tal que $f(n_1) > N_{s,k}(n)$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

D'altra banda, sigui $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{\sigma,s,k}(n) < f(n)$ per a tot $n \geq n_0$, el qual existeix per hipòtesi, i sigui $N = \max\{n_0, n_1\}$. Aleshores, per a tot $n \geq N$,

$$\begin{aligned} 2\lambda_{\sigma,0,k-s}(n) &= \max\{2\lambda_{\sigma,s,k}(n), N_{s,k}(n)\} \\ &\leq \max\{f(n_1), 2\lambda_{\sigma,s,k}(n)\} \\ &\leq \max\{f(N), 2f(n)\} \\ &\leq 2f(n). \end{aligned}$$

Per tant, $\lambda_{\sigma,0,k-s}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran.

□

Lema 2.2.7. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció i $k > 1$. Si $\lambda_{\sigma,0,k}(n) < n - k$ per a n suficientment gran, aleshores $\lambda_{\sigma,0,1}(n) < n - 1$ per a n suficientment gran.*

Demostració. Sigui $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{\sigma,0,k}(n) < n - k$ per a tot $n \geq n_0$.

Per a tots $n \in \mathbb{N}$, $g, h \in K_{G,X}(n)$ i $t \in \mathbb{N}$, aplicant la desigualtat triangular, tenim que

$$\begin{aligned} d_{G,X}(\sigma_g(t+1), \sigma_h(t+1)) &\leq d_{G,X}(\sigma_g(t+1), \sigma_g(t+k)) \\ &\quad + d_{G,X}(\sigma_g(t+k), \sigma_h(t+k)) \\ &\quad + d_{G,X}(\sigma_h(t+k), \sigma_h(t+1)) \\ &\leq 2(k-1) + d_{G,X}(\sigma_g(t+k), \sigma_h(t+k)). \end{aligned}$$

Per tant, per a tot $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} 2\lambda_{\sigma,0,1}(n) &= \max\{D_{\sigma,g,h}(t) + D_{\sigma,g,h}(t+1) \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} \\ &\leq \max\{D_{\sigma,g,h}(t) + 2(k-1) + D_{\sigma,g,h}(t+k) \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} \\ &\leq \max\{D_{\sigma,g,h}(t) + D_{\sigma,g,h}(t+k) \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} + 2(k-1) \\ &\leq 2\lambda_{\sigma,0,k}(n) + 2(k-1) \\ &< 2(n-k) + 2(k-1) \\ &= 2(n-1). \end{aligned}$$

Aleshores $\lambda_{\sigma,0,1}(n) < n - 1$ per a tot $n \geq n_0$.

□

Notació 2.2.8. Sigui $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funció qualsevol i $s \leq k \in \mathbb{N}$. Indicarem amb:

(a) $\mathcal{S}(\varphi, f)$ i $\mathcal{S}(\lambda_{s,k}, f)$ les classes dels grups finitament generats G tal que existeix una secció σ de G, respecte d'un conjunt finit de generadors de G, tal que, respectivament, $\varphi_\sigma(n) < f(n)$ i $\lambda_{\sigma,s,k}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran.

(b) $\mathcal{S}_{Geo}(\varphi, f)$ i $\mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{s,k}, f)$ les classes dels grups finitament generats G tal que existeix una secció geodèsica σ de G, respecte d'un conjunt finit de generadors de G, tal que, respectivament, $\varphi_\sigma(n) < f(n)$ i $\lambda_{\sigma,s,k}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran.

Amb aquesta notació, tenim que la classe dels grups sincrònicament seccionables coincideix amb la unió de les classes $\mathcal{S}(\varphi, f(n) = k)$ amb $k \in \mathbb{N}$ constant, i que els teoremes 1.3.24 i 1.3.23 estableixen que si $G \in \mathcal{S}(\varphi, f(n) = n-1)$, aleshores G és finitament presentat i $\delta_G \preceq e^{kn^3}$ per alguna constant $k > 0$.

D'altra banda, de forma òbvia, per a qualssevol $s \leq k \in \mathbb{N}$ i una funció f, tenim que $\mathcal{S}_{Geo}(\varphi, f) \subseteq \mathcal{S}(\varphi, f)$ i $\mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{s,k}, f) \subseteq \mathcal{S}(\lambda_{s,k}, f)$.

Proposició 2.2.9. *Per a tot $r \geq 1$, sigui $f_r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funció definida per $f_r(n) = n - r$. Aleshores:*

$$\mathcal{S}(\varphi, f_1) \subseteq \mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f_1),$$

$$\mathcal{S}_{Geo}(\varphi, f_1) \subseteq \mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,1}, f_1),$$

$$\bigcup_{0 \leq s \leq k} \mathcal{S}(\lambda_{s,k}, f_{k-s}) = \bigcup_{0 \leq k} \mathcal{S}(\lambda_{0,k}, f_k) \subseteq \mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f_1),$$

$$\bigcup_{0 \leq s \leq k} \mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{s,k}, f_{k-s}) = \bigcup_{0 \leq k} \mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,k}, f_k) \subseteq \mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,1}, f_1).$$

Demostració. Pel Lema 2.2.4, $\lambda_{\sigma,0,1} \leq \varphi_\sigma$. Per tant, clarament, $\mathcal{S}(\varphi, f_1) \subseteq \mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f_1)$ i $\mathcal{S}_{Geo}(\varphi, f_1) \subseteq \mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,1}, f_1)$.

D'altra banda, pel Lema 2.2.6, per a tots $0 < s \leq k$, $\mathcal{S}(\lambda_{s,k}, f_{k-s}) = \mathcal{S}(\lambda_{0,k-s}, f_{k-s})$ i $\mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{s,k}, f_{k-s}) = \mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,k-s}, f_{k-s})$. Aquest fet també es compleix per a $s = 0$ i $0 \leq k$ de forma trivial. Per tant,

$$\bigcup_{0 \leq s \leq k} \mathcal{S}(\lambda_{s,k}, f_{k-s}) = \bigcup_{0 \leq k} \mathcal{S}(\lambda_{0,k}, f_k)$$

i

$$\bigcup_{0 \leq s \leq k} \mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{s,k}, f_{k-s}) = \bigcup_{0 \leq k} \mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,k}, f_k).$$

Finalment, pel Lema 2.2.7, $\mathcal{S}(\lambda_{0,k}, f_k) \subseteq \mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f_1)$ i $\mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,k}, f_k) \subseteq \mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,1}, f_1)$. $\square$

A rel d'aquesta proposició tenim que la classe dels grups que admeten una secció tal que, per a alguns $s \leq k$, $\lambda_{s,k}(n) < n - (k - s)$ per a n suficientment gran és, exactament, la classe dels grups que admeten una secció tal que $\lambda_{0,k'}(n) < n - k'$ per a n suficientment gran, per algun $k' \geq 0$. Per tant, a partir d'ara, podrem ocupar-nos, només, d'aquesta darrera classe de grups.

2.2.2 Els grups de $\mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f(n) = n - 1)$ són finitament presentats

Lema 2.2.10. *Siguin A un conjunt qualsevol, $X, Y \subseteq F(A)$. Si w es pot expressar com producte de conjugats de paraules de X i cada $x \in X$ es pot expressar com producte de conjugats de Y, aleshores w es pot expressar com producte de conjugats de Y.*

Demostració. Per hipòtesi, tenim que

$$w = \prod_{i=1}^{N} u_i^{-1} x_i u_i,$$

$$x_i = \prod_{i=1}^{N_i} v_{ij}^{-1} y_{ij} v_{ij},$$

on $u_i, v_{ij} \in F(A)$, $x_i \in X$, $y_{ij} \in Y$. Llavors

$$w = \prod_{i=1}^{N} u_i^{-1} x_i u_i = \prod_{i=1}^{N} u_i^{-1} \Big(\prod_{i=1}^{N_i} v_{ij}^{-1} y_{ij} v_{ij} \Big) u_i = \prod_{i,j} (v_{ij} u_i)^{-1} y_{ij} (v_{ij} u_i).$$

Per tant, w es pot expressar com a producte de conjugats de Y. $\square$

Teorema 2.2.11. *Qualsevol grup $G \in \mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f(n) = n - 1)$ és finitament presentat. Més concretament, si X és un conjunt finit de generadors de G, $n_0 \in \mathbb{N}$ i $\sigma \colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció tal que $\lambda_{0,1}(n) < n - 1$ per a $n \geq n_0$, aleshores existeix una presentació finita $\mathcal{P}$ de G de la forma $\langle X \mid R \rangle$, on*

$$R = \{ w = 1 \mid w \in (X \cup X^{-1})^*, \pi(w) = 1, l(w) \leq 2n_0, \},$$

amb $\pi (X \cup X^{-1})^* \to G$ el morfisme exhaustiu definit anteriorment.

Demostració. Com que $G \in \mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f(n) = n - 1)$, aleshores existeixen X un conjunt finit de generadors de G i $\sigma \colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció tal que $\lambda_{0,1}(n) < n - 1$ per a n suficientment gran. Sigui $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{0,1}(n) < n - 1$ per a tot $n \geq n_0$.

Com que X és un conjunt finit de generadors, tenim el morfisme exhaustiu $\pi \colon (X \cup X^{-1})^* \to G$. Siguin el conjunt de relacions

$$R = \{w = 1 \mid w \in (X \cup X^{-1})^*, \pi(w) = 1, l(w) \leq 2n_0, \},$$

el qual és simètric per ser π un morfisme, i la presentació finita $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$.

Volem veure que $\mathcal{P}$ és una presentació (finita) de G. Com a la demostració de la Proposició 1.3.17, hem de veure que tota paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$ tal que $\pi(w) = 1$ és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$. Geomètricament, aquest fet és equivalent a provar l'existència d'un diagrama de van Kampen $\mathcal{D}_w$ per a w respecte de $\mathcal{P}$. Ho veurem per inducció sobre $l(w)$.

- Si $l(w) \leq 2n_0$, aleshores podem prendre el diagrama de van Kampen que té frontera w i una sola cara. Aquest diagrama existeix perquè, en aquest cas, w és una paraula de R.

- Suposem-ho cert fins a $l(w) = n > 2n_0$ i provem-ho per a $l(w) = n + 1$. Siguin

  $$m = \max\{l(\sigma_{\pi(w(i))}) \mid i = 0, \ldots, l(w)\} \leq L_\sigma(l(w)/2)$$

  i $I = \{0, \ldots, l(w)\} \times \{0, \ldots, m\}$.

  Considerem Λ el CW-complex planar de dimensió 2 format per $m + 1$ segments horitzontals i $l(w) + 1$ segments verticals el qual divideix el rectangle de llargària $l(w)$ i altura m en rectangles d'àrea unitat i que té I com a conjunt de vèrtexos. Transformem Λ en un CW-complex planar i dirigit $\tilde{\Lambda}$ de dimensió 2 amb els vèrtexos i els arcs etiquetats mitjançant els passos següents (el qual està representat, esquemàticament, a la Figura 2.3):

  - L'assignació de l'etiqueta $\sigma_{\pi(w(i))}(j)$ al vèrtex $(i, j) \in I$. En particular, (i, m) té $\pi(w(i))$ com a etiqueta (els vèrtexos (i, j) amb $j < m$ poden tenir, també, aquesta etiqueta).

  - Per a tot vèrtex (i, j) amb $i \notin \{0, l(w)\}$, l'etiquetatge de l'aresta que va des de (i, j) a $(i, j + 1)$ amb la lletra $(j + 1)$-èssima de la paraula $\sigma_{\pi(w(i))}$, i l'assignació del sentit d'aquesta aresta cap a $(i, j+1)$. És a dir, les etiquetes de les arestes del segment vertical i-èssim, llegides d'abaix a dalt, formen la paraula $\sigma_{\pi(w(i))}$. D'altra banda, etiquetarem totes les arestes dels segments 0-èssim i $l(w)$-èssim amb la paraula ε i els dirigirem cap a dalt.

  - Per a cada $(i, j), (i + 1, j) \in I$ amb $j \neq 0$, considerem la paraula $w_{i,j} \in (X \cup X^{-1})^*$ tal que $\gamma(w_{i,j})$ és un camí geodèsic de $\sigma_{\pi(w(i))}(j)$ a $\sigma_{\pi(w(i+1))}(j)$ dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$. A més, dividim l'aresta que va de (i, j) a $(i+1, j)$ dins Λ en $l(w_{i,j})$ segments dirigits, els quals determinaran $l(w_{i,j})+1$ punts. Dos d'aquests punts seran $\sigma_{\pi(w(i))}(j)$ i $\sigma_{\pi(w(i+1))}(j)$ (els extrems). Etiquetarem cadascun d'aquests punts, successivament des de (i, j) fins a $(i + 1, j)$, amb les lletres de $w_{i,j}$ i dirigirem tots els segments cap a $(i + 1, j)$. En particular, d'aquesta manera, les etiquetes dels arcs del segment horitzontal m-èssim de $\tilde{\Lambda}$, llegides de de $(0, m)$ fins a $(l(w), m)$ formen la paraula w.

Quan $j = 0$, prendrem $w_{i,j} = \varepsilon$ en sentit cap a (i, j). Així etiquetarem l'aresta que va des de (i, j) a $(i, j + 1)$ amb ε i sentit de $(i, j + 1)$ cap a (i, j).

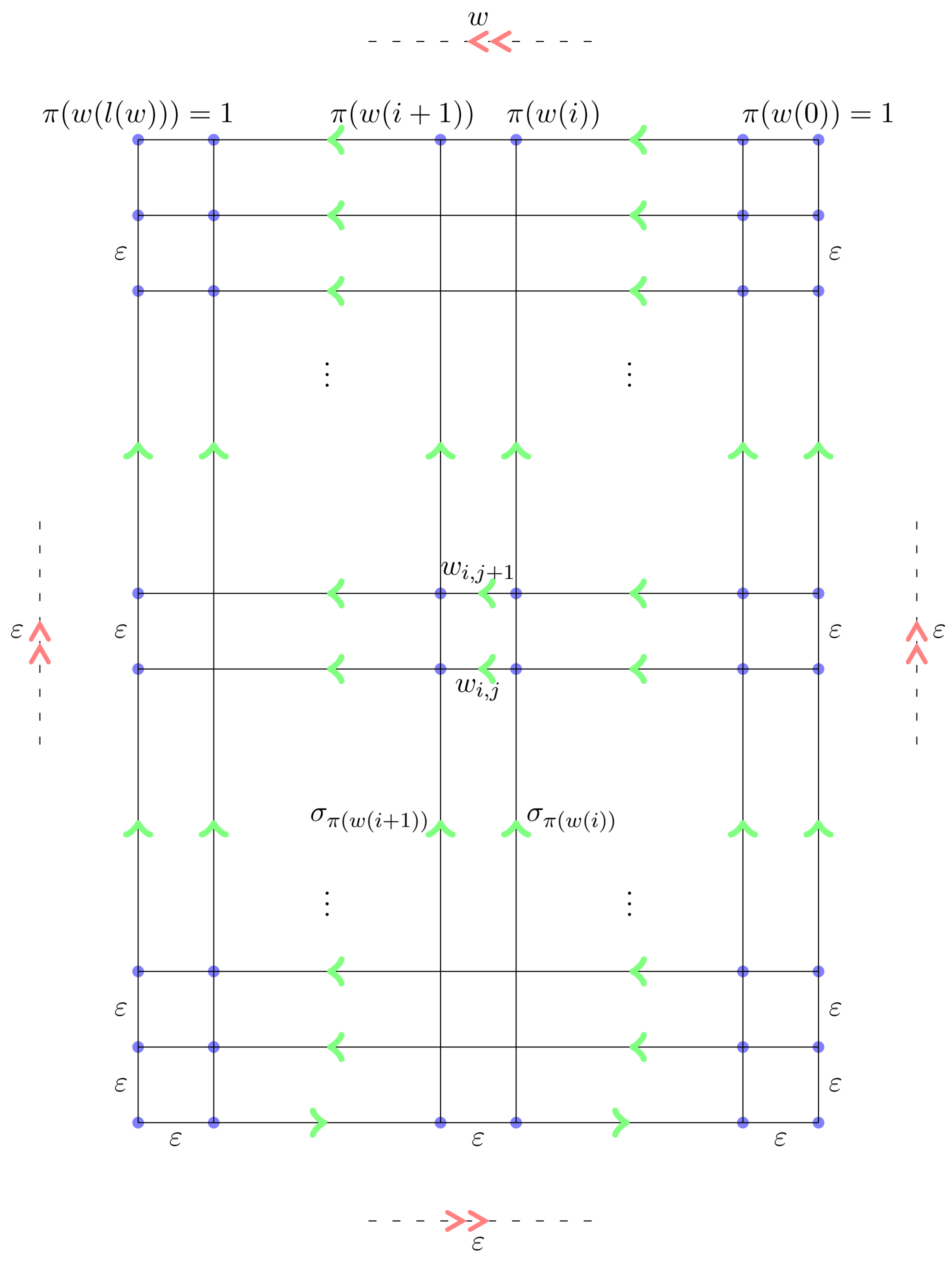


Figura 2.3 El diagrama $\tilde{\Lambda}$ contruït a partir de Λ i σ.

Per a cada cara de $\tilde{\Lambda}$ determinada pels vèrtexos (i, j), $(i, j + 1)$, $(i + 1, j + 1)$ i $(i + 1, j) \in I$, sigui $u_{i,j}$ la paraula formada llegint les etiquetes de la seva frontera des de (i,j) en el sentit contrari a les agulles del rellotge. Pel Lema 1.3.16 i perquè els camins corresponents a $w_{i,j}$ i $w_{i,j+1}$ són geodèsics,

$$l(w_{i,j}) + l(w_{i,j+1}) \leq 2\lambda_{0,1}(l(w)/2),$$

per a tots $(i,j),(i,j+1) \in I$. Per tant, com que $\lambda_{0,1}(n) < n-1$ per a tot $n \geq n_0$,

$$l(u_{i,j}) \leq 2 + 2\lambda_{0,1}(l(w)/2) < l(w).$$

D'altra banda, $\pi(u_{i,j}) = 1$ (ja que, per construcció, forma un cicle dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$). Per tant, $\tilde{\Lambda}$ és un diagrama de van Kampen per a w respecte de $\mathcal{Q} = \langle X \mid S\rangle$ amb S el conjunt de relacions

$$S = \{u = 1 \mid u \in (X \cup X^{-1})^*, \pi(u) = 1, l(u) < l(w)\}.$$

Per tant, pels lemes 1.2.31 i 1.1.16, w es pot posar com a producte de conjugats de $u_{i,j}$ i les seves inverses. Com que $l(u_{i,j}) < l(w)$, per hipòtesi d'inducció, tenim que existeix un diagrama de van Kampen $D_{i,j}$ de frontera $u_{i,j}$ respecte de $\mathcal{P}$. Per tant, cada $u_{i,j}$ es pot posar com a producte de conjugats de paraules de R (els conjugats de les inverses de paraules de R també són paraules de R, ja que R és simètric). Combinant aquests dos fets, pel Lema 2.2.10, w es pot posar com a producte de conjugats de paraules de R, per la qual cosa existeix un diagrama de van Kampen D_w per a w sobre $\mathcal{P}$.

□

Corol·lari 2.2.12. *Siguin $s \leq k \in \mathbb{N}$ i un grup G. Si $G \in \mathcal{S}(\lambda_{s,k}, f(n) = n - (k-s))$, aleshores G és finitament presentat.*

Demostració. És conseqüència directa de la Proposició 2.2.9 i del Teorema 2.2.11. □

2.2.3 L'ordre de la funció de Dehn dels grups de $\mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f(n) = n-1)$

Lema 2.2.13. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G tal que $X = X^{-1}$, $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ una presentació finita de G fixada i $\sigma: G \to X^*$ una secció. Per a qualsevol paraula $w \in X^*$ nul-homotòpica per $\mathcal{P}$, existeix un diagrama de van Kampen $\mathcal{D}_w$ per a w respecte de $\mathcal{P}$ que es pot expressar com la unió de com a màxim*

$$l(w) \cdot (2|X|^{l(w)\lambda_{0,1}(l(w)/2)} + 1)$$

subdiagrames 1-connectats, cadascun dels quals té perímetre com a màxim

$$2\lambda_{0,1}(l(w)/2) + 2.$$

Demostració. Sigui w una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$. Considerem $\tilde{\Lambda}$ el diagrama planar dirigit i etiquetat construït a partir de w i σ com en el Teorema 2.2.11 (Figura 2.3). Cada segment de $\tilde{\Lambda}$ té associada una paraula sobre X, la qual correspon a llegir les seves etiquetes de forma consecutiva a partir d'un dels seus extrems. Si indiquem amb $h(j), v(i)$ les paraules associades al segment horitzontal j-èssim i al segment vertical i-èssim, respectivament (amb la convenció que comencem a comptar des dels segments inferior i dret), aleshores $h(0) = v(0) = v(l(w)) = \varepsilon$ i $v(i) = \sigma_{\pi(w(i))}$, per a tot $i \in \{1, \ldots, l(w) - 1\}$. D'altra banda, per a qualsevol $j \neq 0$, $h(j)$ està formada per la concatenació de $l(w)$ paraules, $w_{i,j}$, corresponents a camins geodèsics entre (i, j) i $(i + 1, j)$. Aquestes paraules són tals que

$$l(w_{i,j}) + l(w_{i,j+1}) \leq 2\lambda_{0,1}(l(w)/2),$$

per a qualsevol $i \in \{0, \ldots, l(w)\}$. Per tant,

$$l(h(j)) + l(h(j + 1)) \leq 2l(w) \cdot \lambda_{0,1}(l(w)/2).$$

Això vol dir que, parell a parell, la suma de les longituds de les paraules associades als segments horitzontals és menor o igual que $2l(w) \cdot \lambda_{0,1}(l(w)/2)$. Això implica que una de les paraules té longitud menor que $l(w) \cdot \lambda_{0,1}(l(w)/2)$: si $l(h(j)) \leq l(w) \cdot \lambda_{0,1}(l(w)/2)$, aleshores ho tenim. Si $l(h(j)) > l(w) \cdot \lambda_{0,1}(l(w)/2)$, aleshores

$$\begin{aligned} l(h(j + 1)) &\leq 2l(w) \cdot \lambda_{0,1}(l(w)/2) - l(w) \cdot \lambda_{0,1}(l(w)/2) \\ &\leq l(w) \cdot \lambda_{0,1}(l(w)/2). \end{aligned}$$

Si aplicam aquest fet pels parells que ocupen posicions senars, tenim que com a màxim hi pot haver $2|X|^{l(w)\cdot\lambda_{0,1}(l(w)/2)}$ parells tals que cap de les seves dues paraules és igual a una paraula d'un altre parell. Per tant, com a màxim hi ha $1 + 2|X|^{l(w)\cdot\lambda_{0,1}(l(w)/2)}$ paraules diferents corresponents a segments horitzontals (Figura 2.4).

Figura 2.4 Esquema dels parells associats als segments horitzontals de $\tilde{\Lambda}$.

En el cas en què dues paraules corresponents a segments horitzontals diferents siguin iguals, podem eliminar la part de $\tilde{\Lambda}$ que està entre elles. D'aquesta manera, podem construir un diagrama Δ que té $l(w) + 1$ línies verticals (les mateixes que $\tilde{\Lambda}$) i com a màxim $1 + 2|X|^{l(w)\cdot\lambda_{0,1}(l(w)/2)}$ línies horitzontals[25].

Com que $\tilde{\Lambda}$ és un diagrama de van Kampen per a w amb les paraules de la frontera de les seves cares formant paraules de longitud menor que $l(w)$, aleshores, per inducció, existeix un diagram de van Kampen respecte de $\mathcal{P}$ per a la paraula corresponent a cada cara de $\tilde{\Lambda}$. Per tant, podem encastar aquests diagrames a les cares de $\tilde{\Lambda}$. Com que Δ és un subdiagrama de $\tilde{\Lambda}$, llavors també podem encastar aquests diagrames a Δ. Per tant, Δ és un diagrama de van Kampen per a w respecte de $\mathcal{P}$ format per, com a màxim,

$$l(w) \cdot (2|X|^{l(w)\cdot\lambda_{0,1}(l(w)/2)} + 1)$$

subdiagrames 1-connectats (els diagrames de van Kampen de les cares de Δ) de perímetre com a màxim $2\lambda_{0,1}(l(w)/2) + 2$. □

Teorema 2.2.14. *Sigui G un grup, X un conjunt finit de generadors de G tal que $X = X^{-1}$, $\sigma\colon G \to X^*$ una secció tal que $\lambda_{0,1}(n) < n-1$ per a n suficientment gran, i $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $F(n) \geq 1$, per a tot $n \geq 1$. Si*

$$F(n) \geq n(2|X|^{n\lambda_{0,1}(n/2)} + 1)F\big(2\lambda_{0,1}(n/2) + 2\big),$$

per a n suficientment gran, aleshores F és una funció isoperimètrica per a qualque presentació finita de G.

Demostració. Sigui $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $n \geq n_1$,

$$F(n) \geq n(2|X|^{n\lambda_{0,1}(n/2)} + 1)F\big(2\lambda_{0,1}(n/2) + 2\big)$$

i $\lambda_{0,1}(n) < n - 1$. Pel Teorema 2.2.11, $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ amb

$$R = \{w = 1 \mid w \in (X \cup X^{-1})^*, \pi(w) = 1, l(w) \leq 2n_1, \}$$

és una presentació finita de G. Vegem que F és una funció isoperimètrica per a $\mathcal{P}$, és a dir, que, per a tota paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$ nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ tal que $l(w) \leq n$, tenim que $\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq F(n)$. Demostrem-ho per inducció sobre $l(w)$:

- Si w és una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ tal que $l(w) \leq 2n_1$, aleshores existeix un diagrama de van Kampen per a w amb una única cara, ja que w és una paraula de R. Per tant, $\text{area}_{\mathcal{P}}(w) = 1$, que és menor o igual que $F(2n_1)$ per hipòtesi.

- Suposem que w és una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ tal que $l(w) = n > 2n_1$ i que qualsevol paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ de longitud $r < n$ és frontera d'un diagrama de van Kampen respecte de $\mathcal{P}$ que té com a màxim $F(r)$ cares. Aleshores, pel Lema 2.2.13, existeix un diagrama de van Kampen per a w respecte de $\mathcal{P}$ el qual té com a màxim

$$n(2|X|^{n\lambda_{0,1}(n/2)} + 1)F\big(2\lambda_{0,1}(n/2) + 2\big)$$

[25] Aquestes tècniques de *cirugia* es poden trobar a diverses referències [10, 21].

cares. Per tant, aplicant la hipòtesi sobre F, tenim que aquest nombre és menor o igual que $F(n)$.

$\square$

Teorema 2.2.15. *Sigui G un grup. Si $G \in \mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f(n) = n-1)$, aleshores existeix $k > 0$ tal que*

$$\delta_G(n) \preceq e^{kn^3}.$$

Demostració. Com que $G \in \mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f(n) = n-1)$, aleshores existeixen X un conjunt finit de generadors de G tal que $X = X^{-1}$ i $\sigma\colon G \to X^*$ tal que $\lambda_{0,1}(n) < n-1$ per a n suficientment gran.

Vegem que existeix $k > 0$ tal que la funció $n \mapsto e^{kn^3}$ és isoperimètrica per a qualque presentació de G. Pel Teorema 2.2.14, basta veure que existeix $k > 0$ tal que, per a n suficientment gran,

$$kn^3 \geq \ln n + \ln(2|X|^{n\lambda_{0,1}(n/2)} + 1) + k(2\lambda_{0,1}(n/2) + 2)^3.$$

Ara bé, per a n suficientment gran, tenim que

$$\begin{aligned}
&\ln n + \ln(2|X|^{n\lambda_{0,1}(n/2)} + 1) + k(2\lambda_{0,1}(n/2) + 2)^3 \\
&\quad\leq \ln n + \ln(3|X|^{n\lambda_{0,1}(n/2)}) + k(2\lambda_{0,1}(n/2) + 2)^3 \\
&\quad\leq \ln n + \ln 3 + n\lambda_{0,1}(n/2)\ln|X| + k(2\lambda_{0,1}(n/2) + 2)^3 \\
&\quad\leq \ln n + \ln 3 + n(n/2 - 2)\ln|X| + k(n-2)^3 \\
&\quad\leq kn^3 + n^2(\frac{1}{2}\ln|X| - 6k) + o(n^2).
\end{aligned}$$

Per tant, prenent $k > \frac{1}{12}\ln|X|$ prou gran, tenim que això és menor o igual que kn^3 per a n suficientment gran.

Aleshores $n \mapsto e^{kn^3}$ és una funció isoperimètrica per a qualque presentació. Per tant, la funció de Dehn d'aquesta presentació és menor o igual que e^{kn^3}. Per tant, la funció de Dehn de G és $\preceq e^{kn^3}$. $\square$

Corol·lari 2.2.16. *Siguin $s \leq k \in \mathbb{N}$ i G un grup. Si $G \in \mathcal{S}(\lambda_{s,k}, f(n) = n-(k-s))$, aleshores existeix $k > 0$ tal que $\delta_G(n) \preceq e^{kn^3}$. En particular, G té el problema de la paraula resoluble.*

Demostració. De la Proposició 2.2.9 i del Teorema 2.2.15, s'estableix directament aquest fet. $\square$

2.2.3.1 La funció de Dehn dels grups de $\mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,k}, f(n) = n-k)$

En aquest apartat, trobarem una fita superior per a les funcions de Dehn dels grups de la classe $\mathcal{S}_{Geo}(\lambda_{0,k}, f(n) = n-1)$. Quan $k > 1$, aquesta fita superior és estrictament més petita que la fita superior corresponent als grups de $\mathcal{S}_{Geo}(\varphi, f(n) = n-1)$.

Proposició 2.2.17. *Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G, $k \geq 1$ i $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció geodèsica. Si σ és tal que $\lambda_{0,k}(n) < n - k$ per a n suficientment gran, aleshores*

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq \frac{n^2}{2k}\delta_{\mathcal{P}}(n-2).$$

Demostració. Sigui w una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$. Sigui m l'enter més gran tal que $l(w)/2 \geq m \cdot k$, el qual coincideix amb la part entera $\lfloor (l(w)/2)/k \rfloor$. Considerem $u_{i,j}$ les paraules nul-homotòpiques per $\mathcal{P}$ definides per:

- Per a tots $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, la paraula $u_{i,j}$ està formada per la concatenació, en aquest ordre, de les paraules següents:
  - La paraula corresponent a un camí geodèsic des de $\sigma_{\pi(w(i))}(mj)$ a $\sigma_{\pi(w(i+1))}(mj)$.
  - La subparaula de $\sigma_{\pi(w(i+1))}$ tal que el seu corresponent camí va des de $\sigma_{\pi(w(i+1))}(mj)$ a $\sigma_{\pi(w(i+1))}(m(j-1))$.
  - La paraula corresponent a un camí geodèsic des de $\sigma_{\pi(w(i+1))}(m(j-1))$ a $\sigma_{\pi(w(i))}(m(j-1))$.
  - La subparaula de $\sigma_{\pi(w(i))}$ tal que el seu corresponent camí va des de $\sigma_{\pi(w(i))}(m(j-1))$ fins a $\sigma_{\pi(w(i))}(mj)$.
- Per a tots $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$ i $j = m+1$, $u_{i,j}$ és la concatenació, en aquest ordre, de:
  - La lletra $(i+1)$-èssima de w.
  - La subparaula de $\sigma_{\pi(w(i+1))}$ tal que el seu corresponent camí va de $\sigma_{\pi(w(i+1))}(l(\sigma_{\pi(w(i+1))}))$ fins a $\sigma_{\pi(w(i+1))}(mk)$.
  - La paraula corresponent a un camí geodèsic entre $\sigma_{\pi(w(i+1))}(mk)$ i $\sigma_{\pi(w(i))}(mk)$.
  - La subparaula de $\sigma_{\pi(w(i))}$ que va des de $\sigma_{\pi(w(i))}(mk)$ fins a $\sigma_{\pi(w(i))}(l(\sigma_{\pi(w(i))}))$.

Per construcció, tenim que $u_{i,j}$ són paraules congruents i existeixen paraules w_i, $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$, tals que $w = w_1\sharp(w_2\sharp(\ldots(w_{l(w)-1})\ldots))$ i cada $w_i = u_{i,0}\sharp(\ldots\sharp(u_{i,m+1})\ldots)$. Per tant,

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \sum_{i=0}^{l(w)-1}\sum_{j=1}^{m+1} \text{area}_{\mathcal{P}}(u_{i,j}).$$

A més, per definició de $\lambda_{0,k}$, la longitud de cada $u_{i,j}$ és menor o igual que $2k + 2\lambda_{0,k}(l(w)/2)$.

Com que $\lambda_{0,k}(n) < n - k$ per a n suficientment gran, llavors la funció de Dehn satisfà que

$$\begin{aligned}\delta_{\mathcal{P}}(n) &\leq n \cdot \frac{n/2}{k}\delta_{\mathcal{P}}(2k + 2\lambda_{0,k}(n/2)) \\ &\leq \frac{n^2}{2k}\delta_{\mathcal{P}}(n-2),\end{aligned}$$

per a n suficientment gran. $\square$

Proposició 2.2.18. *Siguin $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$ i $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una funció que satisfà la recursió*

$$F(n) = 2\ln n - \ln 2k + F(n-2)$$

per a tot $n \geq 2$. Aleshores F és de la forma

$$F(n) = \begin{cases} F(0) + 2\ln n!! - \dfrac{n}{2}\ln 2k & \text{si } n \text{ parell} \\ F(1) + 2\ln n!! - \dfrac{n+1}{2}\ln 2k & \text{si } n \text{ senar} \end{cases}$$

Demostració. A l'igual que amb el Lema 2.1.7, basta comprovar que si F té aquesta forma, aleshores F compleix la recursió, el que es pot fer amb un simple càlcul. $\square$

Teorema 2.2.19. *Siguin $k \geq 1$ i G un grup tal que admet una secció σ tal que $\lambda_{0,k}(n) < n - k$ per a n suficientment gran. Aleshores*

$$\delta_G(n) \preceq \frac{(n!!)^2}{(2k)^{n/2}}.$$

Demostració. Pel Teorema 2.2.11, G és finitament presentat. Sigui $\mathcal{P}$ una presentació finita de G la forma $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$, on X és el conjunt finit de generadors de G respecte del qual està definida σ (si G té una presentació finita $\mathcal{Q} = \langle Y \mid S\rangle$, amb $Y \neq X$, sempre en podem trobar una isomorfa a $\mathcal{Q}$ amb X com a conjunt de generadors).

Sigui n_0 tal que $\lambda_{0,k}(n) < n - k$ per a tot $n \geq n_0$. Per la Proposició 2.2.17, $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq (n^2/2k) \cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2)$. Si considerem $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $f(n) = (n^2/2k) \cdot f(n-2)$ i $f(n_0) \geq \delta_{\mathcal{P}}(n_0)$, tenim que $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq f(n)$, per a tot $n \geq n_0$. Sigui $F(n) = \ln f(n)$. Tenim que F compleix la recursió

$$F(n) = 2\ln n - ln2k + F(n-2).$$

Pel lema anterior, existeix una constant $C > 1$ tal que $F(n) \leq C + 2\ln n!! - (n/2)\ln 2k$. A més, podem prendre C suficientment gran tal que, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq f(n) \leq e^{F(n)} \leq e^C \cdot \frac{(n!!)^2}{(2k)^{n/2}}.$$

Per tant

$$\delta_G(n) \preceq e^C \cdot \frac{(n!!)^2}{(2k)^{n/2}},$$

i, pel Lema 2.1.14,

$$\delta_G(n) \preceq \frac{(n!!)^2}{(2k)^{n/2}}.$$

□

Proposició 2.2.20. *Per a tot $k \geq 1$, sigui $F_k(n) = \frac{(n!!)^2}{(2k)^{n/2}}$. Si $k > 1$, aleshores $F_k \preceq F_1$ però $F_1 \npreceq F_k$.*

Demostració. De forma evident, si $k > 1$, aleshores $F_k(n) < F_1(n)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, $F_k \preceq F_1$.

D'altra banda, per a tot $k > 1$, el quocient $F_1(n)/F_k(n) = k^{n/2}$. Per tant, pel Lema 2.1.10, per demostrar que $F_1 \npreceq F_k$, basta veure que $\lim_{n\to\infty}(F_1(n))^2/k^{Cn/2} = \infty$, per a tota constant $C > 2$ o, el que és el mateix, $\lim_{n\to\infty}(F_1(n))^2/k^{Cn} = \infty$, per a tota constant $C > 0$.

Si n és parell, aleshores $n!! = 2^{n/2}\cdot(n/2)!$, i si n és senar, aleshores $n!! \geq (n-1)!!$. Per tant, aplicant la fórmula de Stirling, tenim que, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$(n!!)^2 \geq 2^{n-1} \cdot \pi \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{n-1}.$$

Per tant, per a tot $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{(F_1(n))^2}{k^{Cn}} &\geq \frac{((n-1)!!)^4/2^n}{k^{Cn}} \\
&\sim \frac{2^{2n-2}\cdot \pi^2 \cdot (n-1)^2 \cdot ((n-1)/2e)^{2n-2}}{k^{Cn}\cdot 2^n} \\
&= \frac{\pi^2 (n-1)^2 \cdot ((n-1)/e)^{2(n-1)}}{k^{Cn}\cdot 2^n} \\
&\geq \frac{\pi^2 (n-1)^2 \cdot ((n-1)/e)^{2(n-1)}}{k^{2C(n-1)}\cdot 2^{2(n-1)}} \\
&= \pi^2 (n-1)^2 \cdot \left(\frac{n-1}{2ek^C}\right)^{2(n-1)}.
\end{aligned}$$

Aquesta expressió tendeix a infinit quan n tendeix a infinit. Per tant, també ho fa el quocient $(F_1(n))^2/k^{Cn}$.

□

2.2.4 Diferències entre φ i $\lambda_{0,k}$

En aquesta secció reflexionarem sobre si la classe de grups que, per a qualque $k \geq 1$, admeten una secció σ tal que $\lambda_{\sigma,0,k}(n) < n-1$, per a n suficientment gran, és més general que la classe de grups que admeten σ tal que $\varphi_\sigma(n) < n-1$, per a n prou gran. També farem aquesta reflexió quan σ sigui geodèsica.

Si s'observen els teoremes 2.2.11 i 2.2.15 pot parèixer que aquests no milloren els resultats obtinguts per Bridson per al cas en què els grups admeten una secció tal que $\varphi(n) < n-1$ per a n suficientment gran (Teorema 1.3.23 i Proposició 1.3.26). Aquesta impressió és deguda a què s'obtenen les mateixes conclusions per a $\lambda_{0,1}$ que per a φ: G és finitament presentat i existeix $k > 0$ tal que $\delta_G(n) \preceq e^{kn^3}$, per a tot grup G tal que admet una secció σ tal que, per a n suficientment gran, $\lambda_{\sigma,0,1}(n) < n-1$ o $\varphi_\sigma(n) < n-1$.

Creiem que aquesta impressió és equivocada. Concretament, pensam que el rang d'aplicació dels Teoremes 2.2.11 i 2.2.15 és major, estrictament, que el corresponent al Teorema 1.3.23 i la Proposició 1.3.26 o, en altres paraules, que existeix un grup G_0 que admet una secció σ tal que $\lambda_{\sigma,0,1}(n) < n-1$, per a n suficientment gran, però, per a tota secció κ, és fals que $\varphi_\kappa(n) < n-1$ per a n suficientment gran.

No hem pogut establir aquest fet perquè no hem pogut trobar un exemple explícit d'aquest grup, encara que existeixen diverses raons plausibles per a aquesta existència:

- En general, $\lambda_{0,1}(n)$ és menor, estrictament, que $\varphi(n)$, ja que és una mitjana de valors (la mitjana de valors és menor que el màxim d'aquests valors).

- Si G és un grup, X és un conjunt de generadors finit de G i $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ és una secció tal que $\varphi_\sigma(n) \not< n-1$, per a n suficientment gran, aleshores existeix una successió $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_\sigma(n_i) \in \{n_i - 1, n_i\}$. Per tant, existeixen $g_i, h_i \in G$ tals que $d_{G,X}(g_i, h_i) = 1$, $d_{G,X}(1, g_i), d_{G,X}(1, h_i) \leq n_i$ i $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tals que

$$d_{G,X}(\sigma_{g_i}(t_i), \sigma_{h_i}(t_i)) \in \{n_i - 1, n_i\}$$

(és a t_i que s'agafa el màxim de les distàncies entre σ_{g_i} i σ_{h_i}). Pareix probable que existeixin (molts) grups tals que els valors precedents i consecutius de t_i siguin prou petits, és a dir, que

$$d_{G,X}(\sigma_{g_i}(t_i \pm 1), \sigma_{h_i}(t_i \pm 1)) < n_i.$$

Si

$$d_{G,X}(\sigma_{g_i}(t_i \pm 1), \sigma_{h_i}(t_i \pm 1)) < n_i - 2,$$

aleshores $\lambda_{0,1}(n) < n-1$. Per tant, l'existència de G_0 pot venir com a conseqüència de l'existència d'un grup (infinit) tal que les seves distàncies entre elements *oscil·lin*.

De fet, ni tan sols hem pogut construir un grup G_1 amb la funció de Dehn $\preceq e^{kn^3}$, per qualque $k > 0$, i tal que no admetés una secció amb amplada $\varphi(n) < n - 1$ per a n suficientment gran.

Al marge de l'existència de G_1 (l'existència de G_0 implica l'existència de G_1), una de les dificultats amb les quals hem topat de manera més freqüent quan hem intentat demostrar l'existència de G_0 és la coincidència de valor entre $\lambda_{0,1}(n)$ i $\varphi(n)$. Per exemple, si en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, prenem la secció $\sigma((i, j)) = a^i b^j$, amb $a = (1, 0)$ i $b = (0, 1)$ (exemple 4.3, pàgina 62), aleshores tenim que $\varphi_\sigma(n) = 2 = \lambda_{0,1}(n)$, per a $n \geq 5$. Per a l'existència de G_0, ha d'existir un grup G_2 (que pot coincidir amb G_0) tal que $\lambda_{0,1}(n) < \varphi(n)$ assimptòticament o, equivalentment, $\liminf_{n\to\infty} \varphi(n)/\lambda_{0,1}(n) > 1$. Tampoc hem pogut establir l'existència de G_2. Notem que $1 \leq \varphi/\lambda_{0,1} \leq 2$, ja que $\varphi \leq 2\lambda_{0,1}$. Tot fa pensar que necessitam un invariant geomètric associat al quocient $\varphi/\lambda_{0,1}$ (o a la seva diferència) per demostrar aquest fet.

Per tot això, enunciem la conjectura següent:

Conjectura 2.2.21. *Existeixen grups finitament presentats G_0, G_1 i G_2 tals que*

- *G_0 admet una secció σ tal que $\lambda_{\sigma,0,1}(n) < n - 1$, per a n suficientment gran, però, per a tota secció κ, $\varphi_\kappa(n) \not< n - 1$ per a n suficientment gran.*
- *G_1 no admet cap secció σ amb amplada $\varphi_\sigma(n) < n - 1$ per a n suficientment gran i $\delta_G(n) \preceq e^{kn^3}$ per qualque $k > 0$.*
- *Per a tota secció σ de G_2 (respecte d'algun conjunt finit de generadors de G_2),*

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi_\sigma(n)/\lambda_{\sigma,0,1}(n) > 1.$$

L'existència de G_0 implicaria, per definició, que $\mathcal{S}(\varphi, f(n) = n - 1) \subsetneq \mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f(n) = n - 1)$. De fet, creiem que $\mathcal{S}(\lambda_{0,k}, f(n) = n - k)$ és una classe incomparable amb $\mathcal{S}(\lambda_{0,k'}, f(n) = n - k')$ quan $k \neq k'$.

Per últim, en el cas geodèsic, tenim que la classe de grups tals que admeten una secció geodèsica tal que $\varphi(n) < n - 1$ per a n suficientment gran tenen funció de Dehn $\preceq (n!!)^2/2^{n/2}$ mentre que la classe de grups que admeten una secció geodèsica tal que, per qualque $k > 1$, $\lambda_{0,k}(n) < n - k$ tenen funció de Dehn $\preceq (n!!)^2/(2k)^{n/2}$. Hem vist que $(n!!)^2/(2k)^{n/2}$ és estrictament menor, mòdul $\simeq$, que $(n!!)^2/2^{n/2}$. El Teorema de Sapir-Birget-Rips (Teorema 1.2.36) i l'*abundància* dels grups finitament presentats suggereixen que això és una raó més per conjecturar que aquestes classes de grups són diferents:

Conjectura 2.2.22. *Existeix un grup finitament presentat G_3 tal que admet una secció geodèsica tal que, per qualque $k > 1$, $\lambda_{0,k}(n) < n - k$, per a n suficientment gran, però no admet cap secció geodèsica tal que $\varphi(n) < n-1$ per a n suficientment gran.*

2.3 L'amplada mitjana k-èssima φ_k

Una altra possible generalització de φ és, en comptes de realitzar la mitjana de les distàncies de dos valors, com fèiem amb $\lambda_{s,k}$, fer la mitjana de k valors consecutius.

Definició 2.3.1. Siguin G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció i $k \geq 0$. La *amplada mitjana k-èssima de σ*, o *amplada mitjana de $k+1$ valors de σ*, és la funció $\varphi_{\sigma,k}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per $\varphi_{\sigma,k}(0) = 0$ i, per a tot $n > 0$,

$$\varphi_{\sigma,k}(n) = \max\{\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} D_{\sigma,g,h}(t+i) \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\}.$$

Quan σ sigui clara pel context o sigui una secció genèrica, escriurem simplement $\varphi_k(n)$. De forma trivial, $\varphi_0 = \varphi$ i $\varphi_1 = \lambda_{0,1}$.

Estendrem φ_k als nombres reals mitjançant $\varphi_k(x) = \varphi_k(\lfloor x \rfloor)$ si $x > 0$ i $\varphi_k(x) = \varphi_k(0)$ si $x < 0$.

Lema 2.3.2. *Sigui $k \geq 0$. Per a tot $n \in \mathbb{N}$, tenim que $\varphi_k(n) \leq \varphi(n)$.*

Demostració. Sigui $n \in \mathbb{N}$. De forma clara,

$$\begin{aligned}
\varphi_k(n) &= \max\{\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} D_{\sigma,g,h}(t+i) \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} \\
&\leq \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \max\{D_{\sigma,g,h}(t+i) \mid t \in \mathbb{N}, (g,h) \in K_{G,X}(n)\} \\
&\leq (k+1)/(k+1) \cdot \varphi(n) \\
&= \varphi(n).
\end{aligned}$$

□

Corol·lari 2.3.3. *Tot grup finitament generat admet una secció σ, respecte d'algun conjunt finit de generadors, tal que $L_\sigma(n) = n$ i $\varphi_k(n) \leq n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.*

Demostració. És conseqüència directa del lema anterior i del Teorema 1.3.23. □

Notació 2.3.4. Sigui $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funció qualsevol i $k \in \mathbb{N}$. Indicarem amb

(a) $\mathcal{S}(\varphi_k, f)$ la classe dels grups finitament generats G tal que existeix una secció σ de G respecte d'un conjunt finit de generadors de G tal que $\varphi_{\sigma,k}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran.

(b) $\mathcal{S}_{Geo}(\varphi_k, f)$ la classe dels grups finitament generats G tal que existeix una secció geodèsica σ de G respecte d'un conjunt finit de generadors de G tal que $\varphi_{\sigma,k}(n) < f(n)$ per a n suficientment gran.

2.3.1 Els grups $\mathcal{S}(\varphi_k, f(n) = n - (k+1))$ són finitament presentats

Lema 2.3.5. *Siguin $k \geq 0$, $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funció qualsevol i $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de nombres naturals. Si (a_n) satisfà que, per a tot $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{k+1}(a_n + \ldots + a_{n+k}) < f(n,k),$$

aleshores per a tot $n \in \mathbb{N}$, existeix $i_0 \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $a_{n+i_0} < f(k,n)$.

Demostració. Suposem que existeix un n_0 tal que $a_{n_0}, \ldots, a_{n_0+k} \geq f(k, n_0)/(k+1)$. Aleshores $(k+1) \cdot f(k, n_0) > a_{n_0} + \ldots, a_{n_0+k} \geq (k+1) \cdot f(k, n_0)$, el que implica contradicció. □

Teorema 2.3.6. *Sigui $k \geq 0$. Qualsevol grup $G \in \mathcal{S}(\varphi_k, f(n) = n - k)$ és finitament presentat.*

Demostració. Siguin X un conjunt finit de generadors de G i $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció tals que $\varphi_{\sigma,k}(n) < n - k$ per a n suficientment gran (existeixen perquè $G \in \mathcal{S}(\varphi_k, f(n) = n-k)$), i sigui $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{\sigma,k}(n) < n - k$ per a tot $n \geq n_0$.

Sigui la presentació $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ on

$$R = \{w = 1 \mid w \in (X \cup X^{-1})^*, \pi(w) = 1, l(w) \leq 2n_0\}.$$

Demostrem que $\mathcal{P}$ és una presentació (finita) de G. Per això, basta veure que, per a tota paraula $w \in (X \cup X^{-1})^*$ tal que $\pi(w) = 1$, existeix un diagrama de van Kampen $\mathcal{D}_w$ per a w respecte de $\mathcal{P}$.

Sigui $w \in (X \cup X^{-1})^*$. Vegem per inducció sobre $l(w)$ que existeix $\mathcal{D}_w$.

- Si $l(w) \leq 2n_0$, aleshores basta prendre el diagrama de van Kampen per a w sobre $\mathcal{P}$ amb una sola cara.
- Suposem-ho cert fins a $n-1$ i demostrem-ho per a $n = l(w)$. Per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w)\}$, indiquem amb σ_i la imatge per σ de $\pi(w(i))$, és a dir, $\sigma_{\pi(w(i))}$. Per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w) - 1\}$, existeixen $m \leq L(l(w)/2)$ i una successió creixent de nombres naturals $(t_j)_{j=0,\ldots,m}$ tal que $t_0 = 0$, $t_m = \max\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$ i, per a tot $j \in \{0, \ldots, m\}$, $t_{j+1} - t_j \leq k+1$ i $d_{G,X}(\sigma_i(t_j), \sigma_{i+1}(t_j)) \leq \varphi_k(l(w)/2)$: pel

Lema 1.3.16, $\sum_{r=0}^{k} d_{G,X}(\sigma_i(r), \sigma_{i+1}(r)) \leq \varphi_k(l(w)/2)$. Aplicant el Lema 2.3.5 a aquests $k+1$ primers valors consecutius de σ_i, tenim que existeix $t_1 \in \{0, \ldots, k\}$, tal que $d_{G,X}(\sigma_i(t_1), \sigma_{i+1}(t_1)) \leq \varphi_k(l(w)/2)$. A més, $t_1 - t_0 \leq k+1$. Aleshores aplicant el mateix raonament pels valors $t_1+1, t_1+2, \ldots, t_1+k+1$, tenim que existeix $t_2 \in \{t_1+1, \ldots, t_1+k+1\}$ tal que $d_{G,X}(\sigma_i(t_1), \sigma_{i+1}(t_1)) \leq \varphi_k(l(w)/2)$ i $t_2 - t_1 \leq k+1$. D'aquesta manera, aplicant successivament aquest raonament, s'obté la successió cercada.

Per a tots $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$, $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, considerem $u_{i,j}$ la paraula corresponent a un camí tancat geodèsic que passa per $\sigma_i(t_j)$, $\sigma_i(t_{j+1})$, $\sigma_{i+1}(t_{j+1})$ i $\sigma_{i+1}(t_j)$. De forma clara, les paraules $u_{i,j}$ formen un diagrama de van Kampen per a w respecte de la presentació $\mathcal{Q} = \langle X \mid S \rangle$, on S és el conjunt de relacions

$$S = \{u \in (X \cup X^{-1})^* \mid \pi(u) = 1, l(u) \leq 2\varphi_k(l(w)/2) + 2k\}.$$

Per tant, w es pot expressar com a productes de conjugats de $u_{i,j}$ i les seves inverses.

D'altra banda, per a tots $i \in \{0, \ldots, l(w)-1\}$, $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, $u_{i,j}$ té longitud com a màxim $2\varphi_k(l(w)/2)+2(k+1)$, ja que $d_{G,X}(\sigma_i(t_j), \sigma_{i+1}(t_{j+1})) \leq \varphi_k(l(w)/2)$. Com que $\varphi_k(n) < n-(k+1)$, per a tot $n \geq n_0$, aleshores $l(u_{i,j}) < n$. Per tant, per hipòtesi d'inducció, existeix un diagrama de van Kampen $\mathcal{D}_{i,j}$ per a $u_{i,j}$ respecte de $\mathcal{P}$. Pel Lema 2.2.10, w es pot expressar com a producte de conjugats de paraules de R i, per tant, existeix un diagrama de van Kampen per a w respecte de $\mathcal{P}$.

□

2.3.2 L'ordre de les funcions de Dehn dels grups $\mathcal{S}(\varphi_k, f(n) = n-(k+1))$ i $\mathcal{S}_{Geo}(\varphi_k, f(n) = n-(k+1))$.

Definició 2.3.7. Sigui G un grup, X un conjunt finit de generadors de G, $\sigma\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ una secció, $w, u \in (X \cup X^{-1})^*$ paraules tals que w és nul-homotòpica i $j \in \mathbb{N}$. u és una *corona de w per j* si, i només si, existeixen camins geodèsics $\gamma_1, \ldots, \gamma_{l(w)}$ entre $\sigma_{\pi(w(0))}(j)$ i $\sigma_{\pi(w(1))}(j)$, $\ldots$, $\sigma_{\pi(w(l(w)-1))}(j)$ i $\sigma_{\pi(w(l(w)))}(j)$, respectivament, dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$ tals que la concatenació de les seves paraules corresponents $v_1, \ldots, v_{l(w)}$ és igual a u. Quan una paraula u sigui una corona de w per a qualque $j \in \mathbb{N}$, direm simplement que u és una *corona de w*.

Teorema 2.3.8. *Siguin $k \geq 0$ i G un grup finitament generat. Aleshores:*

(a) Si $G \in \mathcal{S}(\varphi_k, f(n) = n-(k+1))$, aleshores, per a n suficientment gran,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq (|X|^{n(n/2-(k+2))} + 1) \cdot n \cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2),$$

per a qualque presentació finita $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ de G.

(b) Si $G \in \mathcal{S}_{Geo}(\varphi_k, f(n) = n-(k+1))$, aleshores, per a n suficientment gran,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \le n^2/(k+1)\cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2)$$

per a qualque presentació finita $\mathcal{P}$ de G.

Demostració. Siguin X un conjunt finit de generadors de G tal que $X = X^{-1}$, $\sigma\colon G \to X^*$ una secció tal que $\varphi_{\sigma,k}(n) \le n-(k+1)$ per a n suficientment gran, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{\sigma,k}(n) \le n-(k+1)$ per a tot $n \ge n_0$ (existeixen perquè $G \in \mathcal{S}(\varphi_k, f(n) = n-(k+1)))$ i $\mathcal{P} = \langle X \mid R\rangle$ una presentació finita de G (que existeix pel Teorema 2.3.6).

D'altra banda, sigui $w \in X^*$ una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$. Notem amb m la longitud $l(w)$ de w i, per a tot $i \in \{0,\ldots,m\}$, amb σ_i la imatge per σ de $\pi(w(i))$.

Per a tot $j \in \mathbb{N}$, per a qualssevol corones C_{j+s} de w per $j+s$, amb $s \in \{0,\ldots,k\}$, tenim que $1/(k+1)\cdot(l(C_j)+\ldots+l(C_{j+k})) \le m\cdot\varphi_k(m/2)$. Per tant, pel Lema 2.3.5, existeix $s_0 \in \{0,\ldots,k\}$ tal que $l(C_{j+s_0}) \le m\cdot\varphi_k(m/2)$. Aplicant aquest fet de forma successiva per a $j = 0, k+1, 2k+2, 3k+3, \ldots$, etc., tenim que com a màxim hi ha $|X|^{m\varphi_k(m/2)}$ $(k+1)$-tuples de corones consecutives tals que cap d'elles conté una corona igual a una corona d'una altra tupla. Per tant, existeixen com a màxim

$$(k+1)\cdot |X|^{m\varphi_k(m/2)} + k$$

corones de w: hi ha $|X|^{m\varphi_k(m/2)}$ tuples cadascuna de les quals té $k+1$ corones i, després de la darrera tupla, k corones que no formen una altra tupla (Figura 2.5).

Figura 2.5 Diagrama de les tuples de $k+1$ corones consecutives de w.

D'altra banda, per a tots $i \in \{0,\ldots,m-1\}$, $j \in \mathbb{N}$, sigui $u_{i,j}$ la paraula corresponent a un camí geodèsic que va des de $\sigma_i(j)$ fins a $\sigma_{i+1}(j)$. Pel Lema 2.3.5 i aplicant el mateix raonament anterior, per a tot $i \in \{0,\ldots,m-1\}$, existeix una successió $(u_{i,j_s})_{s\in\mathbb{N}}$ tal que $l(u_{i,j_s}) \le \varphi_k(m/2)$ i $j_{s+1} - j_s \le k+1$, per a tot $s \in \mathbb{N}$.

Per a tots $i \in \{0,\ldots,m-1\}$, $s \in \mathbb{N}$, Sigui $w_{i,s}$ la paraula corresponent a la composició de $u_{i,j_{s+1}}$, la paraula corresponent a un camí geodèsic sobre σ_{i+1} des de $\sigma_{i+1}(j_{s+1})$ fins a $\sigma_{i+1}(j_s)$, ${u_{i,j_s}}^{-1}$ i la paraula corresponent a un camí geodèsic sobre σ_i des de $\sigma_i(j_s)$ fins a $\sigma_i(j_{s+1})$. Aquesta paraula és nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ perquè forma un cicle dins el graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$.

Com que la concatenació de u_{i,j_s}, per a $i \in \{0,\ldots,m-1\}$, forma una corona de w, aleshores, per l'anterior, hi ha $1/(k+1)\cdot((k+1)\cdot|X|^{m\varphi_k(m/2)}+k)$ paraules u_{i,j_s} diferents. Per tant, existeixen com a màxim $(|X|^{m\varphi_k(m/2)}+1)\cdot m$ paraules $w_{i,s}$ diferents.

Per contrucció, w es pot expressar com a composició de les paraules $w_{i,s}$ per l'operació $\sharp$. Com que $l(w_{i,s}) \leq 2\varphi_k(m/2) + 2(k+1)$, aleshores $\text{area}_{\mathcal{P}}(w_{i,s}) \leq \delta_{\mathcal{P}}\big(2\varphi_k(m/2) + 2(k+1)\big)$. Per tant,

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq (|X|^{m\varphi_k(m/2)} + 1) \cdot m \cdot \delta_{\mathcal{P}}\big(2\varphi_k(m/2) + 2(k+1)\big).$$

Com que $\varphi_k(n) < n - (k+1)$ per a tot $n \geq n_0$ i φ_k pren valors enters, tenim que $\varphi_k(m/2) \leq m/2 - (k+2)$ si $m \geq n_0$. Per tant, si $m \geq n_0$, aleshores

$$\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq (|X|^{m(m/2-(k+2))} + 1) \cdot m \cdot \delta_{\mathcal{P}}(m-2).$$

Per tant, de forma clara,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq (|X|^{n(n/2-(k+2))} + 1) \cdot n \cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2),$$

per a n suficientment gran.

D'altra banda, si σ és geodèsica, aleshores podrem prendre $n^2/(k+1)$ paraules diferents $w_{i,s}$, ja que, per a tot $i \in \{0, \dots, m\}$, la longitud de σ_i serà com a màxim n. Per tant, en aquest cas, $\text{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq m^2 \cdot \delta_{\mathcal{P}}(m-2)$ si $m \geq n_0$. Per tant,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq n^2/(k+1) \cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2),$$

per a n suficientment gran. □

Corol·lari 2.3.9. *Siguin $k \geq 0$ i G un grup finitament generat. Si $G \in \mathcal{S}_{Geo}(\varphi_k, f(n) = n - (k+1))$, aleshores*

$$\delta_G(n) \preceq \frac{(n!!)^2}{(k+1)^{n/2}}.$$

Demostració. Pel teorema anterior, tenim que existeix una presentació finita de $\mathcal{P}$ de G tal que

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq n^2/(k+1) \cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2),$$

per a n suficientment gran. Sigui n_0 el nombre natural a partir del qual es compleix aquesta recursió.

Sigui la funció $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definida per $f(n) = n^2/(k+1) \cdot f(n-2)$ i $f(n_0) \geq \delta_{\mathcal{P}}(n_0)$. De forma clara, $\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq f(n)$ per a tot $n \geq n_0$. Si considerem la funció $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida per $F(n) = \ln f(n)$, tenim que F compleix la recursió $F(n) = 2\ln n - ln(k+1) + F(n-2)$ per a tot $n \geq 0$. Com que $k \geq 0$, aleshores $(k+1)/2 > 0$. Per tant, aplicant la Proposició 2.2.18 per a $(k+1)/2$, tenim que existeix $C > 1$ tal que

$$F(n) \leq 2\ln n!! - n/2 \cdot \ln(k+1).$$

A més, podrem prendre C suficientment gran tal que, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{\mathcal{P}}(n) \leq f(n) \leq e^{F(n)} \leq e^C \cdot \frac{(n!!)^2}{(k+1)^{n/2}}.$$

Per tant,

$$\delta_G(n) \leq e^C \cdot \frac{(n!!)^2}{(k+1)^{n/2}}$$

i, pel Lema 2.1.14,

$$\delta_G(n) \leq \frac{(n!!)^2}{(k+1)^{n/2}}.$$

□

Lema 2.3.10. *Siguin $k \geq 0$, G un grup, X un conjunt finit de generadors de G tal que $X = X^{-1}$, $\sigma\colon G \to X^*$ una secció tal que $\varphi_k(n) < n - (k+1)$ per a n suficientment gran i $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Aleshores, existeix una constant $C > 0$ prou gran tal que, si*

$$F(n) \geq 2|X|^{n(n/2-(k+2))} \cdot n \cdot F(n-2),$$

per a n suficientment gran i $F(n) \geq C$, aleshores F és una funció isoperimètrica per a qualque presentació finita de G.

Demostració. Sigui $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G. Pel Teorema 2.3.8, tenim que, per a n suficientment gran,

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{P}}(n) &\leq (|X|^{n(n/2-(k+2))} + 1) \cdot n \cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2) \\ &\leq 2|X|^{n(n/2-(k+2))} \cdot n \cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2). \end{aligned}$$

Siguin $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $n \geq n_0$, $\delta_{\mathcal{P}}$ compleix aquesta darrera desigualtat i $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(n) \geq 2|X|^{n(n/2-(k+2))} \cdot n \cdot F(n-2),$$

per a tot $n \geq n_2$.

Siguin $N = \max\{n_0, n_1\}$ i $C \geq \max\{\delta_{\mathcal{P}}(i) \mid i = 0, \ldots, N\}$. Aleshores, per a tots $n \leq N$ i w una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ tal que $l(w) \leq n$, tenim que

$$F(n) \geq \delta_{\mathcal{P}}(n) \geq \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(w).$$

D'altra banda, per a tots $n > N$ i w una paraula nul-homotòpica per $\mathcal{P}$ tal que $l(w) \leq n$, per hipòtesi sobre F, tenim que

$$\begin{aligned} \mathrm{area}_{\mathcal{P}}(w) \leq \delta_{\mathcal{P}}(n) &\leq 2|X|^{n(n/2-(k+2))} \cdot n \cdot \delta_{\mathcal{P}}(n-2) \\ &\leq 2|X|^{n(n/2-(k+2))} \cdot n \cdot F(n-2) \\ &\leq F(n). \end{aligned}$$

Per tant, F és una funció isoperimètrica per a $\mathcal{P}$. $\square$

Corol·lari 2.3.11. *Siguin $k \geq 0$ i G un grup finitament generat. Si $G \in \mathcal{S}(\varphi_k, f(n) = n - (k+1))$, aleshores existeix $C > 0$ tal que*

$$\delta_G(n) \preceq e^{Cn^3}.$$

Demostració. Siguin X un conjunt finit de generadors de G tal que $X = X^{-1}$, $\sigma\colon G \to X^*$ una secció tal que $\varphi_k(n) < n - (k+1)$, per a n suficientment gran, i $\mathcal{P} = \langle X \mid R \rangle$ una presentació finita de G.

Vegem que existeix $C > 0$ tal que $n \mapsto e^{Cn^3}$ és una funció isoperimètrica per a $\mathcal{P}$. Pel Lema 2.3.10, basta demostrar que, per a C prou gran, es compleix que

$$Cn^3 \geq \ln 2 + n\big(n/2 - (k+2)\big) \ln|X| + \ln n + C(n-2)^3.$$

Ara bé, per a n suficientment gran,

$$\begin{aligned} &\ln 2 + n\big(n/2 - (k+2)\big) \ln|X| + \ln n + C(n-2)^3 \\ &\leq Cn^3 + n^2\big(\frac{1}{2}\ln|X| - 6k\big) + o(n^2). \end{aligned}$$

Per tant, basta prendre $C > \frac{1}{12}\ln|X|$ per tenir que això és $\leq Cn^3$.

Per tant, existeix $C > 0$ tal que $\delta_G(n) \preceq e^{Cn^3}$. $\square$

Notem que la constant k no afecta a l'elecció de la constant C, ja que una anàlisi de la demostració mostra que k només contribueix en ordre lineal a l'exponent de la funció isoperimètrica.

A rel d'aquests corol·laris tenim el resultat següent.

Corol·lari 2.3.12. *Siguin $k \geq 0$ i G un grup finitament generat. Si $G \in \mathcal{S}(\varphi_k, f(n) = n - (k+1))$, aleshores G té el problema de la paraula resoluble.*

2.3.3 Conjectures sobre φ_k

De la mateixa manera que en el cas de la mitjana respecte de dos valors, pensem que existeixen grups G tals que admeten una secció σ, respecte d'un conjunt finit de generadors de G, tal que, per a qualque $k > 1$, $\varphi_k(n) < n - (k+1)$ per a n suficientment gran, però que no n'admeten cap tal que $\varphi(n) < n - 1$ per a n suficientment gran.

A l'igual que per a $\lambda_{0,k}$, el principal motiu per pensar això és que, si g, h són elements tals que $d(g,h) = 1$, aleshores la distribució de les distàncies dels valors de les seccions de g i h, en general, determina que, com a mitjana, $\varphi_k(n)$ sigui menor que φ. En el cas de φ_k aquest motiu es reforça, ja que φ_k homogenitza les distàncies entre les seccions entre g i h més ràpidament que $\lambda_{0,k}$.

D'altra banda, creiem que les hipòtesis del Corol·lari 2.3.12 es poden relaxar. En concret, pensem que si G és un grup tal que, per a tots $g, h \in G$ tals que

$d(g,h)=1$, la mitjana de *tots* els valors de les distàncies entre les seccions de g i h és *prou* petita, aleshores G té el problema de la paraula resoluble.

Notació 2.3.13. Sigui G un grup finitament generat, X un conjunt finit de generadors de G i $\sigma\colon G \to (X \cup X)^{-1}$ una secció. Per a tots $g,h \in G$, indiquem amb $L(g,h)$ el màxim $L(g,h) = \max\{l(\sigma_g), l(\sigma_h)\}$ i amb Υ_σ l'aplicació $\Upsilon_\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per $\Upsilon_\sigma(0) = 0$ i, per a tot $n > 0$,

$$\Upsilon_\sigma(n) = \max\left\{ \frac{1}{L(g,h)} \sum_{t=0}^{L(g,h)} D_{\sigma,g,h}(t) \mid (g,h) \in K_{G,X}(n) \right\}.$$

Conjectura 2.3.14. *Existeix $K > 0$ tal que, si G és un grup finitament generat tal que admet una secció, respecte d'un conjunt finit de generadors de G, tal que $\Upsilon(n) < n - K$ per a n suficientment gran, aleshores G té el problema de la paraula resoluble. Amb altres paraules, si Υ no és molt gran, aleshores G té el problema de la paraula resoluble.*

Amb aquestes condicions, la funció Υ homogenitza les distàncies entre les seccions σ_g i σ_h de dos elements g, h tals que $d_{G,X}(g,h) = 1$. Per tant, de qualque manera, Υ fa que *perdem* la geometria local de G i només vegem la geometria a *gran escala* de G. Pensem que això està relacionat amb els *cons asimptòtics*[26] de G. La definició original de con asimptòtic de G és l'espai mètric límit de $(G, \frac{1}{n} d_G)$ quan n tendeix a infinit, amb d_G la mètrica de la paraula de G. Els cons asimptòtics varen ser emprats per Gromov per demostrar que $\mathrm{IP} \cap (1,2) = \emptyset$. La definició moderna empra ultrafiltres [44].

Definició 2.3.15. Sigui I un conjunt no buit. Un *ultrafiltre no principal* és una aplicació $\omega\colon \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ tal que $\omega^{-1}(1) \neq \emptyset$ i, per a tots $A, B \in \mathcal{P}(I)$,

i. Si $\omega(A) = \omega(B) = 1$, aleshores $\omega(A \cap B) = 1$.

ii. Si $\omega(A) = 1$ i $A \subseteq B$, aleshores $\omega(B) = 1$.

iii. $\omega(\emptyset) = 0$.

iv. O bé $\omega(A) = 1$ o bé $\omega(I \setminus A) = 1$.

Definició 2.3.16. Siguin G un grup, ω un ultrafiltre no principal respecte de G, $\mathbf{e} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió d'elements de G i $\mathbf{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de nombres reals estrictament positius i tals que $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. El *con asimptòtic de G respecte de $\mathbf{e}, \mathbf{s}$ i ω* és l'espai mètric $(Cone_\omega(G, \mathbf{e}, \mathbf{s}), d_{Cone})$ definit com

$$Cone_\omega(G, \mathbf{e}, \mathbf{s}) = \left\{ \mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_\omega \frac{1}{s_n} d(e_n, a_n) < \infty \right\} / \sim$$

[26] El terme en anglès és *asymptotic cones*.

on, per a tots $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la relació d'equivalència $\sim$ i la distància d_{Cone} estan definides com

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \iff \lim_{\omega} \frac{d(a_n, b_n)}{s_n} = 0$$
$$d_{Cone}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \lim_{w} \frac{d(a_n, b_n)}{s_n}.$$

Existeix una correspondència entre les propietats topològiques bilipschitz invariants d'un con asimptòtic $Cone_\omega(G, \mathbf{e}, \mathbf{s})$ de G i les propietats quasi-isomètriques per G [28]. Es poden consultar diverses referències sobre els cons asimptòtics [8, 44]. Aquesta correspondència (juntament amb el Teorema 1.3.30) és el motiu principal pel que creiem que els cons asimptòtics poden servir per demostrar la falsetat o la certesa de la Conjectura 2.3.14.

2.4 Problemes oberts

En les dues seccions anteriors, hem introduït diverses generalitzacions de l'amplada φ d'una secció: l'amplada respecte de dos valors, $\lambda_{s,k}$, i l'amplada mitjana k-èssima, φ_k. Ha quedat pendent demostrar que aquestes funcions imposen condicions estrictament més febles que φ sobre un grup, és a dir, que

$$\mathcal{S}(\lambda_{0,1}, f(n) = n - 1) \setminus \mathcal{S}(\varphi, f(n) = n - 1) = \emptyset$$

i, per a tot $k > 1$,

$$\mathcal{S}(\varphi_k, f(n) = n - (k + 1)) \setminus \mathcal{S}(\varphi, f(n) = n - 1) = \emptyset.$$

A part d'aquest problema, creiem que existeixen altres problemes oberts interessants:

(a) Donat un grup G, si G admet una secció σ tal que $\varphi_\sigma(n) < n - 1$, per a n suficientment gran, aleshores G té el problema de la paraula resoluble. Es pot afeblir aquesta condició, substituint-la per algunes de semblants, pel cas en què G admeti dues seccions? En principi, pareix que sí. Siguin G un grup finitament generat i X un conjunt finit de generadors de G. Si G admet dues seccions $\sigma, \kappa\colon G \to (X \cup X^{-1})^*$ tals que $\varphi_\sigma, \varphi_\kappa \not< n - 1$, per a n suficientment gran, però G és tal que κ està *entre* els camins σ_g i σ_h, per a tots $g, h \in G$ tals que $d_{G,X}(g, h) = 1$, és a dir,

$$\max\left\{d_{G,X}(\sigma_g(t), \kappa_g(t)), d_{G,X}(\kappa_g(t), \sigma_h(t))\right\} \leq d_{G,X}\big(\sigma_g(t), \sigma_h(t)\big),$$

per a tot $t \in \mathbb{N}$, aleshores si les funcions $\phi_1(n)$ i $\phi_2(n)$ definides com $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$ i, per a tot $n > 1$,

$$\phi_1(n) = \max\{d_{G,X}\big(\sigma_g(t), \kappa_g(t)\big) \mid t \in \mathbb{N}, d_{G,X}(1, g) \leq n\}$$
$$\phi_2(n) = \max\{d_{G,X}\big(\kappa_g(t), \sigma_h(t)\big) \mid t \in \mathbb{N}, (g, h) \in K_{G,X}(n)\}$$

són tals que $\phi_1(n) + \phi_2(n) < n - 1$ per a n suficientment gran, aleshores G té el problema de la paraula resoluble (la funció de Dehn es pot fitar fent ús dels *hexàgons* determinats pels vèrtexos $\sigma_g(t), \kappa_g(t), \sigma_h(t), \sigma_h(t+1), \kappa_g(t+1)$ i $\sigma_g(t+1)$ del graf de Cayley $\Gamma_{G,X}$). Un problema notable és trobar exemples de grups no trivials que satisfacin aquesta condició. Un altre problema és saber com generalitza aquesta condició quan G admet m seccions i analitzar els casos en què $m = n$ i quan les seccions de G són geodèsiques.

(b) Siguin G un grup i X un conjunt finit de generadors de G. Per a qualsevol secció $\sigma \colon G \to (X \cup X^{-1})^*$, les funcions $\lambda_{s,k}$ i φ_k estan definides respecte de la distància *sincrònica* entre els camins σ_g i σ_h, per a tots $(g,h) \in K_{G,X}(n)$, és a dir, per exemple

$$\varphi_k(n) = \max\{F_\sigma(g,h) \mid (g,h) \in K_{G,X}(n)\},$$

on

$$F_\sigma(g,h) = \max\{\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} d_{G,X}\big(\sigma_g(t+i), \sigma_h(t+i)\big) \mid t \in \mathbb{N}\}.$$

Una pregunta interessant és saber què passa si substituim aquesta distància sincrònica per la distància asincrònica, $G_\sigma(g,h)$, definida com

$$G_\sigma(g,h) = \min_{\rho,\rho' \in \mathcal{R}(\mathbb{N})} \left\{ \max\{\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} d_{G,X}\big(\sigma_g(\rho(t+i)), \sigma_h(\rho'(t+i))\big) \mid t \in \mathbb{N}\} \right\},$$

i si basten les mateixes condicions sobre les funcions anàlogues, $\hat{\lambda}_{s,k}$ i $\hat{\varphi}_k$, que obtendrem amb aquesta substitució per a assegurar que G té el problema de la paraula resoluble. És a dir, si G admet una secció σ tal que $\hat{\lambda}_{s,k} < n - (k-s)$ o $\hat{\varphi}_k < n - (k+1)$, per a n suficientment gran, aleshores G té el problema de la paraula resoluble? Tot apunta a que la resposta a aquesta pregunta és afirmativa: les mateixes condicions sobre φ i Φ asseguren que G té el problema de la paraula resoluble, i pareix que totes les construccions dels diagrames de van Kampen fetes pel cas sincrònic per $\lambda_{s,k}$ i φ_k no es veuen afectades en el cas asincrònic (el nombre de cares dels diagrames de van Kampen quedarà multiplicat per dos).

D'altra banda, $G_\sigma(g,h) \le F_\sigma(g,h)$ per a tots $(g,h) \in K_{G,X}(n)$. Això planteja la pregunta sobre quina és la distància mínima $H_\sigma(g,h)$ entre σ_g i σ_h tal que $H_\sigma(g,h) \le F_\sigma(g,h)$ i tal que la funció $\Psi(n)$, definida com $\Psi(0) = 0$ i, per a tot $n > 0$,

$$\Psi(n) = \max\{H_\sigma(g,h) \mid (g,h) \in K_{G,X}(n)\},$$

sigui tal que $\Psi(n) < n-1$ impliqui que G té el problema de la paraula resoluble.

(c) Sigui G un grup. Per obtenir fites sobre la funció de Dehn δ_G de G, es construeixen diagrames de van Kampen $\mathcal{D}_w$ per a tota paraula nul-homotòpica

w, respecte de qualque presentació finita $\mathcal{P}$ de G, tal que el perímetre de les seves cares i el nombre de cares $\text{area}_{\mathcal{P}}(\mathcal{D}_w)$ està *controlat*. Ara bé, la *forma* d'aquests diagrames sempre és la mateixa. Pareix natural intentar trobar altres diagrames de van Kampen amb una forma *diferent*. Un candidat d'aquest altre tipus de diagrames és el diagrama determinat per l'elecció d'un punt $p_w \in V(\Gamma_G)$ (que depèn de w) i que té com a arestes interiors les paraules corresponents als camins *radials* des de p_w a $\sigma_{\pi(w(i))}$, per a tot $i \in \{0, \ldots, l(w)\}$ (Figura 2.6).

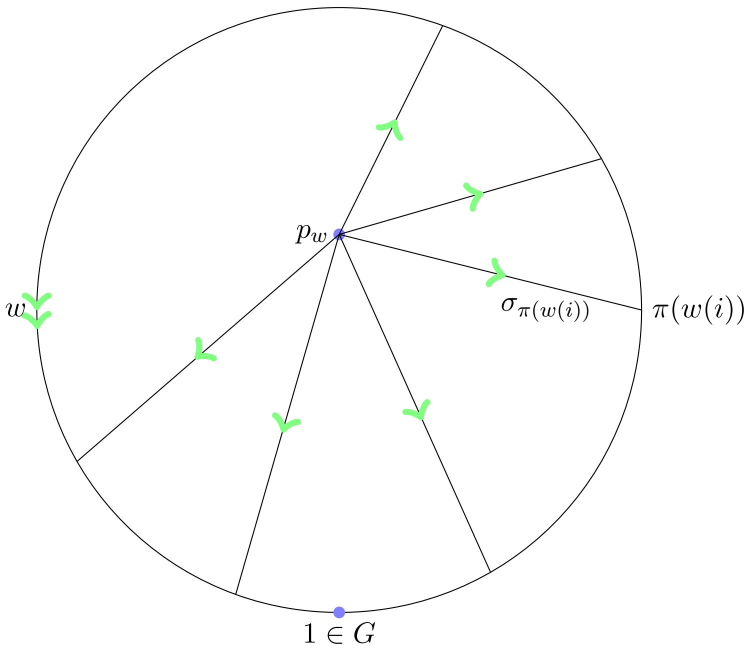


Figura 2.6 El diagrama *radial* construït a partir d'un punt $p_w \in V(\Gamma_G)$ i σ.

Si $p_w = 1 \in G$, aleshores aquest diagrama coincideix amb el diagrama construït en el cas de φ.

Un cas interessant és prendre p_w com a $g \in G$ tal que fa mínim $d(g, \pi(w(i_0))) + d(g, \pi(w(i_1)))$, amb $i_0, i_1 \in \mathbb{N}$ tals que $d(\pi(w(i_0)), \pi(w(i_1))) = \text{diam}(w)$, on $\text{diam}(w)$ indica la distància màxima entre dos elements qualssevol del conjunt $\{\pi(w(i)) \mid i = 0, \ldots, l(w)\}$ (que pel Lema 1.3.16, és menor que $l(w)/2$); si $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, aquest centre coincideix amb el centre geomètric del camí tancat determinat per w. En aquest cas, la longitud de les paraules dels camins radials d'aquest diagrama pot ser bastant més baix que els camins corresponents al diagrama de van Kampen format amb $p_w = 1$. Per tant, en principi, es pot obtenir un diagrama de van Kampen amb un nombre de cares menor i, per tant, una millor fita superior de la funció de Dehn.

Referències

[1] G. Baumslag, A. G. Myasnikov, and V. Shpilrain, Open problems in combinatorial group theory, a *Groups, Languages and Geometry. 1998 AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Geometric Group Theory and Computer Science, July 5-9, 1998, Mount Holyoke College*, número 250 a Contemporary Mathematics (American Mathematical Society, 1999), p. 113-115.

[2] A. A. Bernasconi, *On HNN-Extensions and the complexity of the word problem for one-relator groups*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics. University of Utah, (1994). Disponible a http://www.math.utah.edu/~sg/Papers/bernasconi-thesis.pdf (darrer accés, agost de 2009).

[3] J.-C. Birget, A. Y. Ol'shanskiĭ, E. Rips, and M. Sapir, *Isoperimetric functions of groups and computational complexity of the word problem*, Annals of Mathematics **156** (2002), no. 2, 476-518

[4] B. H. Bowditch, *A short proof that a subquadratic isoperimetric inequality implies a linear one*, Michigan Mathematical Journal **92** (1995), no. 1, 103-107

[5] N. Brady and M. R. Bridson, *There is only one gap in the isoperimetric spectrum*, Geometric and Functional Analysis **10** (2000), no. 5, 1053-1070

[6] N. Brady, M. R. Bridson, M. Forester, and K. Shankar, *Snowflake groups, Perron-Frobenius eigenvalues and isoperimetric spectra*, Geometry & Topology **13** (2009), no. 1 . Disponible a l'arXiv.org: 0608155v2.

[7] N. Brady and M. Forester, *Density of isoperimetric spectra*, arXiv.org (2008) 0812.1036v1.

[8] N. Brady, T. Riley, and H. Short, *The Geometry of The Word Problem for Finitely Generated Groups*. (Berlin, 2007). Disponible una versió preliminar a http://www.crm.cat/Conferences/0405/WordProblem/publications.htm (darrer accés, agost de 2009).

[9] S. G. Brick, *On dehn functions and products of groups*, Transactions of the American Mathematical Society **335** (1993), no. 1, 369-384

[10] M. R. Bridson, *On the geometry of normal forms in discrete groups*, Proceedings of the London Mathematical Society **67** (1993), no. 3, 595-616

[11] M. R. Bridson, *Fractional isoperimetric inequalities and subgrup distorsion*, Journal of the American Mathematical Society **12** (1999), no. 4, 1103-1118

[12] M. R. Bridson, The geometry of the word problem, a *Invitations to Geometry and Topology*, editat per S. M. S. Martin R. Bridson (Oxford University Press, 2002), p. 29-92. Disponible a http://people.maths.ox.ac.uk/~bridson/papers/bfs/ (darrer accés, agost de 2009).

[13] M. R. Bridson, *Combings of groups and the grammar of reparameterization*, Commentarii Mathematici Helvetici **78** (2003), no. 4, 752-771

[14] M. R. Bridson and T. R. Riley, *Free and fragmenting filling length*, Journal of Algebra **307** (2007), 171-190

[15] M. R. Bridson and T. R. Riley, *Extrinsic versus intrinsic diameter for riemannian filling-discs and van kampen diagrams*, Journal of Differential Geometry **82** (2009), no. 1, 115-154 Disponible una versió preliminar a l'arXiv: 0511004v2.

[16] J. Burillo and J. Taback, *Equivalence of geometric and combinatorial dehn functions*, New York Journal of Mathematics **8** (2002), 169-179 . Disponible a l'arXiv.org: 0103081v1.
[17] I. Chiswell, *A Course in Formal Languages, Automata and Groups*. (London, 2009).
[18] P. de la Harpe, *Topics in Geometric Group Theory*. (Chicago, 2000).
[19] M. Dehn, *Über unendliche diskontinuierliche gruppen*, Mathematische Annalen **71** (1912), 116-144 Traducció anglesa per J. Stillwell: On infinite discontinuous groups, in *Papers on group theory and topology.* Springer-Verlag, 1987.
[20] T. Dymarz, *Billipschitz equivalence is not equivalent to quasi-isometric equivalence for finitely generated groups*, arXiv.org (2009) 0904.3764v2.
[21] D. B. A. Epstein *et al.*, *Word processing in groups*. (Boston, 1992).
[22] S. M. Gersten, Dehn functions and l_1-norms of finite presentations, a *Algorithms and Classification in Combinatorial Group Theory*, editat per G. Baumslag and C. F. Miller III, número 23 a MSRI Publications (Springer-Verlag, Berlin, 1992), p. 195-224.
[23] S. M. Gersten, Isoperimetric and isodiametric functions of finite presentations, a *Geometric Group Theory volume 1*, editat per G. Niblo and M. Roller, número 181 a London Mathematical Society Lecture Note Series (Cambridge University Press, Cambridge, 1993), p. 79-96.
[24] P. A. Grillet, *Abstract Algebra*. (New York, 2007), segona ed.
[25] M. Gromov, Hyperbolic groups, a *Essays in Group Theory*, editat per S. M. Gersten, número 8 a Mathematical Sciences Research Institute (Springer, New York, 1987), p. 75-263.
[26] V. S. Guba, *On dehn functions of free products of groups*, Proceedings of the American Mathematical Society **127** (1999), no. 7, 1885-1891
[27] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*. (Boston, 2001), segona ed.
[28] M. Kapovich and B. Leeb, *On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds*, Geometric and Functional Analysis **5** (1995), 582–603
[29] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*. (Berlin, 2001).
[30] W. Magnus, *Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation*, Mathematische Annalen **106** (1932), 295-307
[31] W. Magnus, *Residually finite groups*, Bulletin of the American Mathematical Society **75** (1969), 305-316
[32] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*. (New York, 2004).
[33] J. Meier, *Groups, Graphs and Trees. An Introduction to the Geometry of Infinite Groups*, volume 73 of *London Mathematical Society Student Texts*. (Cambridge, 2008).
[34] C. F. Miller III, *On group-theoretic decision problems and their classification*. (Princeton University Press, Princeton, 1971).
[35] C. F. Miller III, Decision problems for groups: survey and reflections, a *Algorithms and Classification in Combinatorial Group Theory*, editat per G. Baumslag and C. F. Miller III, número 23 a MSRI Publications (Springer-Verlag, Berlin, 1992), p. 1-59.
[36] C. F. Miller III, *Combinatorial group theory* (no publicat, 2004).

[37] C. F. Miller III and P. E. Schupp, Some presentations of the trivial group, a *Groups, Languages and Geometry. 1998 AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Geometric Group Theory and Computer Science, July 5-9, 1998, Mount Holyoke College*, número 250 a Contemporary Mathematics (American Mathematical Society, 1999), p. 113-115.
[38] D. E. Muller and P. E. Schupp, *Groups, the theory of ends, and context-free languages*, Journal of Computer and System Sciences **26** (1983), no. 3, 295-310
[39] P. S. Novikov, *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory*, Proceedings of Steklov Mathematical Institute **44** (1955), 1-145 . Traducció anglesa a l'American Mathematical Society Translations (2) 9 (1958), 1-122.
[40] A. Y. Ol'shanskiĭ, *Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequality*, International Journal of Algebra and Computation **1** (1991), no. 3, 281-289
[41] G. Quenell, Combinatorics of free-product graphs, a *Geometry of the spectrum. 1993 Joint Summer Research Conference on Spectral Geometry, July 17-23, 1993, University of Washington, Seattle*, número 173 a Contemporary Mathematics (American Mathematical Society, 1994), p. 257-282.
[42] S. Rees, Hairdressing in groups: a survey of combings and formal languages, a *The Epstein Birthday Schrift*, editat per I. Rivin, C. Rourke, and C. Series, número 1 a Geometry & Topology Monographs (Mathematical Sciences Publishers, Berkeley, 1998), p. 493-509. Disponible a http://msp.warwick.ac.uk/gtm/ (darrera accés, agost de 2009).
[43] D. Renault, *Enumerating planar locally finite cayley graphs*, Geometriae Dedicata **112** (2005), no. 1, 25-49 Disponible a l'arXiv.org: 0309017v1.
[44] T. R. Riley, *Asymptotic Invariants of Infinite Discrete Groups*, Ph.D. thesis, Corpus Christi College. University of Oxford, Hilary Term, (2002a).
[45] T. R. Riley, *The geometry of groups satisfying weak almost-convexity or weak geodesic-combability conditions*, Journal of Group Theory **5** (2002b), 513-525
[46] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*. (New York, 1996), segona ed.
[47] G. S. Sacerdote, *Some undecidable problems in group theory*, Proceedings of the American Mathematical Society **36** (1972), no. 1, 231-238
[48] M. Sapir, J.-C. Birget, and E. Rips, *Isoperimetric and isodiametric functions of groups*, Annals of Mathematics **156** (2002), no. 2, 345-466 . Disponible una versió preliminar a l'arXiv.org: 9811105v1.
[49] A. Seress, *An introduction to computational group theory*, Notices of the American Mathematical Society **44** (1997), no. 6, 671-679
[50] H. Short, *Groups and combings* (no publicat, 1990).
[51] J. Stillwell, *The word problem and the isomorphism problem for groups*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **6** (1982), no. 1
[52] C. Vaccaro, *A new approach to van Kampen lemma*, ArXiv.org (2008) 0802.3544v5.
[53] K. Whyte, *Quasi-isometries* (Berkeley, 2007). Disponible a www.math.utah.edu/˜ malone/QI/notes.pdf (darrer accés, agost de 2009).

Índex alfabètic