Sistema axiomàtic

per TOMASA CALVO

Al llarg dels anys s'han produït canvis en l'estructura del pensament causats pel progrés de la ciència. Així T.S. Kuhn troba que existeix un alt paral·lelisme entre l'estructura de les revolucions científiques i les revolucions polítiques, considera que el desenvolupament de les ciències no és gaire diferent del desenvolupament de la literatura, de la música, de les arts i de moltes d'activitats humanes; en fi, es permet dubtar que el desenvolupament de la ciència «sigui un procés d'evolució cap a qualque cosa» (la veritat) i li sembla il·lusoria la noció d'un paral·lel entre l'ontologia d'una teoria i la seva contrapart real en la naturalesa. De la Scientific Antobiography d'Urax Planche pren Kuhn: «Una nova veritat científica no triomfa mitjançant el convenciment dels seus oponents: fent-los veure la llum, sinó més aviat ¿perquè aquests oponents arriben a morir i creix una nova generació que s'hi familiaritza?».

Les matemàtiques ofereixen veritats que per una banda no són gens trivials, i per altra banda assoleixen un ideal de veritat absoluta que el més exigent científic pot desitjar. L'opinió actual més comuna dels matemàtics és que aquesta veritat absoluta no existeix per als homes ni fins i tot en les matemàtiques, perquè tant la seva universalitat, com la seva necessitat resulten confoses, cosa que fa suposar que s'ha oblidat la idea de ciència considerada com l'estudi d'alguna cosa per les seves darreres causes, i per tant fa referència sempre a la veritat. Veritat a la qual tendim tots, i que és present o hi ha d'esser en tota investigació científica. Així doncs, les matemàtiques ens aidaran a raonar amb lògica, ens aidaran a conèixer la veritat emperò no són la veritat. Això permet d'assegurar que aquesta afirmació actual no és certa.

Dels canvis de què parlàvem abans, sens dubte, han anat sorgint els diferents mètodes científics fenomenològic, semàntic, aixomàtic, etc.

Tractaré del mètode axiomàtic perquè és el propi de les matemàtiques.

I. Generalitats

Si el coneixement no és donat immediatament, ha de ser conegut mediatament d'un altre, cosa que implica concloure una proposició d'una altra o deduir la segona de la primera.

Una idea bàsica de la metodologia científica és que la veritat d'una proposició ha d'esser intruïda directament o indirectament, és a dir per la simple aprehensió o bé per deducció.

D'una sèrie d'enunciats certs, dits premisses, i una sèrie de regles podem deduir un altre enunciat anomenat conclusió.

L'operació corresponent es diu demostració.

Hi ha dues formes fonamentals de conclusió: deducció i reducció. Totes dues poden presentar-se respectivament amb els següents esquemes:

1) Si A, també B
   És així que A
   Doncs B

2) Si A, també B
   És així que B
   Doncs A.

Podem dubtar de la segona regla, en la reducció, perquè concloure l'antecedent d'un condicional, quan s'afirma el conseqüent, no és vàlid en lògica. (Un raonament és lògicament vàlid, si de permissas certes s'obté una conclusió certa). Del primer esquema podem dir que el raonament és vàlid, ja que la regla aplicada és el Modus Ponendo-Ponens.

Luckasiwiez demostrà que la inducció no és més que un cas de la reducció. I.M. Bochenski ens mostra el següent raonament com un exemple clar de reducció: S'ha comprovat que tres bocins de misto a, b i c cremen a 60 graus, d'això deduïm que el misto s'inflama als 60 graus. L'esquema conclusiu és «si tots els bocins de misto prenen als 60 graus, també hi prendran a, b i c i és així que a, b i c prenen als 60 graus, per tant tots els bocins de misto cremen als 60 graus».

La regla de deducció és absolutament infal·lible, no pot afirmar-se la mateixa cosa de la reducció. Com s'ha deixat entreveure, una regla infal·lible correspon sempre a una llei lògicament vàlida. Per a la deducció, la lògica ofereix no només la primera premissa sinó també el fonament de la regla conclusiva; per a la reducció només ofereix la premissa.

II. Mètode axiomàtic

Ja en el s. III Euclides inicia la sistematització de la Geometria, crea i utilitza el mètode axiomàtic intentant estructurar aquesta disciplina en forma lògico-deductiva. Els matemàtics noucentistes tengueren el mateix propòsit respecta a la matemàtica moderna, i hi aplicaren el mateix mètode, això demostra la importància de l'obra euclidiana. A finals del segle passat apareix la tendència dels matemàtics a dur la seva investigació cap a les coses generals i abstractes, per deslligar la matemàtica, del domini de la imaginació i la intuició.

Per al formalista la matemàtica comença en el paper. Vol com a creativitat matemàtica qualque cosa clara ben definida i ben tallada.

L'intucïonista aplica la seva intuïció; elabora amb certa imprecissió i obscuritat les distintes nocions i després inicia la seva activitat matemàtica.

L'intuïcionisme és imprecís i fosc a les seves primeres activitats prematemàtiques emperò no és mai arbitrari; el formalisme gaudeix d'un marge d'arbitrarietat gran, el seu mètode és axiomàtic; pressuposa l'existència dels seus objectes i de les relacions que les lliguen. Es pot dir en certa manera que el formalista converteix la matemàtica en un joc. Segons l'intuïcionista, l'exactitud matemàtica és en l'entendiment humà i per al formalista és en el paper.

Es considera que l'intuïcionista elabora els seus axiomes, així apareix interessat en el tipus de raonament que els formalistes utilitzen.

Entre els formalistes, s'hi troba Hilbert, qui deia: «Segons la meva opinió tot el que pot esser objecte de pensament científic s'adquireix pel mètode axiomàtic, i per tant, i indirectament, per la matemàtica sempre que la seva forma estigui en raó per a una teoria. Com més penetrem en les capes cada vegada més profundes serem més conscients de la nul·litat dels nostres pensaments». La matemàtica, sembla criada a desenvolupar un paper rector en l'edifici de les ciències constituïdes pel mètode axiomàtic.

Sembla que el mètode axiomàtic, fa més fàcil trobar generalitzacions i aplicacions que podrien haver passat inadvertides si s'hagués fet servir un mètode més intuïtiu. Es pensa que la vertadera font de la dinàmica matemàtica és en el pensament constructiu guiat per la intuïció, perquè es considera que la forma axiomàtica és un ideal però no és l'essència de les matemàtiques.

La intuïció constructiva de les matemàtiques a què ens hem referit feia de les matemàtiques una ciència comparable a la música i a l'art.

A) - La paraula axioma, ve del grec. El seu significat original és dignitat, és a dir, el que té valor, o sigui reconeixement de la validesa. Per a alguns filòsofs significava un enunciat que serveix de principi per a d'altres, que se'n dedueixen. En aquest sentit, un axioma, és una proposició especialment important, de la qual depenen les altres.

L'axioma és una proposició primitiva d'un sistema científic, és a dir, una proposició que s'adverteix sense demostració. A partir del conjunt d'axiomes es dedueixen rigorosament totes les altres proposicions del sistema científic en qüestió: ens diuen que és una proposició significativa dins el sistema. Les regles de transformació o interferència ens diuen com deduir altres proposicions de les donades.

Postulat a vegades s'usa com a sinònim d'axioma. Però també té un sentit més específic, el d'una proposició primitiva en una àrea concreta del coneixement, per exemple els postulats geomètrics d'Euclides.

Aristòtil opinava que la ciència ha de partir d'uns axiomes; aquests axiomes serien principis directament aprehesos, es captarien amb més o menys força, però una vegada assolits serien intuïtivament obvis, ja que hi ha una capaci-

Fotografia: NEUS VERA

tat mental de veure principis o axiomes dits nous o «intellectus».

Així com del fet de relacionar o ordenar proposicions se'n diu epistema o «scientia». Els, axiomes expressen la raó per què totes les altres coses ocorren, són la causa de les altres proposicions.

És clar que en la Història no es poden afirmar uns axiomes allà on se seguesquin totes les altres coses; per tant des del punt de vista aristotèlic la història no és ciència i per això la seva ètica-política, és menys ciència que la física.

En canvi a partir de Descartes, molts de filòsofs seguien un mètode com més geomètric possible. Espinosa dugué a terme el projecte d'aciomatitzar la filosofia.

S'ha abandonat el concepte que els axiomes expressen les causes de tot el que succeix; només impliquen les conclusions, és a dir, se cerquen expressions matemàtiques fàcils i intel·ligibles que permetin preveure, però si no, es considera que aquesta llei expressa una causa.

Enfront del sistema clàssic la metodologia moderna presenta aquestes variacions:

1) El sistema axiomàtic és construït formalment, en un sistema de signes. La interpretació d'aquests signes no pertanyen al sistema.

2) Amb la formalització es fa innecessària l'evidència, la seguretat, i la prioritat ontològica exigida pels clàssics. Un axioma es distingeix dels altres ennunciats del sistema només perquè no és deduïble en el sistema.

3) Els axiomes es distingeixen de les regles; en el sistema axiomàtic modern es consideren dues classes de principis: els axiomes (lleis) i les regles (indicacions).

4) Mitjançant la formació i la distinció entre axiomes i regles s'ha relativitzat el concepte de deducció, no es parla de deducció en general, sinó només amb relació a un determinat sistema.

5) A la vora del sistema axiomàtic dels enunciats ara n'hi ha un altre de semblant, una estreta relació: el sistema axiomàtic de les expressions.

B) En la construcció del sistema axiomàtic es procedeix actualment així: 1er Es trien una sèrie d'enunciats que han de fer les funcions d'axiomes, és a dir, que s'incorporen al sistema sense demostració. 2on S'estableixen les regles segons les quals s'ha de procedir en el sistema. 3er Es dedueixen nous enunciats segons les regles establertes.

Davant cada enunciat deduït, s'indica amb quins axiomes i amb l'ajut de quina regla es procedeix. Dels primers enunciats (amb o sense ús dels axiomes), se'n van deduint de nous. Això demostra que un sistema axiomàtic és determinat pels seus axiomes i les seves regles.

C) Un sistema axiomàtic ha de satisfer certs requisits, segons els estudis de Kurt Boede entre d'altres.

1er Ha d'estar lliure de contradicció. Aquest requisit fou formulat pels antics filòsofs, i precisat amb rigor en el nostre temps. Aquest requisit significa que no pot donar-se una proposició i la seva negació a la vegada. La lògica ha demostrat que en un sistema on hi ha una contradicció qualsevol enunciat és deduïble del sistema. Aquest requisit de no contradicció significa no només que no hi ha d'haver contradicció en els axiomes, sinó també que d'ells no es pot deduir una contradicció. En lògica la forma de la contradicció $P \wedge \sim P$ (P és qualsevol proposició). Dues premisses són contradictòries si una és la negació de l'altra. Una sèrie de premisses són contradictòries, si se'n dedueix una contradicció mitjançant lleis lògiques; de la mateixa manera una proposició donada és una contradicció si la podem expressar sota la forma $P \wedge \sim P$. Dos exemples de premissa o premisses que són contradictòries: a) De $\sim(S \vee \sim S)$ es pot deduir $(\sim S \wedge S)$ per una llei de Morgan, la qual cosa és la forma d'una contradicció. b) de $D \rightarrow J$; D; $\sim J$ que Modus Ponludo-Ponens a les dues primeres premisses deduim J y de J i $\sim J$ per a llei d'adjunció deduim $J \wedge \sim J$ cosa que és una contradicció i per això les tres premisses donades són contradictòries.

2on El sistema ha d'esser complet, és a dir, dels seus axiomes és possible deduir tots els enunciats vertaders del seu domini i independents en els axiomes sense que cap sigui deduïble d'un altre. Així mateix l'esteticisme actual exigeix un nombre mínim d'axiomes i una formalització rigorosa, que només és tenguda en compte pels matemàtics lògics; els altres matemàtics procedeixen més lliurement i sovint es valen de la inducció.

D) Un sistema axiomàtic modern conté un sistema constitutiu, que pot esser considerat com un sistema axiomàtic d'expressions. Es construeix de manera anàloga al sistema d'enunciats.

En primer lloc es determina una classe d'expressions que han de figurar com a fonamentals; són incorporades sense definició. Després s'introdueixen algunes relges segons les quals es poden introduir en el sistema noves expressions.

E) La deducció pot esser progressiva i regressiva, en totes dues és coneguda la veritat dels axiomes i se cerca la veritat de les conclusions. En la deducció progressiva es parteix de les premisses certes i en la regressiva, de la conclussió, és a dir, s'estableix l'enunciat que s'ha de demostrar i després s'indiquen les lleis conegudes prèviament i necessàries per a la demostració.

Els grans descobriments han tingut lloc d'aquesta manera, primer s'establiren uns principis, la demostració dels quals s'aconseguia molt més tard, encraa que fos amb premisses conegudes abans.

Fins aquí un petit desenvolupament del sistema axiomàtic i la seva estructura, segons s'han anat donant els canvis en el pensament actual motivats pel progrés de la ciència.

BIBLIOGRAFIA

TORANZOS F. *Enseñanza de las Matemáticas*. Ed. Kapelusz, S.A. Buenos Aires, 1971.

DOU A. *Fundamentos de la Matemática*. N.C.L. Barcelona, 1974.

Werner HEISENBERG. *Más allá de la Física*. Biblioteca de autores cristianos. Madrid, 1974.

BOCHENSCKI, I.M. *Los métodos actuales del pensamiento*. Rialp. Madrid, 1977.

WEIL, H. *Filosofía de las Matemàticas y de la Ciencia natural*. México, 1965.

COURANT, R. y ROBBINS, H. *¿Qué es la matemática?* Aguilar, S.A. Madrid, 1965.