FUNDAMENTO DEL CONCEPTO DE AREA

por TOMASA CALVO
ANGEL IGELMO

INTRODUCCION

Tratamos en este artículo de establecer el fundamento del concepto de área desde el punto de vista matemático.

El esquema que aquí presentamos se basa en la teoría de la medida, particularizada a ciertos tipos de conjuntos planos, que llamamos conjuntos elementales, entre los que cabe destacar el triángulo y la circunferencia. En la adaptación llevada a cabo, el tema constituye un capítulo que se puede explicar, en el programa de Matemáticas de las Escuelas de Magisterio (área de Ciencias), después de haber establecido los conceptos de número real, sucesiones y series de números reales. Se ha evitado entrar en demostraciones pues sólo se trata de establecer la línea a seguir desde unas definiciones hasta unos teoremas, que nos permitirá justificar la medida del área del triángulo y circunferencia a partir del área de rectángulo (que se da por definición).

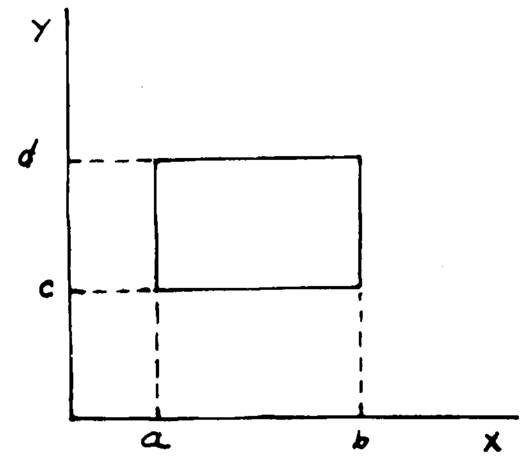
Establecer el fundamento de este tema, así como de cualquier otro, nos parece importante porque entendemos que los métodos didácticos deben arrancar de dichos fundamentos.

MEDIDA DE CONJUNTOS PLANOS

Llamamos rectángulo de R^2 (R, cuerpo de los números reales) a conjuntos de la forma

$$(x, y) \in R^2 \ / \ a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d$$

donde cualquier $\leqslant$ puede sustituirse por $<$.



Los vértices del rectángulo son los puntos del plano

(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)

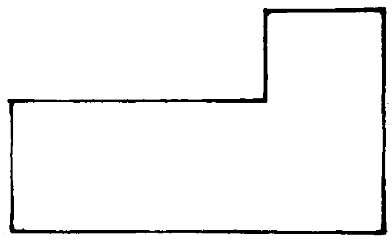
si $a = b$ ó $c = d$, el rectángulo se reduce a un segmento

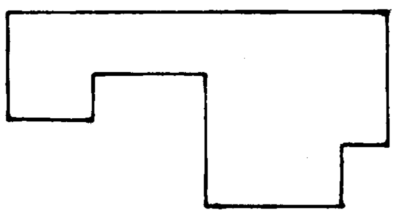
si $a = b$ y $c = d$ tendremos un punto

si $a > b$ ó $c > d$ tendremos el conjunto vacío

Establecemos a continuación la definición siguiente: Llamamos conjunto elemental, al que se puede representar, por lo menos, como unión de un número finito o numerable, de rectángulos, dos a dos disjuntos.

Con esta definición resulta que todo rectángulo es un conjunto elemental. Otros ejemplos de conjuntos elementales son los de la figura





Los conjuntos elementales del plano verifican las propiedades siguientes:

a) La intersección de un número finito de conjuntos elementales es otro conjunto elemental.

b) La unión de un número finito o de una familia numerable de conjuntos elementales, es otro conjunto elemental.

A continuación se define el área o medida de un rectángulo, P, de vértices (a, c), (a, d), (b, c), (b, d) como el número real

$$m(P) = (b - a) \cdot (c - d)$$

Con esta definición se tienen las siguientes propiedades:

a) $m(P) \geqslant O$

b) Si $P \notin Q$, entonces $m(P) \leqslant m(Q)$.

c) Si el rectángulo es vacío hacemos el convenio: $m(\emptyset) = O$

d) Si P y Q son disjuntos convenimos que $m(P \cup Q) = m(P) + m(Q)$.

e) Si P y Q no son disjuntos se demuestra que

$m(P \cup Q) = m(P) + m(Q) - m(P \cap Q)$

Para definir el área o medida de un conjunto elemental supondremos que éste es acotado, es decir, que existe un rectángulo que lo contiene (de esta manera evitamos áreas no finitas).

Si A es un conjunto elemental y $(P_n)_n$ es una familia numerable de rectángulos, disjuntos dos a dos, tales que

$A = \bigcup_n P_n$

definimos el área de A como el número real

$m(A) = \sum_n m(P_n)$

Esta definición es correcta, pues la serie anterior es convergente (si A es acotado), y la suma de la serie no depende de la descomposición de A en rectángulos.

Esta definición verifica las propiedades:

a) $m(A) \geqslant O$

b) si $A \subset B$, entonces $m(A) \leqslant m(B)$

c) si A y B son tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces $m(A \cup B) = m(A) = m(B)$, y si $A \cap B \neq \emptyset$ Ñ, entonces $m(A \cup B) = m(A) \angle m(B) - m(A \cap B)$.

donde A y B son conjuntos elementales acotados.

Finalmente se llega a un par de teoremas, de gran interés para nosotros por sus aplicaciones:

a) Si $(A_n)_n$ es una sucesión de conjuntos elementales disjuntos dos a dos, entonces

$m(\bigcup_n A_n) = \sum_n m(A_n)$

b) Si $(A_n)_n$ es una sucesión de conjuntos elementales tales que $A_n \subset A_{n=1}$, para todo n, entonces

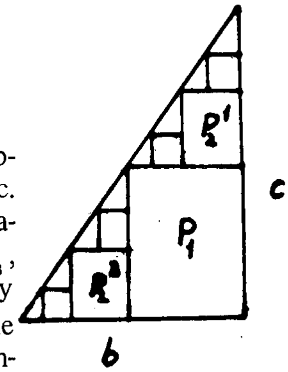
$m(\bigcup_n A_n) = \lim m(A_n)$

APLICACIONES

En este apartado hacemos aplicación de la metodología anterior al triángulo y a la circunferencia.

Basta trabajar con un triángulo rectángulo, pues cualquier triángulo es unión de dos triángulos rectángulos.

La figura adjunta da una idea intuitiva de como se puede efectuar una descomposición en rectángulos.



El primer rectángulo, P_1, se obtiene tomando la mitad de b y c. Los rectángulos P_2^1, P_2^2 son los lados b/4 y c/4. Los rectángulos P_3^1, P_3^2, P_3^3, P_3^4 son de lados $b/2^3$ y $c/2^3$. Con este proceso, se obtiene una familia numerable de rectángulos disjuntos, dos a dos, que recubren el triángulo. En tal caso el área vendrá dada al límite de la serie.

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} + 2\,\frac{b}{4} \cdot \frac{c}{4} + 4\,\frac{b}{2^3}\,\frac{c}{2^3} + \dots =$$

$$= bc\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2^2}\right) + 2^2\left(\frac{1}{2^3}\right)^2 + \dots\right)$$

serie geométrica de razón 1/2, cuya suma vale

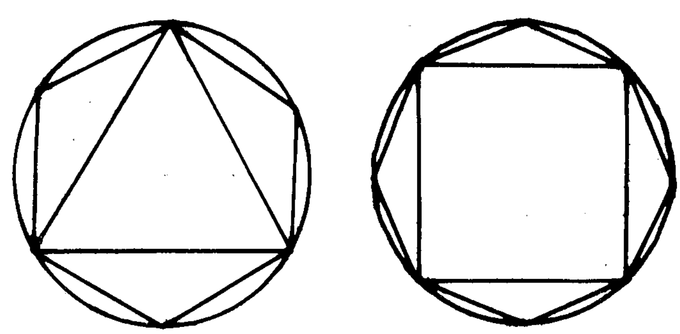
$$bc\,\frac{1/4}{1 - 1/2} = \frac{1}{2}\,bc$$

La circunferencia es unión de polígonos regulares inscritos en ella. Por ejemplo, formar la sucesión de polígonos que se obtienen partiendo del triángulo, o del cuadrado.

El área de cualquier polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r viene dado por

$$m(P_n) = \frac{n\,r^2}{2}\ \text{sen}\ \frac{2\,\Pi}{n}.$$

Descomponer el polígono en n triángulos isósceles.



Aplicando el último teorema del apartado anterior, resulta que el área sería el límite de las áreas de la familia de polígonos $(P_n)_n$, n = 4, 8, 32,... (Tomando por ejemplo la sucesión que origina el rectángulo).

Teniendo en cuenta que sean $\frac{2\,\Pi}{n}$ es equivalente a $\frac{2\,\Pi}{n}$ se obtiene $\lim m(P_n) = \Pi\, r^2$.