UNA CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DELS NOMBRES BORROSOS DISCRETS I LES SEVES APLICACIONS

Tesi Doctoral

Programa de doctorat de MATEMÀTIQUES

AUTOR: Juan Vicente Riera Clapés

DIRECTOR: Joan Torrens Sastre

Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
Gener 2012

Juan Vicente Riera Clapés: *UNA CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DELS NOMBRES BORROSOS DISCRETS I LES SEVES APLICACIONS,* Tesi Doctoral
Programa de doctorat de MATEMÀTIQUES

Palma, Gener 2012

D. Joan Torrens Sastre, Doctor en Informàtica per la Universitat de les Illes Balears i Catedràtic d'Escola Universitària de l'àrea de Ciències de la Computació i Intel·ligència Artificial del Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de les Illes Balears,

FA CONSTAR:

que la present memòria "UNA CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DELS NOMBRES BORROSOS DISCRETS I LES SEVES APLICACIONS" presentada per Juan Vicente Riera Clapés per optar al grau de Doctor en Matemàtiques, ha estat realitzada sota la seva direcció i reuneix la suficient matèria original per ser considerada com a tesi doctoral.

Palma, a 30 de gener de 2012

El Director, L'interessat,

Joan Torrens Sastre Juan Vicente Riera Clapés

A na Pilar, na Marta i en Joan

Als meus pares

ABSTRACT

Discrete fuzzy numbers are finite fuzzy subsets such that their membership function verifies similar properties (normality, convexity and monotonicity) to those satisfied by the fuzzy numbers. In this thesis we study different algebraic structures, lattices and monoids, in the set of discrete fuzzy numbers. In particular, we analyze in depth the bounded distributive lattice, $\mathcal{A}_1^{L_n}$, of discrete fuzzy numbers whose support is a subset of consecutive natural numbers included in the finite chain $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$. On this lattice, different methods are also provided to build aggregation functions. Thus, it is shown that from an aggregation function defined on the finite chain L_n, for example, a t-norm, a t-conorm, a nullnorm or a uninorm, similar aggregation functions can be constructed on this fuzzy lattice. We study the properties of these new functions, and in the particular case of uninorms, which are extensions of discrete uninorms in U_{min} and in U_{max}, and nullnorms, we provide a partial characterization of them. On the other hand, this work also focuses on the study and construction of implication functions on $\mathcal{A}_1^{L_n}$. In particular, we show that the extension of a S, QL or D discrete implication function produces an S, QL or D implication function on $\mathcal{A}_1^{L_n}$. In the case of the extension of an R-implication function, we show that it does not generate a R-residual implication function on this fuzzy lattice, and thus, we provide a specific method for the construction of the residual implication of a t-norm $\mathcal{T}$ which is an extension of a discrete t-norm T.

In the last part of this work, we propose two possible applications of the developed theory. Firstly, we investigate different aggregation information processes based on the extension of discrete aggregation functions. Specifically, we propose two methods. The first one is based on the extension of discrete t-norms and discrete t-conorms and the second one is based on the extensions of idempotent discrete uninorms. Each of these methods is applied to decision making problems and subjective evaluation, allowing a direct aggregation of fuzzy valuations, obtaining a fuzzy assessment of the same class. Finally, we propose different extensions of the classical concept of multiset. From all these extensions, we study several properties and lattice structures.

RESUM

Els nombres borrosos discrets són una classe de subconjunts borrosos finits tals que la seva funció de pertinença verifica propietats anàlogues (normalitat, convexitat i monotonia) a les que satisfan els nombres borrosos. En aquesta tesi s'estudien diferents estructures algèbriques, reticles i monoides, en el conjunt de nombres borrosos discrets. En particular, s'analitza en profunditat el reticle distributiu fitat, $\mathcal{A}_1^{L_n}$, de nombres borrosos discrets que tenen per suport un subconjunt de nombres naturals consecutius inclòs en la cadena finita $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$. Endemés, sobre aquest reticle, es proporcionen diferents mètodes per a construir funcions d'agregació. Així, és demostra que a partir d'una funció d'agregació definida sobre la cadena finita L_n, com per exemple, una t-norma, una t-conorma, una uninorma o una nulnorma, es poden construir anàlogues funcions d'agregació sobre dit reticle borrós. S'estudien les propietats d'aquestes noves funcions i, en el cas particular de les uninormes, que són extensions d'uninormes discretes de U_{min} i de U_{max}, i de les nulnormes, es proporcionen caracteritzacions parcials d'aquestes. D'altra banda, aquest treball també es centra en l'estudi i construcció de funcions d'implicació sobre dit reticle

borrós. En particular, es demostra que l'extensió d'una S, QL o D implicació discreta, produeix una S, QL o D implicació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. En el cas de l'extensió d'una R-implicació discreta, es veu que no genera una R-implicació residual sobre el reticle borrós. D'aquesta manera es proposa un mètode especific que permet la construcció de la implicació residual d'una t-norma $\mathcal{T}$ que és extensió d'una t-norma discreta T.

La darrera part d'aquesta memòria proporciona dues possibles aplicacions de la teoria desenvolupada. En la primera, s'investiguen diferents processos d'agregació de la informació basats en l'extensió de funcions d'agregació discretes. En concret, es proposen dos mètodes. El primer d'ells es fonamenta en l'extensió de t-normes i t-conormes discretes i el segon en extensions d'uninormes idempotents discretes. Cadascun d'aquests procediments és aplicat a problemes de presa de decisions i d'avaluació subjectiva, que permeten fer una agregació directa de les valoracions borroses donant com a resultat una valoració borrosa de la mateixa classe. Finalment, es proposen diferents extensions del concepte clàssic de multiconjunt. De cadascuna d'aquestes extensions s'estudien diferents propietats i estructures reticulars.

RESUMEN

Los números borrosos discretos son una clase de subconjuntos borrosos finitos tales que su función de pertenencia verifica propiedades análogas (normalidad, convexidad y monotonía) a las que satisfacen los números borrosos. En esta tesis se estudian diferentes estructuras algebraicas, retículos y monoides, en el conjunto de números borrosos discretos. En particular, se analiza en profundidad el retículo distributivo acotado, $\mathcal{A}_1^{L_n}$, de números borrosos discretos que tienen por soporte un subconjunto de números naturales consecutivos incluido en la cadena finita $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$. Además, sobre este retículo, se proporcionan diferentes métodos para construir funciones de agregación. Así, se demuestra que a partir de una función de agregación definida sobre la cadena finita L_n, como por ejemplo, una t-norma, una t-conorma, una uninorma o una nulnorma, se pueden construir análogas funciones de agregación sobre dicho retículo borroso. Se estudian las propiedades de estas nuevas funciones y, en el caso particular de las uninormas, que son extensiones de uninormas discretas de U_{min} y U_{max}, y de las nulnormas, se proporcionan caracterizaciones parciales de estas. Por otro lado, este trabajo también se centra en el estudio y construcción de funciones de implicación sobre dicho retículo borroso. En particular, se demuestra que la extensión de una S, QL o D implicación discreta, produce una S, QL o D implicación sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. En el caso de la extensión de una R-implicación discreta, se ve que no genera una R-implicación residual sobre el retículo borroso. De esta forma, se propone un método específico que permite la construcción de la implicación residual de una t-norma $\mathcal{T}$ que es extensión de una t-norma discreta T.

En la última parte de esta memoria se proponen dos posibles aplicaciones de la teoría desarrollada. En la primera, se investigan diferentes procesos de agregación de la información basados en la extensión de funciones de agregación discretas. En concreto, se proponen dos métodos. El primero de ellos se fundamenta en la extensión de t-normas y t-conormas discretas y el segundo en extensiones de uninormas idempotentes discretas. Cada uno de estos procedimientos es aplicado a problemas de toma de decisiones y de evaluación subjetiva, que permiten hacer una agregación directa de las valoraciones borrosas, dando como resultado una valoración borrosa de la misma clase. Finalmente, se proponen diferentes extensiones del concepto clásico de multiconjunto. De cada una de estas extensiones se estudian diferentes propiedades y estructuras reticulares.

PUBLICACIONS

La majoria de resultats d'aquesta memòria han estat publicats en diverses revistes, i presentats en alguns congressos nacionals i internacionals.

Els articles publicats en revistes o llibres de difusió internacional són:

1. *On the addition of discrete fuzzy numbers*, publicat a "WSEAS Transactions on Mathematics". [33]
2. *Discrete fuzzy numbers defined on a subset of natural numbers*, publicat a "Theoretical Advances and Applications of Fuzzy Logic and Soft Computing". [35]
3. *Maximum and Mininum of Discrete Fuzzy numbers*, publicat a "Frontiers in Artificial Intelligence and Applications: artificial intelligence research and development". [37]
4. *Aggregation of bounded fuzzy natural number-valued multisets*, publicat a "Lecture Notes in Artificial Intelligence". [41]
5. *A construction method of aggregation functions on the set of discrete fuzzy numbers*, publicat a "Advances in intelligent and soft computing". [119]
6. *Extension of discrete t-norms and t-conorms to discrete fuzzy numbers*, publicat a "Fuzzy Sets and Systems". [45]
7. *Weighted means of subjective evaluations*, publicat a "Soft Computing in Humanities and Social Sciences". [46]
8. *Aggregation of subjective evaluations based on discrete fuzzy numbers*, publicat a "Fuzzy Sets and Systems". [122]
9. *Residual Implications on the set of discrete fuzzy numbers*, article sotmès a la revista Information Sciences.

Les comunicacions a congressos presentades i publicades a les corresponents actes de cada congrés són:

1. *On the addition of discrete fuzzy numbers*, WSEAS International Conference of Applied Mathematics (2006). [34]
2. *Números borrosos asociados a un número borroso discreto*, ESTYLF 2006. [32]
3. *Extended distances between fuzzy points*, EUSFLAT-2007. [36]
4. *Extension of discrete t-norms and t-conorms to discrete fuzzy numbers*, AGOP-2009. [38]
5. *Lattice properties of discrete fuzzy numbers under extended min and max*, IFSA-EUSFLAT 2009. [39]
6. *Aggregation and arithmetic operations on fuzzy natural number-valued multisets*, ESTYLF-2010. [40]
7. *Triangular norms and conorms on the set of discrete fuzzy numbers*, IPMU-2010. [44]

8. *Negation Functions in the Set of Discrete Fuzzy Numbers*, IPMU-2010. [42]
9. *S-implications in the set of discrete fuzzy numbers*, IEEE-WCCI 2010. [43]
10. *Fuzzy implications defined on the set of discrete fuzzy numbers*, EUSFLAT-2011. [120]
11. *Uninorms and nullnorms on the set of discrete fuzzy numbers*, EUSFLAT-2011. [121]
12. *Implicaciones residuadas en el conjunt de números borrosos discretos*, Comunicació acceptada en ESTYLF-2012.

Destacar també que, durant la realització d'aquest treball, he gaudit de la subvenció del següent projecte: MTM2009 − 10962 del Ministeri d'Educació i Ciència (DGI).

AGRAÏMENTS

És clar que amb unes poques paraules no podré expressar tot el meu agraïment cap aquelles persones que, d'una manera o d'una altra, m'han anat donant el seu suport durant tot el temps que he invertit en realitzar aquest treball. El que resulta evident és que, sense aquest recolzament que m'heu donat, no hagués pogut materialitzar la present tesi.

En primer lloc, vull agrair a Joan que hagi volgut acompanyar-me en la darrera part d'aquesta travessia. Diuen que els finals dels camins solen ser el més durs però, en el meu cas, tot ha resultat més fàcil amb el seu suport constant, amb l'enorme capacitat de fer feina que m'ha transmès, així com amb la seva facilitat per adaptar-se a nous reptes. Gràcies a ell he pogut superar tots els entrebancs i només puc afirmar que ha fet possible que, fer aquesta darrera passa junts, fos tot un plaer.

D'altra banda, vull donar les gràcies a tots els membres del grup LOBFI pel suport que m'han donat durant tot aquest temps, ja sigui en seminaris on hem tractat temes ben interessants, com, molt especialment, amb les paraules d'encoratjament que em varen donar ja fa un poc més d'un any, en un moment molt dur per a tots nosaltres. En particular, no vull oblidar-me de Gaspar, qui sempre m'ha recolzat en totes les empreses que he anat emprenent durant tots aquests anys.

Voldria també agrair al Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, per donar-me l'oportunitat de fer feina en aquesta casa i per totes les facilitats que m'han brindat en aquest període per poder realitzar la meva tasca. En particular, no vull oblidar-me d'en Cesc i d'en Manolo pels seus bons consells.

También quiero recordar y agradecer de manera muy especial la ayuda de Humberto Bustince. Desde que nos conocimos , allén de los mares siempre ha estado a mi lado y espero que así sea en el futuro para poder desarrollar nuevos retos profesionales.

Vull agrair a Francesc Esteva el brindar-me, en tot moment, els seus consells i la seva disponibilitat per poder plantejar-li les dubtes que em poguessin anar sorgint al llarg de tot aquest temps.

També vull agrair la disposició d'Àlex Casadesús, amb qui he passat molts bons moments i que no només ha estat capaç de resoldre els múltiples dubtes que sobre la llengua de Shakespeare li he plantejat, sinó també d'estimular-me per millorar el meu coneixement de l'anglès.

Vull mencionar els meus pares, la meva germana i la meva família pel suport que sempre he trobat al seu costat. Ara bé, aquesta empresa hagués estat impossible si no tingués en tot moment el recolzament de na Pilar, la meva dona i amiga, que m'ha ajudat i m'ajuda a aixecar-me en cadascú dels moments complicats. Evidentment, no puc oblidar-me dels meus fills, na Marta i en Joan, i de l'alegria que em dóna dia a dia veure com riuen, creixen i aprenen a ser feliços.

I, per finalitzar, voldria dedicar les darreres paraules d'agraïment a Jaume Casasnovas. El destí ha volgut que no estigui present entre tots nosaltres però això no ha impedit que les seves paraules i les seves idees estiguin ben presents en aquestes pàgines, el contingut de les quals vaig poder comentar amb ell en tantes i tantes ocasions. Gràcies, per tant, també a tu.

ÍNDEX

ÍNDEX DE FIGURES

ÍNDEX DE TAULES

1

INTRODUCCIÓ

Al llarg de la història, independentment del tipus de civilització que es tractàs, egípcia, babilònica, grega, romana, xinesa, àrab, etc; aquesta sempre ha tingut la necessitat de realitzar recomptes o mesuraments d'acord als seus menesters (polítics, socials, econòmics, científics, etc). Per exemple, tal com cita Carl B. Boyer [18] *"les inscripcions egípcies ens revelen una sorprenent familiaritat amb nombres grans des d'una data molt antiga; per exemple en un museu d'Oxford es conserva una maça real de fa més de 5000 anys en la que apareix enregistrat un número de 120.000 presoners i 1.422.000 cabres capturades"*. Per aquesta raó, les diferents cultures han anat definint diferents conjunts de regles i símbols que tenien per objecte la representació dels nombres i l'establiment de les seves operacions.

De manera semblant, la Lògica, entesa en paraules de C. L. Chang [51] com *"l'estudi sobre els mètodes i principis del raonament humà en totes les seves possibles formes"* ha anat evolucionant al llarg de l'història. En efecte, ja Aristòtil deixeble de Plató (segle IV abans de Crist) tractava d'identificar les formes de raonament humà, per tractar de crear criteris per discernir en les discussions filosòfiques. Aquests dos grans pensadors de la Grècia Clàssica ja deixaven entreveure la idea de lògiques multivaluades *"les coses no tenen perquè ser d'un cert tipus o deixar de ser-ho, sinó que hi ha tota una escala intermèdia entre els dos extrems"*. Però no és fins a mitjans del segle XIX quan es situa habitualment el veritable naixement de la Lògica Matemàtica. Així l'any 1847, G. Boole publica el seu treball titulat *The Mathematical Analysis of Logic*. Amb l'aportació de Boole es deixen de deduir els teoremes de la lògica a partir del llenguatge ordinari i es passa a la construcció de sistemes formals que permeten deduir resultats mitjançant procediments purament algebraics, per interpretar-los desprès en el llenguatge ordinari. Des de llavors, la teoria de conjunts i el raonament algebraic han anat de la mà de la Lògica Matemàtica, tant en el seu estudi i el seu desenvolupament com en totes les generalitzacions i extensions que han aparegut.

Ja en el segle XX [136], Jan Łukasiewicz (1878-1956) va elaborar a l'any 1920 una lògica trivalent; Emil Post (1897-1954), en 1921, una lògica finitament polivalent (amb un nombre de valors de veritat superior a dos però finit), i posteriorment Alfred Tarski (1901-1983) i Jan Łukasiewicz varen elaborar lògiques infinitament polivalents (amb un nombre infinits de valors de veritat). Com es veu cada vegada més en l'àmbit matemàtic, es va reafirmant més l'idea originària aristotèlica que les coses no són necessàriament blanques o negres sinó que hi ha tota una escala de valors intermedis entre els dos extrems. I per tant, totes aquestes noves idees es van allunyant poc a poc de les concepcions més rígides de la lògica clàssica bivalent.

L'any 1965, Lotfi A. Zadeh [161] amb la publicació del seu treball *Fuzzy Sets* va posar els fonaments de la *Lògica Borrosa* i els conjunts borrosos. Endemés, no solament en aquest treball s'introdueixen els conjunts borrosos, sinó també les operacions bàsiques entre ells. És aquesta formalització dels conceptes la que permet l'assentament i acceptació d'aquesta nova teoria al món matemàtic, encara que no sense nombroses dificultats en els seus inicis (veure per exemple [160]). Ara bé, a més a més de les dificultats abans esmentades, resulta difícil pensar que el professor Zadeh fos conscient inicialment de les enormes repercussions i de l'èxit que a hores d'ara té la seva teoria i del futur encara més prometedor que tindrà. Actualment, la Lògica Borrosa s'emmarca en una branca de coneixement més ampla anomenada *Soft Computing*, que engloba també la computació neuronal, la computació evolutiva, l'aprenentatge automàtic i el raonament probabilístic.

De fet, s'ha comprovat que en moltes situacions i problemes concrets, la utilització de la Lògica Borrosa dóna millors resultats que la clàssica. Així, cada vegada és més habitual trobar noves tecnologies que incorporen en el seu funcionament la Lògica Borrosa: Des de la NASA pel control de posició del Transbordador Espacial, la Ford i altres cases d'automòbils, amb el sistema d'aparcament automàtic, el sistema de frenat ABS o el canvi de marxes automàtic; fins a diverses marques d'electrodomèstics amb rentadores, condicionadors d'aire, enfocament automàtic de càmeres fotogràfiques, etc. Aquesta explosió d'aplicacions i productes de mercat ha estat possible gràcies a la dedicació de nombrosos investigadors centrats en els diversos camps de la Lògica i els conjunts borrosos, tant des del punt de vista aplicat com del purament teòric (veure per exemple [67, 84, 149]). Des del punt de vista formal, la lògica borrosa ha seguit la pauta general i el seu desenvolupament ha anat de la mà del raonament algebraic. D'aquesta manera, diverses estructures algebraiques han anat apareguent a la par que les seves corresponents lògiques formals borroses. Així per exemple, la lògica *Monoidal T-norm based lògic* (MTL), introduïda per Esteva i Godo [72], té per semàntica les MTL-àlgebres que generalitzen les BL-àlgebres que Hájek [87] havia proposat com a semàntica de la lògica bàsica BL. Entre les principals extensions de les MTL-àlgebres cal destacar, les IMTL- àlgebres [72] (semàntica de la lògica borrosa involutiva bàsica IMTL), les MV-àlgebres que són les àlgebres associades a la lògica de Łukasiewicz introduïdes per Chang l'any 1958 [52], etc. Altres estudis interessants sobre lògiques borroses poden trobar-se en [73, 75, 74, 108, 107].

Entre els diferents tipus de conjunts borrosos, cal destacar un cas particular anomenat *nombre borrós* que des d'un punt de vista intuïtiu descriu situacions del tipus *nombres que estan propers o un nombre donat* o *nombres que estan en el voltant d'un interval*. Tals concepcions són essencials per a caracteritzar estats de variables borroses, i, conseqüentment, juguen un paper molt important en moltes aplicacions, com ara, el control borrós, els problemes de decisió, el raonament aproximat, l'enginyeria, etc [84, 90]. Formalment, perquè un subconjunt borrós $A : \mathbb{R} \to [0, 1]$ sigui anomenat nombre borrós, aquest ha de verificar al manco aquestes tres propietats [90]:

I) Ha de ser un subconjunt borrós normal,

II) la seva funció de pertinença ha de ser semi-continua superiorment, i per tant, els seus α-nivells, A^α, hauran de ser intervals tancats per a cada $\alpha \in (0, 1]$,

III) el seu suport, $supp(A)$, ha de ser fitat.

La condició de normalitat (és a dir, existència de valors del suport de A que tenen per valor de pertinença 1) està motivada pel fet de que la idea *nombres propers a* r engloba, en particular, al propi nombre $r \in \mathbb{R}$, i d'aquesta forma generalitza el concepte de nombre real. La segona i tercera propietat, possibilitaran definir de manera senzilla, a través del principi d'extensió o bé fens ús de l'aritmètica d'intervals [116], les operacions aritmètiques bàsiques entre nombres borrosos. Per tant veim, com mencionaven al principi de la nostra exposició, que una vegada més en aquest cas, a partir de les idees del professor Zadeh, s'ha definit un conjunt de regles i símbols que te per objecte la representació dels nombres (en aquest cas per descriure quantitats aproximades o que tenen un cert grau de desconeixement) i així permetre la realització d'operacions aritmètiques entre ells. Aquests tipus de conjunts borrosos han estat estudiats amplament en la literatura des de molts i variats aspectes: classificacions, distàncies entre nombres borrosos, avaluació de quantitats borroses, aproximacions de nombres borrosos, operacions amb nombres borrosos, aplicacions dels nombres borrosos, generalitzacions de nombres borrosos, etc (veure per exemple [19, 66, 67, 83, 84, 90, 104, 117, 147, 148, 149, 150, 151].

L'any 2001, W. Voxman [144] introdueix una altra possible generalització del concepte de nombre, que anomena *nombre borrós discret*. Entès com un subconjunt borrós de la recta real amb suport finit i tal que la seva funció de pertinença verifica propietats similars a les establertes per a un nombre borrós (creixement fins que assoleix el valor 1 i decreixement posterior). Ara bé, en aquest treball no es realitza cap estudi de possibles operacions aritmètiques i no és fins l'any 2005, (G. Wang en [145]) que es proporciona una caracterització dels nombres borrosos discrets i es defineix una possible suma entre ells, basada en els α-nivells. Una de les primeres conclusions que es deriven d'aquest treball és que el principi d'extensió de Zadeh no és un mètode vàlid per a definir operacions aritmètiques ni reticulars (màxim i mínim) entre nombres borrosos discrets, donat que la seva aplicació en general produeix subconjunts borrosos finits que no satisfan totes les condicions imposades per Voxman. Així doncs, el significat numèric d'aquest tipus de subconjunt borrós, juntament amb la finitud del seu suport (que possibilita una connexió amb els treballs desenvolupats sobre cadenes finites [57, 97, 98, 99, 100, 101, 105]) i la manca d'estudi envers a operacions i estructures algèbriques en el conjunt de nombres borrosos discrets, van ser una motivació per aprofundir en aquest tema com posteriorment anirem explicant.

Un altre punt fonamental emmarcat dins la teoria de la lògica borrosa és la investigació dels diferents connectius lògics, en especial, t-normes i t-conormes que modelitzen la intersecció i la unió de conjunts borrosos respectivament; les negacions que modelitzen al complementari d'un subconjunt borrós i les funcions d'implicació que modelitzen els condicionals borrosos. Aquests tipus d'operadors no són només importants en l'àmbit dels conjunts borrosos, sinó que també tenen un paper rellevant en molts altres camps com els espais mètrics probabilístics (on van néixer les t-normes), la probabilitat i estadística, l'economia, la teoria de la mesura, els sistemes experts, la morfologia matemàtica, la presa de decisions i l'agregació de la informació. Ara bé, aquests connectius lògics estan englobats dins d'un marc més general d'operadors que són les anomenades *funcions d'agregació* [12, 30, 81, 134].

La teoria d'operadors d'agregació està fortament relacionada amb tot tipus de sistemes basats en regles, els sistemes experts, la morfologia matemàtica, la lògica borrosa, el raonament aproximat, etc. Bàsicament, el que es planteja en tots aquests camps científics, és que arriba un moment en què resulta necessari transformar o fusionar una certa quantitat de dades en un resultat concret. Això significa ser capaç d'obtenir, a partir d'unes entrades donades, una sortida que estigui relacionada amb les mateixes segons el problema tractat. Des d'un punt de vista formal, aquesta agregació de la informació ve modelitzada a través d'una funció (anomenada d'agregació) $F : L^n \to L$ $(n \geqslant 2)$, on L és el conjunt on pertanyen les dades a agregar, amb certes propietats que varien segons les necessitats i els camps on han de ser aplicades. Formalment, el conjunt de dades a agregar és interpretat en la seva versió més àmplia com un conjunt parcialment ordenat L amb màxim i mínim. En l'àmbit dels conjunts borrosos, s'agafa com a conjunt L l'interval unitat $[0, 1]$, però també hi ha estudis en altres dominis, com ara reticles en general, àlgebres, i, molt especialment, cadenes finites utilitzades en la modelització de l'agregació qualitativa. Per exemple, en el cas de l'interval unitat, la definició més general inclou només la condició de creixement en cada variable tals que en la frontera verifiquin $F(0, \cdots, 0) = 0$ i $F(1, \cdots, 1) = 1$. Ara bé, depenent de les necessitats i fites en cada cas, es pot requerir que les funcions d'agregació satisfacin altres propietats addicionals. Per exemple, la simetria (commutativitat) es pot requerir en el cas de que el conjunt de dades o opinions a agregar tinguin la mateixa fiabilitat, la idempotència es requereix si es pretén una propietat de consens, la associativitat perquè permet estendre de forma única operadors d'agregació binaris a operadors d'agregació n-dimensionals.

Entre les funcions d'agregació associatives més conegudes, que seran motiu d'estudi en aquest treball, cal citar les mencionades t-normes i t-conormes i, per la seva rellevància donat que són extensions de les mateixes, destacam les uninormes [28, 29, 55, 77, 78, 96, 98] i les nulnormes ([29], i [97] on apareixen amb el nom de t-operadors). Entre les funcions d'agregació en general (no associatives) es troben molts altres tipus, com les mitjanes ponderades, els OWAs, etc [12, 30, 134]. En aquest treball es vol iniciar l'estudi de funcions d'agregació definides en el conjunt de nombres borrosos discrets. La motivació ve donada perquè en moltes ocasions les dades a agregar no són nombres, sinó més aviat informació borrosa o fins i tot informació qualitativa. Per aquesta raó, es fa necessari la possibilitat de construir funcions d'agregació que puguin fusionar directament aquest tipus d'informació borrosa en una dada també borrosa i de la mateixa naturalesa que les inicials.

Per altre lloc, un dels temes més importants i actuals en lògica borrosa és l'estudi dels condicionals borrosos del tipus "Si p, alehores q" amb p i q proposicions borroses. La modelització matemàtica d'aquests condicionals es fa a partir de les anomenades *funcions d'implicació borroses*. Aquest tipus de funcions han estat estudiades com a extensions de les funcions d'implicació en la lògica clàssica. És ben conegut [8, 90] que en aquest marc hi ha diferents formes equivalents de definir-les. Emperò, les seves extensions en lògica borrosa no ho són equivalents i donen lloc a distints tipus de funcions d'implicacions. Entre aquests tipus d'implicacions, els més utilitzats es defineixen mitjançant funcions d'agregació (t-normes i t-conormes) de la següent manera:

- *Implicacions fortes* o *S-implicacions*, definides per

$$I_{S,N}(x,y) = S(N(x),y), \text{ per a tots } x,y \in [0,1],$$

  on S és una t-conorma i N una negació forta. Aquestes apareixen com a una generalització de la implicació booleana clàssica $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

- *Implicacions residuals* o *R-implicacions*, definides per

$$I_T(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x,z) \leqslant y\}, \text{ per a tots } x,y \in [0,1],$$

  on T és una t-norma (habitualment contínua per l'esquerra[1]). El seu nom és degut a que provenen dels reticles residuats basats en la propietat de residuació que, en el cas de t-normes, es pot escriure com

$$T(x,y) \leqslant z \text{ si i només si } I(x,z) \geqslant y \text{ per a tots } x,y,z \in [0,1], \tag{1.1}$$

- QL-operacions definides per

$$I(x,y) = S(N(x),T(x,y)), \text{ amb } x,y \in [0,1]$$

  on S és una t-conorma, T és una t-norma i N és una negació borrosa (habitualment forta). Provenen de la lògica de la mecànica quàntica.

- D-operacions definides per

$$I(x,y) = S(T(N(x),N(y)),y), \text{ amb } x,y \in [0,1]$$

  on S és una t-conorma, T és una t-norma i N és una negació borrosa (habitualment forta). Són la contraposició respecte a N de les QL-operacions quan N és forta.

Aquest tipus d'implicacions han estat extensament estudiats per molts d'autors i no només en el marc de l'interval unitat [6, 7, 8, 23, 60, 90, 101, 102, 127, 138] sinó també en altres dominis de definició com ara cadenes finites [99, 100, 101, 138] o reticles fitats en general [55, 56]. Una de les causes d'aquest extensiu estudi és que les implicacions no només

1 La propietat de residuació 1.1 es verifica per una t-norma T si i només si T és contínua per l'esquerra [72].

s'utilitzen per representar els condicionals, sinó per realitzar inferències principalment a través del modus ponens i del modus tollens. Això fa que dites implicacions siguin essencials tant en la lògica borrosa i el raonament aproximat, com en el control borrós i en la computació amb paraules (veure [101] i les seves referències). En aquest sentit, la gran quantitat de possibles camps d'aplicació que tenen aquests tipus d'operadors fa que es plantegi i defensi la importància de tenir tants models diferents d'implicacions borroses com sigui possible [137] (veure també [101]). En particular, en l'article esmentat els autors arriben a la conclusió que fins i tot són necessaris nous models d'implicacions borroses. Per tant, seguint aquesta direcció plantejada, la recerca de noves funcions d'implicació, en aquest cas funcions d'implicació en el conjunt de nombres borrosos discrets, serà un altre fita que es durà a terme en aquest treball.

D'altra banda, diferents tipus de generalitzacions de conjunts borrosos han estat introduïdes en la literatura amb l'objectiu de millorar les eines clàssiques de modelatge difús proporcionades pels conjunts clàssics borrosos. Per exemple cal citar, els conjunts intuïcionistes d'Atanassov [2, 21, 22, 24, 25, 63], els conjunts borrosos interval-valorats [9, 20, 22, 27, 64, 62, 61], els conjunts borrosos tipus 2 [26, 106, 114], els multiconjunts borrosos [31, 47, 109, 112, 113, 155] i recentment, interpretats com a casos especials de multiconjunts, els conjunts borrosos hesitant [126, 133, 154] o el conjunts borrosos n-dimesionals [10, 11, 131]. Amb aquestes idees, veim que l'estudi de multiconjunts és un àrea d'interès actual ja sigui des del punt de vista teòric (veure a més [17, 50, 80, 125]) o també des de les seves possibles aplicacions [110, 111, 115]. Dins d'aquest camp d'investigació es troba l'estudi de les extensions del concepte de multiconjunt. Així, a partir de la definició clàssica, com a aplicacions $M : X \to \mathbb{N}$, la idea és canviar el conjunt de valoració $\mathbb{N}$, i en comptes d'emprar aquest, utilitzar-ne d'altres que es determinaran en funció del context on s'apliqui i del grau d'incertesa que es tingui sobre les dades de l'univers X. Amb aquesta línia d'investigació en aquesta tesi es proposa una nova extensió del concepte de multiconjunt, generalitzant l'esposada per D. Rocacher [123] basada en la cardinalitat borrosa d'un subconjunt borrós [68, 159]. Concretament, s'analitzen els multiconjunts valorats en el conjunt de nombres borrosos discrets.

Exposat el context on està emmarcada la nostra investigació, recordem ara quines seran les fites que volem aconseguir en aquest treball i com s'aniran tractant en cada capítol.

Fita 1. *Construcció d'una estructura de reticle en el conjunt de nombres borrosos discrets.*

És ben conegut que el marc més general on es defineixen funcions d'agregació (t-normes, t-conormes, uninormes, etc) o una funció d'implicació, és en un reticle fitat $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 1, 0)$ que no sigui necessàriament una cadena [58, 55, 162]. Així en el capítol 3, la primera proposta és la construcció d'una estructura de reticle en el conjunt de nombres borrosos discrets, que denotarem per DFN. Per fer tal construcció, una primera idea seria emprar les mateixes idees que s'utilitzen [90] per a construir el reticle dels nombres borrosos, FN, via el principi d'extensió de Zadeh. El que comprovam és que aquest mètode no és vàlid per a la construcció de les funcions reticulars màxim i mínim, donat que, quant les aplicam, s'obtenen subconjunts borrosos que no verifiquen les condicions de ser un nombre borrós discret (veure per exemple les figures 9 o 10). Per aquesta raó, proposam en els teoremes 3.2.8 i 3.2.12 unes noves funcions, denotades per max i min, que solventen aquest problema. De l'anàlisi de les propietats d'aquestes funcions (veure proposició 3.2.15 i nota 3.2.16) veim que en general no es pot construir tal estructura de reticle en tot DFN. Emperò demostram que dita estructura és manté en un subconjunt molt especial de nombres borrosos discrets que denotam per $\mathcal{A}_r^S$, i que està format pels nombres borrosos discrets tals que tenen per suport un subconjunt finit de termes consecutius d'una progressió aritmètica S de nombres naturals de raó r (veure teorema 3.2.23). Endemés, en particular, veim que per a cada cadena finita de nombres naturals consecutius $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$, la terna $(\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max)$ té estructura de reticle fitat distributiu amb mínim el nombre borrós discret 1_0 (únic nombre borrós discret que té per suport el conjunt unitari 0) i màxim el nombre borrós discret 1_n (únic nombre borrós discret que té per suport el conjunt unitari n).

D'altra lloc, en la darrera secció d'aquest tercer capítol estudiam l'estructura de monoide commutatiu ordenat amb l'ordre parcial que es deriva de les operacions max i min. Per fer això, donat que el principi d'extensió de Zadeh, en general, no és un mètode vàlid, en el conjunt DFN és proposen diferents possibilitats de definició de suma (que s'utilitzarà com a operació monoidal) a través del concepte d'associació (veure definició 3.3.6). També s'analitza la relació existent entre les sumes definides a través d'associacions i la suma establerta per Wang (veure teorema 3.3.3) comprovant que és un cas particular d'un tipus d'associació que anomenam α-associació (veure teorema 3.3.33). D'altra banda, també ens plantejam quan el principi d'extensió és un mètode vàlid, i es demostra que en el cas de sumar elements del conjunt $\mathcal{A}_r^S$ aquest principi és adient. Així, com a darrer resultat obtenim que el conjunt $\mathcal{A}_1$ té estructura de monoide ordenat commutatiu amb la suma com a operació monoidal (definida equivalentment, o bé a partir del principi de Zadeh [90], o bé a partir de les α-associacions, o bé d'acord al mètode de Wang) i amb l'ordre parcial considerat en el teorema 3.2.23 (on $\mathcal{A}_1$ és el cas particular quan $S = \mathbb{N}$ i $r = 1$).

Fita 2. *Construcció de funcions d'agregació en el conjunt de nombres borrosos discrets*

En el capítol 4 ens proposam l'estudi i construcció de funcions d'agregació en el reticle fitat distributiu $(\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max, 1_0, 1_n)$ amb l'ordre induït a partir de les operacions reticulars. L'interès sobre aquest reticle resideix en que els seus elements poden ser interpretats com a valoracions discretes borroses sobre una cadena finita. D'aquesta manera podem interpretar la cadena L_n com una cadena de termes lingüístics (o de possibles valors en una informació qualitativa) del tipus $\mathfrak{L} = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$ on les lletres es refereixen als termes lingüístic nul, molt baix, baix, mitja, alt, molt alt i perfecte. Aleshores un nombre borrós sobre $\mathcal{A}_1^{L_6}$ pot identificar-se com una valoració borrosa sobre $\mathfrak{L}$. Així per exemple, una informació qualitativa del tipus $\{0.8/3, 1/4, 08./5\} \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ on $L_6 = \{0, \cdots, 6\}$ permet descriure una situació on l'expert considera molt possible que és doni una valoració alta A d'acord a l'escala lingüística $\mathfrak{L}$ (veure figura 21). Aquest tipus de valoracions són habituals entre els experts i l'estudi de funcions d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ permetrà treballar amb elles i aplicar-les en diferents àmbits com pot ser l'avaluació subjectiva i la presa de decisions com farem en el capítol 6. Així, en la secció 4.2 es veu (teorema 4.2.15 i nota 4.2.16) que a partir de qualsevol t-norma (t-conorma) T (S) suau definida sobre una cadena finita L_n és possible estendre-la al reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ essent dita extensió $\mathcal{T}$ $(\mathcal{S})$ una t-norma (t-conorma) sobre aquest reticle. En el següent apartat, es construeix una funció de negació forta sobre el reticle distributiu fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que serà emprada per fer un estudi clàssic de dualitat entre t-normes i t-conormes sobre aquest reticle fitat. Més endavant, en el capítol 5, aquesta funció de negació serà utilitzada per a construir funcions d'implicació (implicacions fortes, QL i D-implicacions).

A continuació, s'estudia l'equació de Frank a partir d'una parella $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ construïdes segons el mètode comentat. Seguidament, s'analitza la construcció de funcions d'agregació sobre el reticle distributiu fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir de funcions d'agregació, no necessàriament suaus, definides sobre la cadena finita L_n. A més, s'aprofundeix en dos casos ben coneguts que seran els de les uninormes i els de les nulnormes, establint en aquest cas caracteritzacions parcials d'aquestes funcions d'agregació, a diferència de l'entorn discret L_n, degut a que en aquest nou reticle l'ordre és parcial i per tant hi ha elements que no són comparables. Seguidament investigam si és possible construir funcions d'agregació sobre el reticle fitat distributiu $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir d'una parella de funcions d'agregació definides sobre la cadena finita L_n. En particular, es desenvolupen els casos de parelles d'uninormes i nulnormes. Veurem que considerant parelles de funcions d'agregació F, G sobre L_n amb $F \leqslant G$, podem generar una funció d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que serà compensatòria entre $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$, les extensions de F i G a $\mathcal{A}_1^{L_n}$, respectivament. Finalment, s'analitza l'extensió de funcions d'agregació n-dimensionals no necessàriament associatives.

Fita 3. *Construcció de funcions d'implicació en el conjunt de nombres borrosos discrets*

Com hem comentat al llarg d'aquesta introducció les funcions d'implicació són uns dels principals tipus de connectius en lògica borrosa ja que són amplament emprats tant en processos d'inferència com per a modelar condicionals borrosos. És per això, que la recerca de nous tipus de funcions d'implicació i de les seves aplicacions resulti un camp de candent actualitat. D'aquesta manera, en el capítol 5 estudiam la possibilitat de construir funcions d'implicació borroses en el reticle borrós $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir d'extensions de funcions d'implicació definides sobre la cadena finita L_n. Un primer resultat que s'obté (teorema 5.1.4) és que per a cada funció d'implicació discreta, I, definida sobre la cadena finita L_n, la seva extensió $\mathcal{I}$ és una funció d'implicació sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$. A més, es comprova que aquesta extensió conserva moltes propietats de l'original com ara, el principi d'intercanvi, la neutralitat per l'esquerra o la contraposició. Endemés, en les seccions 5.1.14 i 5.1.2 es demostra que extensions de S, QL i D implicacions definides sobre L_n produeixen també S, QL i D-implicacions sobre el reticle borrós $\mathcal{A}_1^{L_n}$. En canvi, aquesta propietat no es conserva en el cas d'implicacions residuals. Per aquesta raó la secció 5.2 està dedicada a la construcció i estudi de la funció d'implicació residuada derivada d'una t-norma $\mathcal{T}$, que és extensió d'una t-norma T sobre L_n. En particular, es comprova (proposició 5.2.8) que aquesta funció d'implicació verifica les propietats més habituals de qualsevol implicació residuada, com per exemple, neutralitat de la veritat, propietat d'ordenació, principi d'identitat, principi de residuació, Modus Ponens, llei d'importació per a $\mathcal{T}$ i principi d'intercanvi. A més, comprovam que aquesta construcció proposada resulta ser un generalització de la R-implicació interval-valorada definida en el conjunt d'intervals tancats de L_n (veure nota 5.2.7). Finalment, es comprova que $(\mathcal{A}_1^{L_n}, 1_0, 1_n, \min, \max, \mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}})$ és un reticle residuat fitat essent $\mathcal{T}$ l'extensió a $\mathcal{A}_1^{L_n}$ de la t-norma discreta T definida sobre L_n i $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ la seva implicació residual definida en $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

En la darrera secció, investigam la possibilitat de construir noves funcions d'implicació en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, a partir de parelles de funcions d'implicació $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ que són extensions d'una parella (I, J) de funcions d'implicació definides sobre la cadena finita L_n. A més, provam que en el conjunt de funcions d'implicació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$, $\mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$, que són extensions de funcions d'implicacions definides sobre L_n, és possible construir una estructura de reticle distributiu.

Fita 4. *Aplicacions a l'agregació qualitativa*

Com ja hem comentat, un altre objectiu en aquesta tesi és aplicar les funcions d'agregació definides sobre el conjunt de nombres borrosos discrets en diversos aspectes de l'agregació qualitativa. Així, en particular, en el capítol 6 s'investiga la possibilitat d'emprar aquestes noves funcions d'agregació, en diferents problemes de presa de decisions i d'avaluació subjectiva. En aquest sentit, cal tenir present que aquesta proposta inclou dues idees noves. Per una part, l'utilització d'aquests nous operadors d'agregació borrosos en la presa de decisions, i per una altra part, la possibilitat d'emprar directament informació borrosa produint també, una decisió expressada com un nombre borrós discret resultat de l'agregació efectuada.

Fita 5. *Multiconjunts valorats en el conjunt de nombres borrosos discrets*

Motivats per el nou tipus de multicojunts proposats per D. Rocacher [123, 124] i per J. Casasnovas i G. Mayor [31], en el capítol 7 es proposa, a partir dels resultats obtinguts en els capítols anteriors, definir dues possibles noves extensions dels multiconjunts, on en aquests casos els conjunts de valoració considerats seran $\mathcal{A}_1$ (que generalitza el proposat per D. Rocacher en [123]) i $\mathcal{A}_1^{L_n}$ (que generalitza el proposat per J. Casasnovas i G. Mayor en [31]). Per aquest tipus de multiconjunt estudiarem noves operacions i diferents propietats que es derivin de les mateixes. Així, en la secció 7.2 definim els multiconjunts naturals borrosos, que tenen per conjunt de valoració $\mathcal{A}_1$ i el denotam per $FNM(X)$. En aquest conjunt definim la suma $+$, la unió $\vee$ i la intersecció $\wedge$. Respecte de la suma, es comprova que $FNM(X)$ és monoide commutatiu i que amb les operacions $\vee$ i $\wedge$, $FNM(X)$ té estructura de reticle distributiu. Es defineix, de la manera habitual un ordre parcial i es demostra que aquest ordre és compatible amb la suma de multiconjunts i per tant $FNM(X)$ té estructura de monoide ordenat. Per altre lloc, es defineix també el cardinal d'un multiconjunt natural borrós i s'estudien algunes propietats.

En la secció 7.3, en base a la idea de multiconjunts fitats [31] (aquells multiconjunts A valorats en el conjunt de nombres naturals, tals que per a tot $x \in X$ és té que $A(x) \leqslant n$ amb $n \in \mathbb{N}$, és a dir, la multiciplitat de qualsevol element sempre serà menor que un valor n fixat) definim els multiconjunts naturals borrosos fitats, $BFNM_n(X)$, que tenen per conjunt de valoració el reticle distributiu fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$, sent $L_n = \{0, \cdots, n\}$. De manera semblant al cas anterior, es demostra que $(BFNM_n(X), \vee, \wedge)$ té estructura de reticle distributiu fitat. A partir d'aquesta propietat es defineixen operacions triangulars (t-normes i t-conormes) sobre aquest reticle fitat, que són motiu d'estudi en la secció 7.3.1. Així, es demostra que a partir d'una t-norma i una t-conorma definida sobre la cadena finita L_n és pot construir una t-norma i una t-conorma sobre $BFNM_n(X)$, i el mateix passa per una t-norma i una t-conorma definida sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. També estudiam l'equació de Frank per parelles $(\mathbb{T}, \mathbb{S})$ formades per una t-norma i una t-conorma sobre $BFNM_n(X)$ construïdes a partir de parelles (T, S) formades per una t-norma i una t-conorma suaus sobre L_n. I sobre aquest tipus de parella $(\mathbb{T}, \mathbb{S})$, que satisfan l'equació de Frank, s'estudien algunes propietats relacionades amb el cardinal d'un multiconjunt. La darrera secció d'aquest capítol està dedicada a un cas particular de multiconjunt que anomenam multiconjunts valorats mitjançant intervals.

Per acabar, volem fer notar que en aquestes línies hem destacat només els principals problemes que han motivat aquesta memòria i els resultats més importants obtinguts a partir de dites fites.

En el darrer capítol d'aquesta memòria es presenten les conclusions que es poden extreure del treball realitzat, així com una sèrie de problemes oberts que podrien ser estudiats en un futur per tal d'ampliar o millorar tot el que aquí s'ha exposat.

2 PRELIMINARS

En aquests preliminars exposam les definicions i principals resultats generals que utilitzarem al llarg de tot aquest treball. La primera secció està dedicada a repassar els principals resultats sobre operacions triangulars definides sobre la cadena finita $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$ anomenades operacions discretes, així com, les seves caracteritzacions en el cas suau. Després es mencionen els conceptes bàsics de les uninormes i nulnormes discretes, operadors que poden ser vists com una generalització de les t-normes i t-conormes discretes. Endemés, s'enumeren els distints tipus d'implicacions discretes en què es centrarà la memòria, fent especial interès en el cas de S-implicacions i implicacions residuals o R-implicacions. En la darrera secció, es presenta el concepte de nombre borrós, i es mostren alguns exemples rellevants dels mateixos. També es defineixen via el principi d'extensió de Zadeh i equivalentment mitjançant els seus conjunts de nivells, les operacions aritmètiques bàsiques entre aquests subconjunts borrosos. A més, s'estudia l'estructura de reticle distributiu que es pot considerar en el conjunt dels nombres borrosos.

2.1 OPERACIONS TRIANGULARS SOBRE UNA CADENA FINITA

Donarem per coneguts tota una serie de resultats que poden ser trobats per exemple en [105, 97]. Recordarem només les definicions i resultats més importants sobre operadors triangulars definits sobre un entorn discret, que seran emprats al llarg d'aquesta memòria.

Definició 2.1.1. *Una t-norma (també anomenada norma triangular) discreta és una operació binària* T *sobre la cadena finita* L_n*, és a dir, és una funció* $T : L_n^2 \to L_n$ *tal que per a tots* $x, y, z \in L_n$ *es satisfan les següents propietats:*

1. $T(x, y) = T(y, x)$ *(Commutativitat)*
2. $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ *(Associativitat)*
3. $T(x, y) \leqslant T(x, z)$ *si* $y \leqslant z$ *(Monotonia)*
4. $T(x, n) = x$ *(Condició de Frontera)*

Definició 2.1.2. *Una t-conorma (també anomenada conorma triangular) discreta és una operació binària* S *sobre la cadena finita* L_n*, és a dir, és una funció* $S : L_n^2 \to L_n$ *tal que per a tots* $x, y, z \in L_n$ *es satisfan les següents propietats:*

1. $S(x, y) = S(y, x)$ *(Commutativitat)*
2. $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$ *(Associativitat)*
3. $S(x, y) \leqslant S(x, z)$ *si* $y \leqslant z$ *(Monotonia)*
4. $S(x, 0) = x$ *(Condició de Frontera)*

Exemple 2.1.3. *Donarem dos exemples de cadascuna d'aquests operacions binàries.*

- *En el cas de t-normes sobre* L_n *tenim:*
  - *El mínim,* $T_{\mathbf{M}}(x, y) = \min(x, y)$

- *La t-norma de Łukasiewicz* $T_{\mathbf{L}}(x,y) = \max(0, x+y-n)$

- *En el cas de t-conormes sobre* L_n *tenim:*
  - *El màxim,* $S_{\mathbf{M}}(x,y) = \max(x,y)$
  - *La t-conorma de Łukasiewicz* $S_{\mathbf{L}}(x,y) = \min(n, x+y)$

En el cas d'operacions binàries definides sobre la cadena finita L_n la noció de continuïtat tal com es coneguda en l'interval unitat, es defineix a partir del concepte anomenat *suavitat*.

Definició 2.1.4. *Una funció* $f : L_n \to L_n$ *es diu que és suau si*

$$\mid f(x) - f(x-1) \mid \leqslant 1$$

per a tot $x \in L_n$ *amb* $x \geqslant 1$.

Definició 2.1.5. *Un operador binari* F *en* L_n *es diu suau si és suau en cada variable.*

Definició 2.1.6. *Una t-norma* T *(o una t-conorma* S*) en una cadena finita* L_n *és divisible si es compleix la següent propietat:*

$$\textit{per a tot } \; x,y \in L_n \textit{ amb } x \leqslant y \textit{ existeix } z \in L_n \textit{ tal que } x = T(y,z) \; (\textit{o } y = S(x,z))$$

Definició 2.1.7. *Una t-norma* T *(o una t-conorma* S*) en* L_n *satisfà la condició de Lipschitz quan:*

$$T(z,y) - T(x,y) \leqslant z - x \quad (\textit{o } S(z,y) - S(x,y) \leqslant z - x)$$

per a tots $x, y, z \in L_n$ *tals que* $z \geqslant x$

Un primer resultat que cal destacar és que les propietats de suavitat, divisibilitat i Lipschitz són equivalents per a t-normes discretes, veure [105].

Proposició 2.1.8. *Donada una t-norma* T *en* L_n *són equivalents les següents afirmacions:*

1. T *és divisible*

2. T *és suau*

3. T *satisfà la condició de Lipschitz*

4. T *satisfà el teorema del valor mitjà, és a dir, siguin* $T(x,y) = z$ *i* $T(x,y') = z'$ *amb* $z < z'$, *aleshores per a tot* $z'' \in [z,z']$ *existeix algun* $y'' \in [y,y']$ *tal que* $T(x,y'') = z''$

De manera semblant al cas d'operacions triangulars definides en l'interval unitat tenim,

Definició 2.1.9. *Una t-norma* T *(o una t-conorma* S*) en una cadena finita* L_n *és Arquimediana si satisfà la següent propietat: per a tots* $x, y \in L_n - \{0, n\}$ *existeix* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_T^{(m)} < y$ *(o* $x_S^{(m)} > y$*) on* $x_T^{(m)}$ *i* $x_S^{(m)}$ *estan definits com*

$$x_T^{(m)} = \begin{cases} x & \textit{si } m = 1 \\ T(x_T^{(m-1)}, x) & \textit{si } m \geqslant 2 \end{cases}$$

$$x_S^{(m)} = \begin{cases} x & \textit{si } m = 1 \\ S(x_S^{(m-1)}, x) & \textit{si } m \geqslant 2 \end{cases}$$

Definició 2.1.10. *Un element x de L_n es diu idempotent en una t-norma T (o una t-conorma S) quan $T(x,x) = x$ ($S(x,x) = x$).*

Les proposicions següents donen dues propietats bàsiques que satisfan les t-normes i les t-conormes en general.

Proposició 2.1.11. *Per a tota t-norma T, tota t-conorma S i tot $(x,y) \in L_n^2$, se satisfà:*

$$T(x,y) \leqslant T_{\mathbf{M}}(x,y) \leqslant S_{\mathbf{M}}(x,y) \leqslant S(x,y).$$

Proposició 2.1.12. *L'única t-norma que és idempotent, és a dir, que compleix que $T(x,x) = x$ per a tot $x \in L_n$ és $T_{\mathbf{M}}$, i l'única t-conorma que és idempotent és $S_{\mathbf{M}}$.*

Nota 2.1.13. *Cal destacar que per a qualsevol t-norma T o t-conorma S, 0 i n són sempre elements idempotents, ja que $T(0,0) = S(0,0) = 0$ i $T(n,n) = S(n,n) = n$. Aquests dos elements s'anomenen idempotents trivials. Quan una t-norma T o una t-conorma S només tenen idempotents trivials es diuen lliures d'idempotents.*

Un primer resultat relacionant aquests dos darrers conceptes el tenim en els següent lemma.

Lema 2.1.14. *Si T és una t-norma Arquimediana sobre L_n si i només si els únics idempotents de T són 0 i n, és a dir, T és lliure d'idempotents.*

Endemès tenim,

Lema 2.1.15. *Sigui T una t-norma en L_n. Llavors, T és Arquimediana si i només si*

$$T(x,y) \neq \min(x,y) \text{ per a tots } x,y \in L_n - \{0,n\}$$

A continuació, introduirem el concepte de suma ordinal i alguns resultats d'aquestes.

Definició 2.1.16. *Considerem $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r < a_{r+1} = n$ amb $J = \{0,1,\ldots,r\}$. Sigui $([a_i,a_{i+1}],T_i)_{i\in J}$ una família de t-normes definides en $[a_i,a_{i+1}]$. Aleshores es defineix la suma ordinal de $([a_i,a_{i+1}],T_i)_{i\in J}$, i es denota per $<([a_i,a_{i+1}],T_i)_{i\in J}>$, com la t-norma T en L_n donada per*

$$T(x,y) = \begin{cases} T_i(x,y) & \text{si } (x,y) \in [a_i,a_{i+1}]^2 \\ \min(x,y) & \text{altrament} \end{cases}$$

Proposició 2.1.17. *Sigui $T = <([a_i,a_{i+1}],T_i)_{i\in J}>$ una suma ordinal de t-normes. Aleshores, T és suau si i només si T_i és suau per a tot $i \in J$.*

El següent resultat afirma que és possible establir una classificació de les t-normes suaus en L_n.

Teorema 2.1.18. *Existeix una i només una t-norma suau Arquimediana en L_n, que denotarem per $T_{\mathbf{L}}$*

$$T_{\mathbf{L}}(x,y) = \max\{0, x+y-n\} \text{ per a tots } x,y \in L_n$$

que és coneguda com la t-norma de Łukasiewicz. A més, donat qualsevol subconjunt J de L_n contenint 0, n, existeix una i només una t-norma suau en L_n que té J com el seu conjunt d'elements idempotents, que denotarem per T_J. De fet, si J és el conjunt

$$J = \{0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{m-1} < i_m = n\}$$

llavors T_J *és la suma ordinal* $T_j =< ([i_k, i_{k+1}], T_Ł) >_{k} \in J$ *i ve donada per*

$$T_J(x,y) = \begin{cases} \max\{i_k, x+y-i_{k+1}\} & \textit{si } x,y \in [i_k, i_{k+1}] \\ & \textit{per algun } i_k \in J,\ 0 \leqslant k \leqslant m-1 \\ \min\{x,y\} & \textit{altrament} \end{cases}$$

La figura 1 mostra la representació de la t-norma suau T que té als elements del conjunt $J = \{0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{m-1} < i_m = n\}$ com a idempotents.

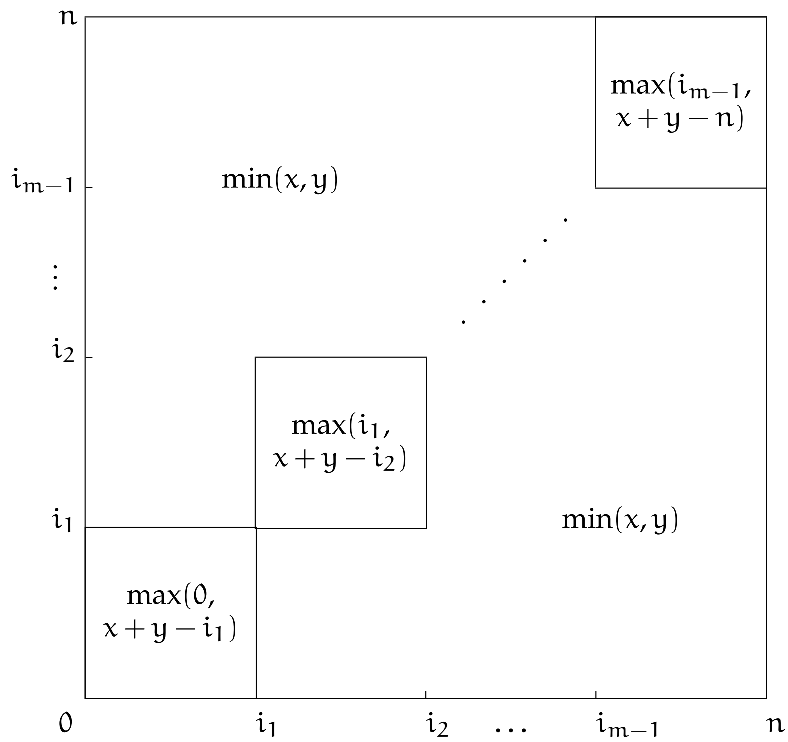

Figura 1: La t-norma T suau en L_n amb el conjunt d'idempotents $J = \{0 = i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{m-1} < i_m = n\}$.

A continuació i per provar el resultat anàleg per a t-conormes, introduirem el concepte de negació forta.

Definició 2.1.19. *Una negació forta* N *en* L_n *és una involució decreixent de* L_n *en* L_n*. Això és,* $N : L_n \to L_n$ *satisfà les condicions següents:*

1. $x \leqslant y$ *implica* $N(x) \geqslant N(y)$
2. $N(N(x)) = x$ *per tot* $x \in L_n$

Nota 2.1.20. *Una negació forta en* L_n *és una bijecció amb* $N^{-1} = N$ *gràcies a la segona propietat de les negacions fortes. Aleshores en particular, és exhaustiva i assoleix tots els valors en* L_n*. Així, existeix una i només una negació forta en* L_n *que ve donada per*

$$N(x) = n - x \textit{ per tot } x \in L_n$$

A partir d'ara N denotarà sempre aquesta negació.

Definició 2.1.21. *Denotem per* $\mathcal{T}(L_n)$ *i per* $\mathcal{S}(L_n)$ *el conjunt de totes les t-normes en* L_n *i el conjunt de totes les t-conormes en* L_n*, respectivament. Així, donada la negació forta* N *en* L_n*, es pot considerar una correspondència bijectiva de* $\mathcal{T}(L_n)$ *a* $\mathcal{S}(L_n)$*: a cada* $T \in \mathcal{T}(L_n)$ *definim* $T_N \in \mathcal{S}(L_n)$ *per*

$$T_N(x,y) = n - T(n-x, n-y) \text{ per a tots } x,y \in L_n$$

Anomenarem T_N *la t-conorma* N*-dual de* T*. De manera similar, podem considerar la correspondència inversa de* $\mathcal{S}(L_n)$ *a* $\mathcal{T}(L_n)$ *assignant a cada* $S \in \mathcal{S}(L_n)$ *la seva t-norma* N*-dual,* S_N*, on*

$$S_N(x,y) = n - S(n-x, n-y) \text{ per a tots } x,y \in L_n$$

Clarament, tenim les igualtats $(T_N)_N = T$ *i* $(S_N)_N = S$) *per a tot* $T \in \mathcal{T}(L_n)$ *i* $S \in \mathcal{S}(L_n)$*. Aquesta N-dualitat ens permet traduir moltes propietats de t-normes a les corresponents propietats de t-conormes i viceversa.*

Teorema 2.1.22. *Donat qualsevol subconjunt* J *de* L_n *contenint al* 0 *i* n*, existeix una i només una t-conorma suau en* L_n*,* S_J*, que té* J *com el conjunt d'elements idempotents. De fet, si* J *és el conjunt*

$$J = \{0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{m-1} < i_m = n\}$$

llavors S_J *ve donat per*

$$S_J(x,y) = \begin{cases} \min\{i_{k+1}, x+y-i_k\} & \text{si } x,y \in [i_k, i_{k+1}] \\ & \text{per algun } i_k \in J,\ 0 \leqslant k \leqslant m-1 \\ \max\{x,y\} & \text{altrament} \end{cases}$$

En particular, existeix una única t-conorma arquimediana sobre L_n. Aquesta t-conorma és la N-dual de T_L, és coneguda com la t-norma de Łukasiewicz i ve donada per $S_L(x,y) = \min(n, x+y)$ per a tots $x,y \in L_n$. La figura 2 representa una t-conorma S suau amb $J = \{0 = i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{m-1} < i_m = n\}$ com el seu conjunt d'elements idempotents.

Finalment recordarem un interessant resultat que relaciona l'equació de Frank i t-normes i t-conormes suaus definides sobre L_n.

Proposició 2.1.23. *Un parell* (T,S) *on* T *és una t-norma i* S *és una t-conorma en* L_n *és una solució de l'equació funcional (anomenada equació de Frank)*

$$T(x,y) + S(x,y) = x + y \text{ per tot } x,y \in L_n$$

si i només si T *i* S *són suaus amb el mateix conjunt d'elements idempotents.*

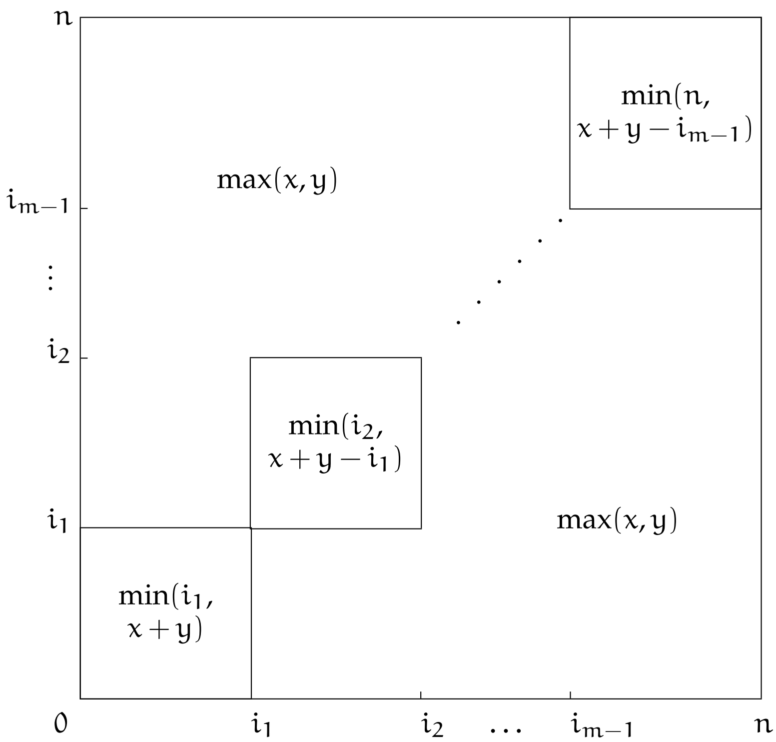

Figura 2: La t-conorma S suau en L_n amb el seu conjunt $J = \{0 = i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{m-1} < i_m = n\}$ com a elements idempotents.

2.2 UNINORMES I NULNORMES DEFINIDES SOBRE UNA CADENA FINITA

En aquesta secció presentem les uninormes i nulnormes que surten com a generalització de les t-normes i t-conormes. Un ample estudi d'aquests operadors es pot trobar, per exemple, en [57, 97, 98].

2.2.1 *Uninormes discretes*

Definició 2.2.1. *Una uninorma és una operació binària U sobre la cadena finita L_n, és a dir, és una funció $U : L_n^2 \to L_n$ tal que per a tots $x, y, z \in L_n$ es satisfan les següents propietats:*

1. $U(x, y) = U(y, x)$ *(Commutativitat)*
2. $U(U(x, y), z) = U(x, U(y, z))$ *(Associativitat)*
3. $U(x, y) \leqslant U(x, z)$ *si* $y \leqslant z$ *(Monotonia)*
4. $U(x, e) = x$ *(Per un cert $e \in L_n$ anomenat element neutre.)*

És clar que l'operació U és una t-norma quan $e = n$ i és una t-conorma quan $e = 0$. Endemés, per a qualsevol uninorma definida a L_n es verifica que $U(n, 0) \in \{0, n\}$.

Definició 2.2.2. *Direm que una uninorma U és conjuntiva si verifica $U(n, 0) = 0$ i s'anomenarà disjuntiva si satisfà $U(n, 0) = n$.*

En la secció anterior hem vist que és possible considerar t-normes (t-conormes) suaus. Però, en el cas d'uninormes no n'existeixen de suaus definides en la cadena L_n tals que el seu element neutre verifiqui que $0 < e < n$ (això és, diferents de les t-normes i t-conormes).

Tot i així, quan les corresponents t-normes i t-conormes són suaus, la uninorma pot ser suau excepte en regions molt concretes com per exemple les e-seccions. Aquest és el cas de les uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ i $\mathcal{U}_{\max}$.

Definició 2.2.3. *[97] Una operació binària $U : L_n \times L_n \to L_n$ és una uninorma de $\mathcal{U}_{\min}$ amb element neutre $0 < e < n$ si i només si existeix una t-norma T sobre $[0, e]$ i una t-conorma S sobre $[e, n]$ tal que U té per expressió*

$$U(x,y) = \begin{cases} T(x,y) & \textit{si} \ \ (x,y) \in [0,e]^2 \\ S(x,y) & \textit{si} \ \ (x,y) \in [e,n]^2 \\ \min(x,y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

Definició 2.2.4. *[97] Una operació binària $U : L_n \times L_n \to L_n$ és una uninorma de $\mathcal{U}_{\max}$ amb element neutre $0 < e < n$ si i només si existeix un t-norma T sobre $[0, e]$ i i una t-conorma S sobre $[e, n]$ tal que U ve donada per*

$$U(x,y) = \begin{cases} T(x,y) & \textit{si} \ \ (x,y) \in [0,e]^2 \\ S(x,y) & \textit{si} \ \ (x,y) \in [e,n]^2 \\ \max(x,y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

En els dos casos, quant T, S són suaus, la corresponent uninorma és suau excepte en certs punts (x, e) o (e, y) de les e-seccions.

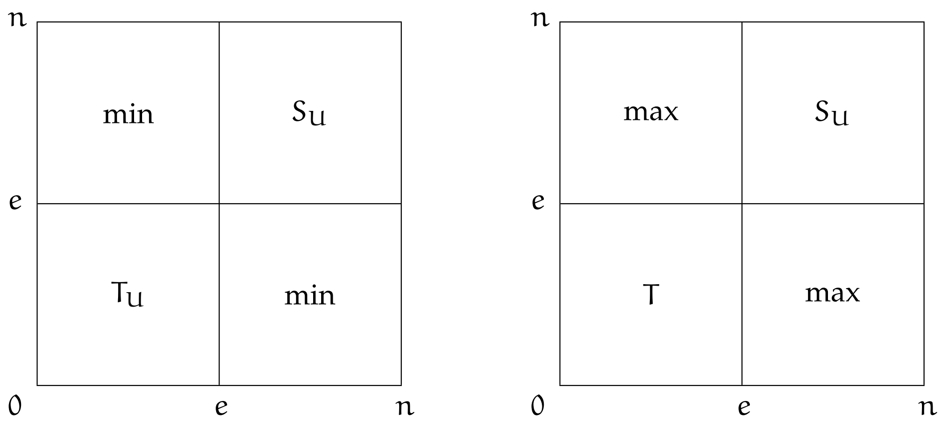

Figura 3: Estructura d'una uninorma de $\mathcal{U}_{\min}$ (esquerra) i de $\mathcal{U}_{\max}$ (dreta).

Un altre tipus d'uninorma és el format per les uninormes idempotents, és a dir, aquelles que $U(x, x) = x$ per a tot $x \in L_n$. La idempotència és una propietat fonamental a l'hora de definir operadors d'agregació. Com hem vist anteriorment, per a t-normes només se satisfà per a la t-norma mínim i per a t-conormes, només per a la t-conorma màxim. Per a uninormes, aquesta propietat dóna tota una família d'operadors que ha estat estudiada en [57] (veure també [5, 128]). Així, es pot establir una correspondènica biunívoca entre la classe de les uninormes idempotents i el conjunt de funcions decreixents $g : [0, e] \to [e, n]$ amb $g(e) = e$, de tal manera que cadascuna d'aquestes funcions determina de manera única un uninorma idempotent en L_n, i viceversa. Endemés, mitjançant aquesta correspondència és possible determinar el nombre de totes les possibles uninormes idempotents sobre L_n en funció de n. En concret es té,

Teorema 2.2.5. *Una operació binària* U *sobre* L_n *amb element neutre* $0 < e < n$ *és un uninorma discreta idempotent si i només si existeix una funció decreixent* $g : [0, e] \to [e, n]$ *amb* $g(e) = e$ *tal que*

$$U(x, y) = \begin{cases} U(x, y) = \min(x, y) & \textit{si } y \leqslant \overline{g}(x) \textit{ i } x \leqslant \overline{g}(0) \\ \max(x, y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

on $\overline{g}$ *és l'única extensió de* g*, simètrica respecte de l'identitat, donada per l'expressió*

$$\overline{g} = \begin{cases} g(x) & \textit{si } x \leqslant e \\ \max\{z \in [0, e] \mid g(z) \geqslant x\} & \textit{si } e \leqslant x \leqslant g(0) \\ 0 & \textit{si } x > g(0) \end{cases}$$

Exemple 2.2.6. *Donam a continuació exemples de funcions* g *i les seves corresponents uninormes idempotents.*

- *Si consideram la funció* $g : [0, e] \to [e, n]$ *definida com*

  $$g(x) = \begin{cases} n & \textit{si } x < e \\ e & \textit{si } x = e \end{cases}$$

  la corresponent uninorma idempotent és l'única uninorma idempotent de U_{min} *(veure figura 4).*

- *Si consideram la funció* $g : [0, e] \to [e, n]$ *definida com*

  $$g(x) = \begin{cases} e & \textit{si } x \leqslant e \\ 0 & \textit{altrament} \end{cases}$$

  la corresponent uninorma idempotent és l'única uninorma idempotent de U_{max} *(veure figura 4).*

- *Si consideram* $g : [0, e] \to [e, n]$ *adequadament s'obté la uninorma idempotent*

  $$U(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \textit{si } y < n - x \\ \max(x, y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

  (veure figura 5).

2.2.2 *Nulnormes discretes*

Definició 2.2.7. *Una nulnorma sobre* L_n *és una operació binària* $G : L_n \times L_n \to L_n$ *que és associativa, creixent en cada component, commutativa, i tal que existeix un element* $k \in L_n$*, anomenat* element absorbent*, tal que* $G(k, x) = k$ *per a tot* $x \in L_n$*, i verifica*

$$G(0, x) = x \quad \textit{per a tot } x \leqslant k$$
$$G(1, x) = x \quad \textit{per a tot } x \geqslant k.$$

En el cas de nulnormes tals que $k = 0$ s'obtenen les t-normes, mentre que si $k = 1$ s'obtenen les t-conormes.

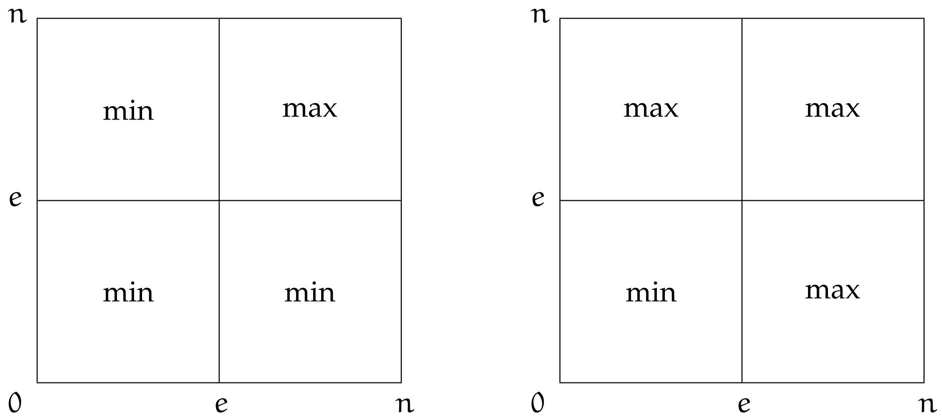

Figura 4: Estructura de les úniques uninormes idempotents de U_{min} (esquerra) i de U_{max} (dreta).

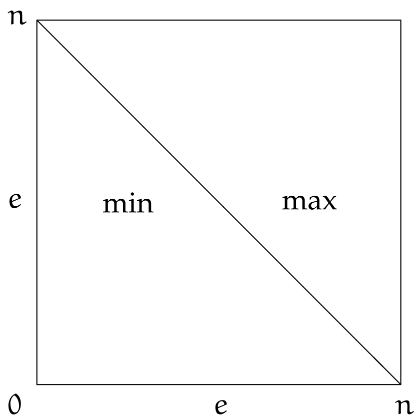

Figura 5: Estructura de la uninorma idempotent definida a partir de la funció $g(x) = n - x$.

Definició 2.2.8. *Una nulnorma és diu idempotent quan* $G(x, x) = x$ *per a tot* $x \in L_n$.

En el cas de les nulnormes és té la següent caracterització.

Proposició 2.2.9. *Una operació binària* $G : L_n \times L_n \to L$ *és una nulnorma si i només si existeix un element* $k \in L_n$, *una t-conorma* S *sobre* $[0, k]$ *i una t-norma* T *sobre* $[k, n]$ *tal que per a tot* $x, y \in L_n$, G *ve expresada per*

$$G(x, y) = \begin{cases} S(x, y) & \textit{si} \ \ (x, y) \in [0, k]^2 \\ T(x, y) & \textit{si} \ \ (x, y) \in [k, n]^2 \\ k & \textit{altrament.} \end{cases}$$

Endemés, G *és suau si i només si* T *i* S *són suaus.*

Nota 2.2.10. *En el cas de les idempotents, es té que les úniques nulnormes idempotents són les que tenen el mínim i el màxim com a t-norma i t-conorma associades.*

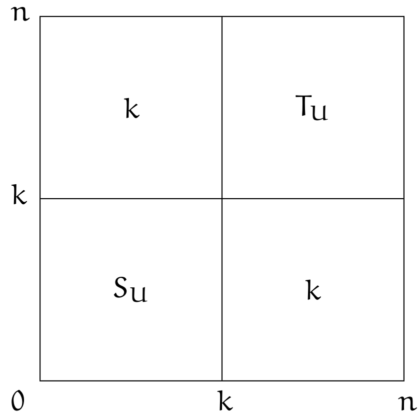

Figura 6: Estructura general d'una nulnorma.

2.3 FUNCIONS D'IMPLICACIÓ DEFINIDES SOBRE UNA CADENA FINITA

En aquesta secció recordarem els quatre principals tipus de funcions d'implicacions definides en la cadena finita L_n que s'obtenen a partir de t-normes i t-conormes. A saber, les implicacions fortes (o S-implicacions obtingudes a partir de t-conormes), les implicacions residuals (o R-implicacions, obtingudes a partir de t-normes) i finalment les QL-implicacions i les D-implicacions (que és construeixen a partir de t-normes i t-conormes). Es mostrarà l'estructura de cada una d'elles i s'enunciaran els principals resultats. Per a un estudi en detall de tots aquests tipus de funcions d'implicacions cal destacar els treballs [99, 100, 101].

Donem primer la definició general de funció d'implicació sobre la cadena L_n.

Definició 2.3.1. *Un operador binari* $I : L_n \times L_n \to L_n$ *es diu un operador implicació, o una implicació si satisfà:*

- I *és decreixent en la primera variable i creixent en la segona. Això és, si* $x \leqslant y$*, llavors*

$$I(x,z) \geqslant I(y,z) \text{ per tot } z \in L_n$$
$$I(z,x) \leqslant I(z,y) \text{ per tot } z \in L_n$$

- $I(0,0) = I(n,n) = n$ *i* $I(n,0) = 0$

Nota 2.3.2. *De la definició es deriva immediatament que*

- *Com per a tot* $x \in L_n$*,* $x \leqslant n$*,* $I(x,n) \geqslant I(n,n) = n \Rightarrow I(x,n) = n$ *per a tot* $x \in L_n$*.*
- *Com per a tot* $x \in L_n$*,* $0 \leqslant x$*,* $I(0,x) \geqslant I(0,0) = n \Rightarrow I(0,x) = n$ *per a tot* $x \in L_n$*.*

I per tant, com cal esperar, la restricció de la funció I *a* $\{0,n\}^2$ *concorda amb la definició de la implicació clàssica, com es pot veure en la taula següent, on* 0 *significa fals i* n *significa vertader.*

A	B	$A \Rightarrow B$	I
0	0	n	$I(0,0) = n$
0	n	n	$I(0,n) = n$
n	0	0	$I(n,0) = 0$
n	n	n	$I(n,n) = n$

En canvi, cal destacar que els valors simètrics $I(n,x)$ *no estan determinats en general.*

Definició 2.3.3. *Una implicació* $I : L_n \times L_n \to L_n$ *s'anomena una implicació frontera si satisfà* $I(n, x) = x$ *per tot* $x \in L_n$.

Una manera de generar funcions d'implicació a partir de t-conormes és generalitzant la identitat $x \to y \equiv \neg x \vee y$, de la lògica clàssica.

Definició 2.3.4. *Siguin* S *una t-conorma i* N *la negació forta sobre* L_n. *La implicació forta, també anomenada* S-implicació, *associada a* S *i* N *és l'operador donat per*

$$I_{S,N}(x, y) = S(N(x), y) = S(n - x, y), \quad \textit{per a tots} \;\; x, y \in L_n.$$

Una altra manera de generar funcions d'implicació, en aquest cas a partir de t-normes, és la residuació, que definim a continuació.

Definició 2.3.5. *Sigui* T *una t-norma sobre* L_n. *La implicació residual, o R-implicació, associada a* T *és l'operador donat per*

$$I_T(x, y) = \max\{z \in L_n \mid T(x, z) \leqslant y\} \;\; \textit{per a tots} \;\; x, y \in L_n. \tag{2.1}$$

Nota 2.3.6. *Aquesta implicació prové dels reticles residuats [89], i en aquest context, es defineixen habitualment mitjançant el suprem (en comptes del màxim). Ara bé, en el cas de la cadena* L_n *és obvi que podem considerar directament el màxim. De forma similar, en l'àmbit de l'interval* $[0, 1]$, *la definició es restringeix habitualment a t-normes contínues per l'esquerra [72], ja que llavors es verifica la propietat de residuació:*

$$T(x, y) \leqslant z \textit{ si i només si } I_T(x, z) \geqslant y \quad \text{per a tots } x, y, z \in L_n. \tag{2.2}$$

En aquests casos, és obvi que llavors el suprem pot ser canviat pel màxim retrobant l'equació 2.1.

Una altra manera d'obtenir funcions d'implicació sobre L_n es a partir dels operadors construïts a partir d'una t-norma T, una t-conorma S i la negació forta N anomenats QL i D operadors, definits per a tot $x, y \in L_n$.

Definició 2.3.7. *Sigui* T *una t-norma i* S *una t-conorma. La* QL*-implicació associada a* T, S, N *és l'operador donat per:*

$$I_{SNT}(x, y) = S(n - x, T(x, y)) \textit{ per a tots } x, y \in L_n$$

Definició 2.3.8. *Sigui* T *una t-norma i* S *una t-conorma. La* D*-implicació associada a* T, S, N *és l'operador donat per:*

$$I^{SNT}(x, y) = S(T(n - x, n - y), y) \textit{ per a tots } x, y \in L_n$$

Nota 2.3.9. *Cal tenir en compte que en general* QL *i* D*-operadors no verifiquen [100, 101] totes les condicions imposades a la definició 2.3.1. Per* QL*-operadors pot fallar el decreixement amb la primera variable i per a* D*-operadors pot fallar el creixement amb la segona.*

Nota 2.3.10. *L'expressió de* $I_{S,N}$ *pot ser reescrita per dualitat com*

$$I_{S,N}(x, y) = S(n - x, y) = n - T(x, n - y) \textit{ per a tots } x, y \in L_n \tag{2.3}$$

D'aquesta manera les S*-implicacions poden ser obtenides a partir de t-normes. Denotarem per* I_{1T} *la* S*-implicació derivada de la t-norma* T *via l'expressió 2.3.*

Un primer resultat per a les implicacions fortes i per a les implicacions residuals és,

Proposició 2.3.11. *Donada qualsevol t-norma* T, $I_{S,N}$ *i* I_T *són implicacions frontera.*

Existeixen moltes propietats que poden ser requerides a les implicacions segons el context. Les més habituals són:

P1) Principi d'intercanvi

$$I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z)) \text{ per a tots } x, y, z \in L_n$$

P2) Contraposició respecte a una negació forta N

$$I(x, y) = I(N(y), N(x)) \text{ per a tots } x, y \in L_n$$

P3) $I(x, x) = n$ per a tot $x \in L_n$

P4) $I(x, y) = n \Leftrightarrow x \leqslant y \quad x, y \in L_n$

P5) $I(x, 0) = n - x$, per a tot $x \in L_n$

P6) $I(x, y) \geqslant y$ per a tots $x, y \in L_n$

P7) Modus Ponens generalitzat respecte a una t-norma T

$$T(x, I(x, y)) \leqslant y \text{ per a tots } x, y \in L_n$$

P8) $I(x, n - x) = n - x$ per a tot $x \in L_n$

Totes aquestes propietats poden ser estudiades per les distintes implicacions vistes abans derivades de t-normes suaus. A continuació recordarem algunes propietats rellevants així com la seva caracterització pel cas de les implicacions fortes i de les implicacions residuals.

2.3.1 *S-implicacions discretes*

Sabem que donada qualsevol t-norma T, la corresponent implicació I_{1T} sempre satisfà les propietats P5 i P6. Respecte a les propietats P1 i P2 tenim la següent caracterització:

Teorema 2.3.12. *Sigui* $I : L_n \times L_n \to L_n$ *una funció. Llavors* I *és una implicació frontera que satisfà P1) i P2) si i només si existeix una t-norma* T *en* L_n *tal que* $I = I_{1T}$

Exemple 2.3.13. *Sigui* T *l'única t-norma suau Arquimediana en* L_n*,*

$$T(x, y) = \max\{0, x + y - n\} \quad x, y \in L_n$$

Llavors I_{1T} *ve donada per*

$$I_{1T}(x, y) = \min\{n, n + y - x\}$$

expressió que anomenarem implicació de Łukasiewicz.

L'expressió de les implicacions I_{1T} derivades de t-normes suaus es dóna en la següent proposició:

Proposició 2.3.14. *Sigui* $T : L_n \times L_n \to L_n$ *una t-norma suau amb el següent conjunt d'elements idempotents*

$$J = \{0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{m-1} < i_m = n\}$$

Llavors la implicació I_{1T} *ve donada per*

$$I_{1T}(x, y) = \begin{cases} \min\{n - i_k, i_{k+1} + y - x\} & \textit{si existeix } i_k \in J \textit{ tal que} \\ & x, N(y) \in [i_k, i_{k+1}] \\ \max\{n - x, y\} & \textit{altrament} \end{cases} \tag{2.4}$$

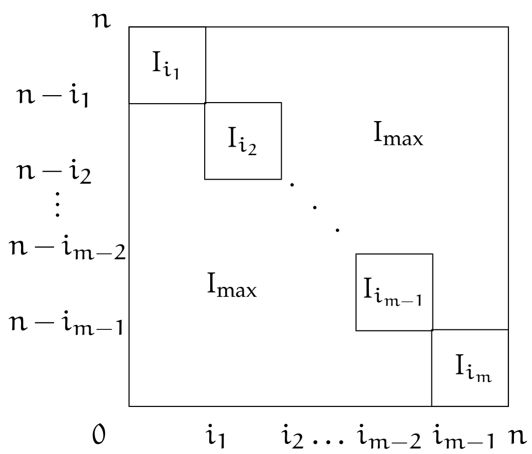

Figura 7: Estructura de la S-implicació, I_{1T}, derivada de la t-norma T, on $J = \{0 = n - i_m < n - i_{m-1} < \ldots < n - i_1 < n - i_0 = n\}$, $I_{max}(x, y) = \max(n - x, y)$ i $I_{i_{k+1}}(x, y) = \min(n - i_k, i_{k+1} + y - x)$ per a $k = 0, \ldots, m - 1$.

L'expressió de la funció d'implicació donada per l'expressió 2.4 és pot veure representada en la figura 7. Respecte a la verificació de les propietats P8 i P7, tenim els següents resultats.

Proposició 2.3.15. *Sigui* T *una t-norma suau en* L_n*. Llavors* I_{1T} *satisfà P7) si i només si* T *és la t-norma Arquimediana de Lukasiewicz.*

Proposició 2.3.16. *Sigui* T *una t-norma suau en* L_n*. Llavors* I_{1T} *satisfà P8) si i només si* T *és la t-norma Arquimediana de Lukasiewicz.*

Finalment, cal destacar que la condició de suavitat de la funció d'implicació forta I_{1T} depèn de la t-norma T, com afirma aquest resultat.

Proposició 2.3.17. *Sigui* T *una t-norma en* L_n*. Llavors la implicació* I_{1T} *és suau* $\Leftrightarrow$ *ho és* T.

2.3.2 *Implicacions residuals discretes*

Aquests tipus d'implicacions que venen donades a partir de l'expressió 2.2, i que també es solen denotar per I_{2T},verifiquen sempre les propietats P7, P6, P4 i P3. A més, el fet de verificar la condició P4 implica que no compleix P8.

Per altra part, respecte a les propietats P1 i P4 tenim,

Teorema 2.3.18. *Sigui* $I : L_n \times L_n \to L_n$ *una funció. Llavors* I *és una implicació frontera verificant P1) i P4) si i només si existeix una t-norma* T *en* L_n *tal que* $I = I_{2T}$

Tal com hem comentat al principi de la secció, les implicacions residuals verifiquen la relació 2.2. Però, la contraposició falla en general. De fet, es verifica el següent resultat:

Proposició 2.3.19. *Sigui* T *una t-norma suau en* L_n*. Les següents afirmacions són equivalents:*

1. T *és la t-norma Arquimediana*
2. *Les funcions implicació* I_{1T} *i* I_{2T} *coincideixen.*
3. I_{2T} *satisfà la contraposició respecte a* N.

En quant a la condició de suavitat en general, les implicacions residuades no la verifiquen, de fet tenim:

Proposició 2.3.20. *Sigui* T *una t-norma suau. Llavors* I_{2T} *és suau si i només si* T *és la t-norma de Łukasiewicz.*

Finalment, cal remarcar que cada t-norma suau defineix a partir de l'expressió de I_{2T} un nou operador d'implicació en L_n, l'expressió general del qual ve donada per la següent proposició i que la tenim representada en la figura 8.

Proposició 2.3.21. *Sigui* $T : L_n \times L_n \to L_n$ *una t-norma suau amb el següent conjunt d'elements idempotents*

$$J = \{0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{m-1} < i_m = n\}$$

Llavors la implicació I_{2T} *ve donada per l'expressió*

$$I_{2T}(x,y) = \begin{cases} n & \textit{si } \ x \leqslant y \\ i_{k+1} + y - x & \textit{si existeix } i_k \in J \textit{ tal que } i_k \leqslant y < x \leqslant i_{k+1} \\ y & \textit{altrament.} \end{cases}$$

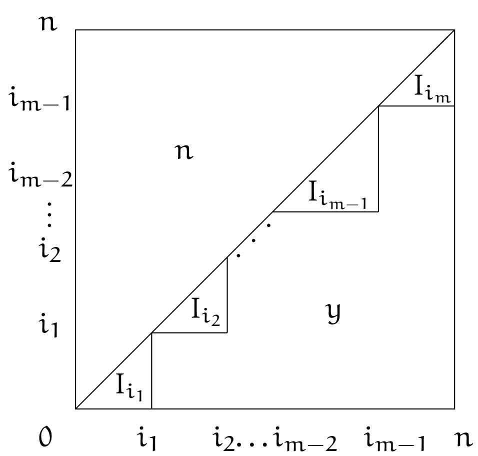

Figura 8: Estructura de la R-implicació derivada de T_J on $J = \{0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{m-1} < i_m = n\}$ i $I_{i_{k+1}}(x,y) = i_{k+1} + y - x$ per a $k = 0, ..., m-1$.

Nota 2.3.22. *Notem que en el cas de la t-norma de Łukasiewicz,* $T = T_Ł$, *és té que* $I_{1T} = I_{2T}$ *i ve donada per* $I_{1T}(x,y) = I_{2T}(x,y) = \min(n, n+y-x)$ *per a tots* $x, y \in L_n$.

2.3.3 QL *i* D *implicacions discretes*

Les QL i D-implicacions sobre la cadena L_n han estat estudiades i caracteritzades en [100]. En el cas de QL-implicacions es va obtenir la següent caracterització:

Proposició 2.3.23. *Considerem una t-norma suau* T, *una t-conorma suau* S *i sigui* I *el QL-operador obtingut a partir d'ell donat per l'expressió* $I_{SNT}(x,y) = S(N(x), T(x,y))$ *per a tot* $x, y \in L_n$. *Aleshores, les següents condicions són equivalents:*

(i) $I_{SNT} : L_n^2 \to L_n$ *és una QL-implicació.*

(ii) $S(N(x), x) = n$ *per a tot* $x \in L_n$.

(iii) S és la t-conorma de Łukasiewicz.

A més, en aquest cas, I_{SNT} *ve donada per*

$$I_{SNT}(x,y) = N(x) + T(x,y) = n - x + T(x,y)$$

per a tot $x, y \in L_n$.

Similarment, és té una caracterització de les D-implicacions,

Proposició 2.3.24. *Sigui* T *una t-norma suau,* S *una t-conorma suau i* I *el D-operador donat per l'expressió* $I^{SNT}(x,y) = S(T(N(x),N(y)),y)$*, per a tot* $x, y \in L_n$*. Aleshores, les següents condicions són equivalents:*

(i) $I^{SNT} : L_n^2 \to L_n$ *és una D-implicació.*

(ii) S és la t-conorma de Łukasiewicz.

Endemés, en aquest cas, I *ve donada per l'expressió*

$$I^{SNT}(x,y) = y + T(N(x),N(y)) = y + T(n-x, n-y)$$

per a tot $x, y \in L_n$.

2.4 NOMBRES BORROSOS

En la literatura s'han realitzat molts d'estudis centrats en el nombres borrosos, bé des del punt de vista teòric, per exemple podem citar [67, 90] (operacions aritmètiques, distàncies, aproximacions, estructures reticulars, etc) o bé des de les seves possibles aplicacions [84, 90] (enginyeria, pressa de decisions, raonament aproximat, etc). En aquest apartat, recordarem la definició de nombre borrós i les operacions aritmètiques bàsiques entre ells. Endemés, repassam l'estructura de reticle del conjunt de nombres borrosos.

Definició 2.4.1. *[90] Un subconjunt borrós* A *de* $\mathbb{R}$ *amb funció de pertinença* $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ *s'anomena* nombre borrós *si el seu* suport *és un interval tancat* $[a,b]$ *i existeixen nombres reals* s, t *amb* $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ *i tals que:*

1. $A(x) = 1$ *amb* $s \leqslant x \leqslant t$
2. $A(x) \leqslant A(y)$ *amb* $a \leqslant x \leqslant y \leqslant s$
3. $A(x) \geqslant A(y)$ *amb* $t \leqslant x \leqslant y \leqslant b$
4. $A(x)$ *és semi-contínua superiorment.*

Denotarem al conjunt de nombres borrosos per FN.

Exemple 2.4.2. *Dos tipus ben coneguts de nombres borrosos són els trapezoïdals i els triangulars.*

- *Un nombre borrós s'anomena trapezoïdal si la seva funció de pertinença ve donada per l'expressió*

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{s-a} & \text{si } x \in [a,s) \\ 1 & \text{si } x \in [s,t] \\ \frac{b-x}{b-t} & \text{si } x \in (t,b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- *En el cas anterior, si* $s = t$ *el nombre borrós s'anomena triangular.*

Definició 2.4.3. *[90] Sigui* A *un nombre borrós i* $\alpha \in [0, 1]$. *S'anomena* α*-nivell del nombre borrós* A, *denotat per* A^α, *al conjunt* $A^\alpha = \{x \mid A(x) \geqslant \alpha\}$.

Nota 2.4.4. *[90] D'acord a la definició de nombre borrós els seus* α*-nivells són intervals tancats.*

2.4.1 *Operacions aritmètiques entre nombres borrosos*

Les operacions aritmètiques entre nombres borrosos es calculen habitualment emprant dos mètodes equivalents. El primer d'ells és a través del principi d'extensió i l'altra a partir de l'aritmètica d'intervals donat que els α-nivells d'un nombre borrós són intervals tancats.

Teorema 2.4.5. (Principi d'extensió de Zadeh) [90] *Qualsevol funció* $f : X \to Y$ *indueix dues funcions,* $f : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ *i* $f^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ *definides com*

$$[f(A)](y) = \sup_{x \mid y = f(x)} A(x)$$

per a tot $A \in \mathcal{F}(X)$ *i*

$$[f^{-1}(B)](x) = B(f(x))$$

per a tot $B \in \mathcal{F}(Y)$, *on* $\mathcal{F}(X)$ *i* $\mathcal{F}(Y)$ *denoten el conjunt dels conjunts borrosos definits sobre els conjunts* X *i* Y *respectivament. En particular, si els conjunts* X *i* Y *són finits podem reemplaçar el suprem* (sup) *pel màxim* (max).

El teorema anterior ens permet estendre les operacions aritmètiques com la suma, resta, multiplicació i divisió definides sobre el conjunt de nombres reals, $\mathbb{R}$, a operacions aritmètiques entre nombres borrosos.

Definició 2.4.6. *[54, 67, 90] Siguin* $A, B \in FN$ *i denotem per* $\odot \in \{+, -, \times, \div\}$ *una de les quatre operacions aritmètiques bàsiques. Denotarem per* $A \odot B$, *al nombre borrós definit puntualment com:*

$$(A \odot B)(z) = \sup_{z = x \odot y} \min(A(x), B(y)), \text{ per a tot } z \in \mathbb{R}$$

Equivalentment, l'aritmètica borrosa basada en intervals, es basa en dues propietats dels nombres borrosos:

1) Cada nombre borrós està unívocament representat pels seus α-nivells;
2) els α-nivells de cada nombre borrós són intervals tancats de nombres reals per a tot $\alpha \in (0, 1]$.

Aquestes dues propietats ens permeten definir les operacions aritmètiques entre nombres borrosos en termes de les operacions aritmètiques entre els seus α-nivells (és a dir, operacions aritmètiques entre intervals tancats reals). Aquestes operacions entre intervals tancats de nombre reals, han estat estudiades i perfectament establertes en els treballs de R. Moore [116]. Així fent ús d'aquests resultats de l'anàlisi d'intervals tenim:

Definició 2.4.7. *Siguin* $A, B \in FN$ *i denotem per* $\odot \in \{+, -, \times, \div\}$ *una de les quatre operacions aritmètiques bàsiques. Aleshores, definirem el nombre borrós,* $A \odot B$, *a partir dels seus* α*-nivells,* $(A \odot B)^\alpha$, *com*

$$(A \odot B)^\alpha = A^\alpha \odot B^\alpha$$

per a cada $\alpha \in (0, 1]$.

Nota 2.4.8. *Òbviament, si* $\odot = \div$, *es requereix que* $0 \notin B^\alpha$ *per a tot* $\alpha \in (0, 1]$. *Endemés, pel fet de que* $A, B \in FN$ *es té que cadascuns dels seus* α*-nivell* A^α *i* B^α *són intervals tancats i per tant els* α*-nivells de* $A \odot B$ *també ho seran.*

2.4.2 *El reticle dels nombres borrosos*

És ben conegut que el conjunt de nombres reals $\mathbb{R}$ és reticle distributiu amb l'ordre habitual ($\leqslant$) que a més és un ordre total lineal. Aquest ordre lineal no es pot estendre en el conjunt de nombres borrosos FN, emperò estenent les operacions màxim i mínim podrem induir un ordre parcial i una estructura de reticle distributiu en FN que s'obtindrà a partir de les funcions construïdes a partir de dites extensions.

Mínim i màxim de nombres borrosos

Com hem comentat abans $(\mathbb{R}, \leqslant)$ té estructura de reticle linealment ordenat amb les operacions màxim i mínim considerades anteriorment. Aleshores si s'estenen les operacions anteriorment definides sobre $\mathbb{R}$ al conjunt de nombres borrosos via el principi d'extensió, obtenim dues noves funcions sobre FN que denotarem per MAX i MIN definides així [90]:

Definició 2.4.9. *Siguin* $A, B \in \mathrm{FN}$,

$$\mathrm{MAX}(A, B)(z) = \sup_{z=max(x,y)} min(A(x), B(y)), \textit{per a tot } z \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

$$\mathrm{MIN}(A, B)(z) = \sup_{z=min(x,y)} min(A(x), B(y)), \text{per a tot } z \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Nota 2.4.10. *Per ser les funcions* min *i* max *operacions contínues sobre el conjunt dels nombres reals es verifica que* $\mathrm{MIN}(A, B)$ *i* $\mathrm{MAX}(A, B)$ *són nombres borrosos per a qualsevol parella de nombres borrosos* $A, B \in \mathrm{FN}$.

A més,

Teorema 2.4.11. *Les operacions* MIN *i* MAX *definides en d'acord a les expressions 2.6 i 2.5 anteriors verifiquen les següents propietats: commutativa, associativa, idempotència, d'absorció i distributiva.*

Com a conseqüència d'aquest resultat es té que,

Teorema 2.4.12. *El conjunt dels nombres borrosos,* FN*, amb les operacions* MIN *i* MAX *és un reticle distributiu on* MIN *i* MAX *representaran la conjunció i la disjunció, respectivament.*

Nota 2.4.13. *Si anomenam per* $(\mathrm{FN}, \mathrm{MIN}, \mathrm{MAX})$ *al reticle de nombres borrosos, aquest també podrà ser representat com el parell* $(\mathrm{FN}, \preceq)$ *on* $(\preceq)$ *és l'ordre parcial definit com:*

$$A \preceq B \ \textit{ si i només si } \mathrm{MIN}(A, B) = A \ \textit{o, alternativament,}$$
$$A \preceq B \ \textit{ si i només si } \mathrm{MAX}(A, B) = B$$

per a tot $A, B \in \mathrm{FN}$. *També és pot definir aquest ordre en termes dels seus* α*-conjunts de nivell (que són intervals tancats per ser* $\mathrm{MAX}(A, B)$ *i* $\mathrm{MIN}(A, B)$ *nombres borrosos)*

$$A \preceq B \ \textit{ si i només si } \ \min(A^{\alpha}, B^{\alpha}) = A^{\alpha} \ \textit{ per a tot } \ \alpha \in [0, 1] \ \textit{ o, alternativament,}$$
$$A \preceq B \ \textit{ si i només si } \ \max(A^{\alpha}, B^{\alpha}) = B^{\alpha} \ \textit{ per a tot } \ \alpha \in [0, 1].$$

3 EL RETICLE DELS NOMBRES BORROSOS DISCRETS

3.1 INTRODUCCIÓ

La teoria de reticles és un camp de la matemàtica teòrica i aplicada que ha estat amplament desenvolupat des dels pioners treballs efectuats per G. Birkhoff [13, 14] i després recopilats en l'excel·lent llibre de G. Grätzer [82] . Un dels punts més interessants que presenten els reticles és la possibilitat d'interpretar-los equivalentment, bé com una estructura algèbrica dotada de dues operacions, o bé com un conjunt dotat d'un ordre parcial verificant certes condicions [82]. Des del punt de vista de la lògica borrosa qualsevol d'aquestes dues possibles interpretacions resulten interessants. Per una part, si ho interpretam com a estructura algèbrica, aquesta pot ser entesa com a una possible semàntica d'una lògica subestructural [89, 118]. Si per una altra part es fa la interpretació de conjunt parcialment ordenat, aquests s'empren com a conjunt de definició i valoració de funcions d'agregació [58, 162] o d'implicació [55, 56]. En aquest capítol volem estudiar si és possible considerar tals estructures en el conjunt dels nombres borrosos discrets.

Recordem primer la definició general de reticle.

Definició 3.1.1. *[82] Un reticle $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ és un conjunt dotat de dues operacions internes $\vee$ i $\wedge$ que satisfan les següents propietats:*

IDEMPOTÈNCIA: $a \vee a = a$ *i* $a \wedge a = a$ *per a tot* $a \in L$.

COMMUTATIVITAT: $a \vee b = b \vee a$ *i* $a \wedge b = b \wedge a$ *per a tota parella* $a, b \in L$.

ASSOCIATIVITAT: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ *i* $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ *per a tots* $a, b, c \in L$.

ABSORCIÓ: $a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b) = a$ *per a tots* $a, b \in L$.

Definició 3.1.2. *[82] Sigui $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ un reticle. Se diu que:*

- *És fitat si existeixen dos elements $0, I \in L$ tals que*
  $0 \wedge a = 0$, $0 \vee a = a$; $I \wedge a = a$; $I \vee a = I$ *per a tot* $a \in L$
- *És distributiu si les operacions internes $\vee$ i $\wedge$ verifiquen:*
  - $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
  - $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, *per a tots* $a, b, c \in L$.
- *És complementat si existeix una aplicació $' : L \to L$, $a \to a'$, tal que $a \wedge a' = 0$ i $a \vee a' = I$, per a cada $a \in L$.*

Definició 3.1.3. *[82] Tot reticle $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ fitat, distributiu i complementat és diu àlgebra de Boole.*

Una definició equivalent de reticle és la següent:

Definició 3.1.4. *Un reticle és un conjunt parcialment ordenat $(P, \leqslant)$ de manera que $\sup H$ i $\inf H$ existeixen per a qualsevol subconjunt finit no buit H de P.*

Com s'ha comentat abans és possible obtenir l'ordre parcial a partir de les operacions algebraiques [136].

Teorema 3.1.5. *Si* $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ *és un reticle, la relació donada per* $a \leqslant b$ *si i només si* $a \wedge b = a$ *és reflexiva, antisimètrica i transitiva, és a dir,* $(L, \leqslant)$ *és un conjunt parcialment ordenat.*

També és poden construir les operacions $\vee$ i $\wedge$ del reticle a partir de l'ordre.

Teorema 3.1.6. *Si* $(L, \leqslant)$ *és un conjunt parcialment ordenat. Si definim les operacions* $\vee$ *i* $\wedge$ *com* $a \vee b = \sup\{a, b\}$ *i* $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ *aleshores* $(L, \vee, \wedge)$ *té estructura de reticle.*

3.2 ESTRUCTURA DE RETICLE EN EL CONJUNT DE NOMBRES BORROSOS DISCRETS

Com es menciona en la introducció, l'estructura de reticle és un concepte bàsic per a poder desenvolupar l'estudi de funcions d'agregació o funcions d'implicació sobre el conjunt de nombres borrosos discrets. Per aquesta raó, volem dotar al conjunt de nombres borrosos discrets d'una estructura de conjunt fitat parcialment ordenat i, a poder ser, de reticle.

Comencem per la definició de nombre borrós discret, com representar-los i la notació que utilitzarem al llarg d'aquest treball per a descriure'ls. L'any 2001, W. Voxman [144] defineix un tipus de subconjunt borrós amb suport finit i propietats semblants a les de nombre borrós. Formalment es tindrà:

Definició 3.2.1. *Un subconjunt borrós* A *de* $\mathbb{R}$ *amb funció de pertinença* $A : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *s'anomena* nombre borrós discret *si el seu suport és finit, és a dir, existeixen* $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ *amb* $x_1 < x_2 < ... < x_n$ *tals que* $\mathrm{supp}(A) = \{x_1, ..., x_n\}$*, i nombres naturals* s, t *amb* $1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n$ *tals que:*

1. $A(x_i)$*=1 per a cada nombre natural* i *amb* $s \leqslant i \leqslant t$ *(*nucli*)*
2. $A(x_i) \leqslant A(x_j)$ *per a cada nombre natural* i, j *amb* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant s$
3. $A(x_i) \geqslant A(x_j)$ *per a cada nombre natural* i, j *amb* $t \leqslant i \leqslant j \leqslant n$

L'any 2005, G. Wang [145] estableix un resultat que permet representar els nombres borrosos discrets a partir dels seus conjunts de nivells.

Teorema 3.2.2 (Teorema de representació [145])**.** *Sigui* A *un nombre borrós discret i* A^r $=\{x \in \mathbb{R} \mid A(x) \geqslant r\}$ *el seu* r *conjunt de nivell. Els seus nivells verifiquen les següents propietats:*

1. A^r *és un subconjunt finit no buit de* $\mathbb{R}$*, per a cada* $r \in [0, 1]$
2. $A^{r_2} \subset A^{r_1}$ *per a cada* $r_1, r_2 \in [0, 1]$ *amb* $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant 1$
3. *Per a cada* $r_1, r_2 \in [0, 1]$ *amb* $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant 1$*, si* $x \in A^{r_1} - A^{r_2}$ *tenim* $x < y$ *per a tot* $y \in A^{r_2}$*, o x>y per a tot* $y \in A^{r_2}$
4. *Per a cada* $r_0 \in [0, 1]$*, existeix un nombre real* r_0' *amb* $0 < r_0' < r_0$ *tal que* $A^{r_0'} = A^{r_0}$ *(és a dir,* $A^r = A^{r_0}$ *per a cada* $r \in [r_0', r_0]$*).*

Recíprocament, si per a cada $r \in [0, 1]$*, existeix un subconjunt* $A^r \subset \mathbb{R}$ *verificant les propietats* $1 - 4$ *anteriors, aleshores existeix un únic nombre borrós discret* B *tal que* $A^r = B^r$ *per a cada* $r \in [0, 1]$*.*

Nota 3.2.3. *Denotarem al conjunt dels nombres borrosos discrets abreujadament per* DFN *i a un nombre borrós discret per* dfn*.*

Un nombre borrós discret $A : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *amb suport el conjunt de nombres reals* $\mathrm{supp}(A) = \{x_1, ..., x_n\}$*, el denotarem habitualment mitjançant el conjunt finit format pels valors que agafa en els punts del seu suport. Així, a cada valor li afegirem (separat per una barra) el punt del suport on agafa dit valor, és a dir,*

$$A = \{A(x_1)/x_1, A(x_2)/x_2, \cdots, A(x_n)/x_n\}$$

Una primera idea per construir operacions reticulars en el conjunt DFN seria utilitzar les mateixes funcions que s'estableixen per a demostrar que el conjunt de nombres borrosos té estructura de reticle distributiu [90, 104]. Desafortunadament, com es veurà en els següents exemples el principi d'extensió de Zadeh [90] no serà un bon mètode per a tal propòsit.

Exemple 3.2.4. *Siguin* $A = \{0.3/1, 0.6/3, 1/4, 0.5/7, 0.4/9\}$ *i* $B = \{0.5/2, 1/5, 0.6/10\}$ *dos nombres borrosos discrets. Si calculam el màxim d'ells d'acord al principi d'extensió de Zadeh*

$$MAX(A,B)(z) = \sup_{z=max(x,y)} \{min(A(x), B(y))\}, \text{ per a tot } z \in \mathbb{R}$$

resulta un subconjunt borrós $MAX(A,B) = \{0.3/2, 0.5/3, 0.5/4, 1/5, 0.5/7, 0.4/9, 0.6/10\}$ *que no pertany al conjunt de nombres borrosos discrets, perquè es té que* $MAX(A,B)(7) = 0.5$ *i* $MAX(A,B)(9) = 0.4$, *però* $MAX(A,B)(10) = 0.6$ *i per tant la propietat 3 de la definició 3.2.1 falla. (Veure figura 9.)*

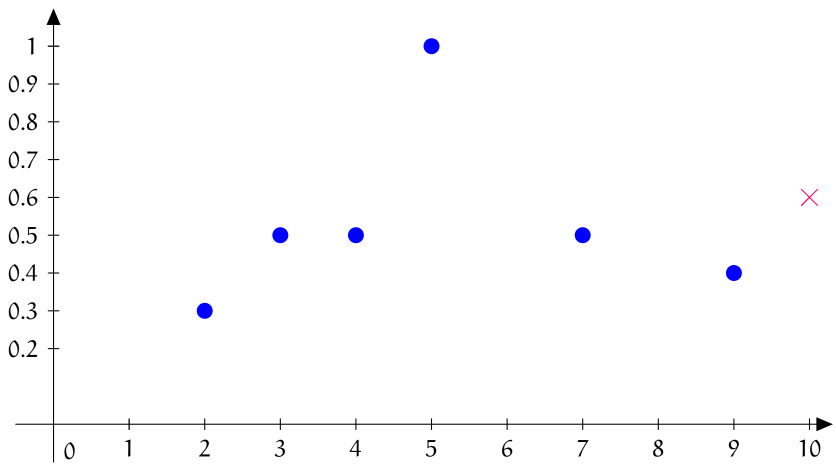

Figura 9: $MAX(A,B)$ no verifica les condicions de nombre borrós discret. En el punt (10,0.6) el decreixement es perd.

Exemple 3.2.5. *Considerem els nombres borrosos discrets:*
$A = \{0.3/1, 0.4/3, 1/4\}$ *i* $B = \{0.5/2, 1/5, 1/6\}$.
Aleshores, si calculam $MIN(A,B)$ *d'acord al principi d'extensió de Zadeh*

$$MIN(A,B)(z) = \sup_{z=min(x,y)} \{min(A(x), B(y))\}, \text{ per a tot } z \in \mathbb{R}$$

obtenim el subconjunt borrós $MIN(A,B) = \{0.3/1, 0.5/2, 0.4/3, 1/4\}$ *que no verifica les condicions de nombre borrós discret donades en la definició 3.2.1 perquè* $MIN(A,B)(3) = 0.4 < MIN(A,B)(2) = 0.5$. *(Veure figura 10.)*

Per tant, a la vista dels exemples anteriors un primer objectiu serà trobar funcions alternatives que ens permetin definir una estructura de reticle en el conjunt de nombres borrosos discrets. Per això, proposam la següent definició:

Definició 3.2.6. *Per a cada parella de nombres borrosos discrets* $A, B \in DFN$, *si el conjunts* $A^\alpha = \{x_1^\alpha, ..., x_p^\alpha\}$ *i* $B^\alpha = \{y_1^\alpha, ..., y_k^\alpha\}$ *representen l'*α*-nivell d'* A *i* B *respectivament, es poden considerar els següents conjunts:*

$$supp(A) \vee supp(B) = \{x \vee y \mid x \in supp(A), y \in supp(B)\} \quad i$$

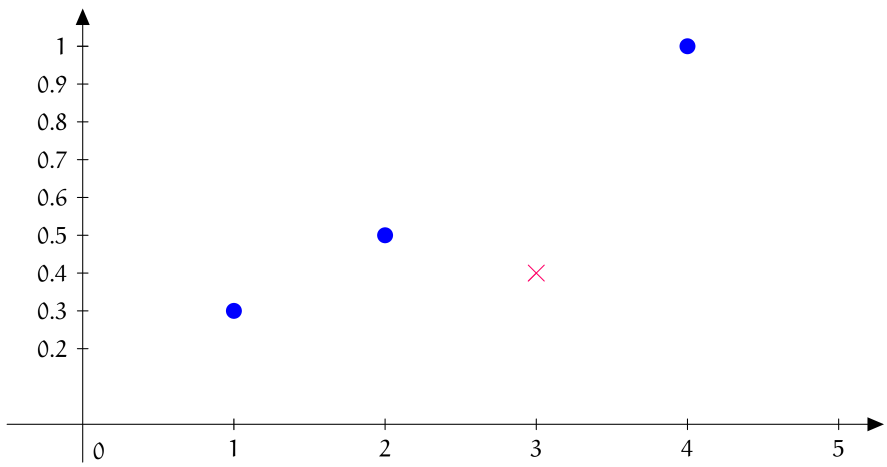

Figura 10: $\mathrm{MIN}(A,B)$ no verifica les condicions de nombre borrós discret. En el punt (3,0.4) el creixement es perd.

$$M^{\alpha} = \{z \in \mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B) \mid (\min A^{\alpha} \vee \min B^{\alpha}) \leqslant z \leqslant (\max A^{\alpha} \vee \max B^{\alpha})\}$$

és a dir,

$$M^{\alpha} = \{z \in \mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B) \mid (x_1^{\alpha} \vee y_1^{\alpha}) \leqslant z \leqslant (x_p^{\alpha} \vee y_k^{\alpha})\}$$

A continuació es demostrarà que per a cada $\alpha \in [0,1]$ aquests subconjunts M^{α} , verifiquen les condicions (1)-(4) establertes en el teorema 3.2.2 (de representació de Wang).

Proposició 3.2.7. *Per a cada $\alpha \in [0,1]$ els conjunts M^{α} verifiquen les següents propietats:*

1. *M^{α} és un subconjunt no buit.*
2. *$M^{\beta} \subseteq M^{\alpha}$ per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.*
3. *Per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, si $x \in M^{\alpha} - M^{\beta}$, aleshores $x < y$ per a tot $y \in M^{\beta}$, o $x > y$ per a tot $y \in M^{\beta}$.*
4. *Per a cada $\alpha \in (0,1]$, existeix un nombre real α' amb $0 < \alpha' < \alpha$ tal que $M^{\alpha'} = M^{\alpha}$ (és a dir $M^{r} = M^{\alpha}$, per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$).*

Demostració. A continuació demostrarem cadascuna de les condicions esmentades abans.

1. M^{α} és un subconjunt no buit, perquè A^{α} i B^{α} són subconjunts finits no buits (els nombres borrosos discrets són subconjunts borrosos normals) i $\mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B)$ és un conjunt finit.
2. $M^{\beta} \subseteq M^{\alpha}$ per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.
   Perquè si $A, B \in \mathrm{DFN}$ i els conjunts de nivell venen donats per

$$A^{\alpha} = \{x_1^{\alpha}, \ldots, x_p^{\alpha}\}, \quad A^{\beta} = \{x_1^{\beta}, \ldots, x_r^{\beta}\}, \quad B^{\alpha} = \{y_1^{\alpha}, \ldots, y_k^{\alpha}\}, \quad B^{\beta} = \{y_1^{\beta}, \ldots, y_l^{\beta}\}, \tag{3.1}$$

   aleshores:

$$A^{\beta} \subseteq A^{\alpha} \quad \text{implica} \quad x_1^{\alpha} \leqslant x_1^{\beta} \quad \text{i} \quad x_r^{\beta} \leqslant x_p^{\alpha} \tag{3.2}$$

$$B^{\beta} \subseteq B^{\alpha} \quad \text{implica} \quad y_1^{\alpha} \leqslant y_1^{\beta} \quad \text{i} \quad y_l^{\beta} \leqslant y_k^{\alpha} \tag{3.3}$$

Així, a partir de les relacions 3.2 i 3.3 és verifiquen les desigualtats:

$$\max(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant \max(x_1^\beta, y_1^\beta) \leqslant \max(x_r^\beta, y_l^\beta) \leqslant \max(x_p^\alpha, y_k^\alpha)$$

d'on es dedueix el resultat.

3. Per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, si $x \in M^\alpha - M^\beta$, aleshores $x < y$ per a tot $y \in M^\beta$, o $x > y$ per a tot $y \in M^\beta$.

   Perquè, si $x \in M^\alpha$, tenim que $x \in \mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B)$ i x no pertany a M^β, aleshores o $x < x_1^\beta \vee y_1^\beta = y_1^\beta$, el qual és el mínim de M^β, o $x > (x_r^\beta \vee y_l^\beta) = x_r^\beta \geqslant y_l^\beta$, él qual és el màxim de M^β.

4. Per a cada $\alpha \in (0,1]$, existeix un nombre real α' amb $0 < \alpha' < \alpha$ tal que $M^{\alpha'} = M^\alpha$ (és a dir $M^r = M^\alpha$, per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$).

   Com $A, B \in \mathrm{DFN}$ i tenint en compte el teorema 3.2.2 de representació de nombres borrosos discrets, per a cada $\alpha \in (0,1]$ existeixen nombres reals α'_1 i α'_2 amb $0 < \alpha'_1 < \alpha$ i $0 < \alpha'_2 < \alpha$ tals que per a cada $r \in [\alpha'_1, \alpha]$, podem afirmar que $A^\alpha = A^r$ i $B^\alpha = B^r$, per a cada $r \in [\alpha'_2, \alpha]$. Així, si $\alpha' = \alpha'_1 \vee \alpha'_2$, podem obtenir les relacions:

$$\begin{array}{rcl} \min(A^r) = \min(A^\alpha) & \text{i} & \max(A^r) = \max(A^\alpha) \\ \min(B^r) = \min(B^\alpha) & \text{i} & \max(B^r) = \max(B^\alpha) \end{array}$$

   per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$ i per tant

$$\begin{aligned} \min(A^r) \vee \min(B^r) &= \min(A^\alpha) \vee \min(B^\alpha) \\ \max(A^r) \vee \max(B^r) &= \max(A^\alpha) \vee \max(B^\alpha) \end{aligned}$$

   D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} M^\alpha &= \{z \in \mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B) \mid \min(A^\alpha) \vee \min(B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max(A^\alpha) \vee \max(B^\alpha)\} \\ &= \{z \in \mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B) \mid \min(A^r) \vee \min(B^r) \leqslant z \leqslant \max(A^r) \vee \max(B^r)\} \\ &= M^r \end{aligned}$$

   per a tot $r \in [\alpha', \alpha]$.

□

Com a conseqüència d'aquest resultat i seguint les mateixes notacions que abans, és té

Teorema 3.2.8. *Per a cada parella $A, B \in \mathrm{DFN}$ existeix un únic nombre borrós, que denotarem per $\max(A, B)$, tal que té per α-conjunts de nivell els conjunts*

$$\{z \in \mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B) \mid \min(A^\alpha) \vee \min(B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max(A^\alpha) \vee \max(B^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0,1]$.

Demostració. Immediata a partir de la proposició 3.2.7 i del teorema 3.2.2. □

Exemple 3.2.9. *Si* $A = \{0.3/1, 0.6/3, 1/4, 0.5/7, 0.4/9\}$ *i* $B = \{0.5/2, 1/5, 0.6/10\}$. *Aplicant el mètode exposat en el teorema 3.2.8 resulta*

$$\max(A, B) = \{0.3/2, 0.5/3, 0.5/4, 1/5, 0.6/7, 0.6/9, 0.6/10\}$$

perquè els seus conjunts de nivells venen donats per:

$$\begin{aligned}
\max(A,B)^{0.3} &= \{z \in \{2,3,4,5,7,9,10\} \mid 2 \leqslant z \leqslant 10\} = \{2,3,4,5,7,9,10\}\\
\max(A,B)^{0.4} &= \{z \in \{2,3,4,5,7,9,10\} \mid 3 \leqslant z \leqslant 10\} = \{3,4,5,7,9,10\}\\
\max(A,B)^{0.5} &= \{z \in \{2,3,4,5,7,9,10\} \mid 3 \leqslant z \leqslant 10\} = \{3,4,5,7,9,10\}\\
\max(A,B)^{0.6} &= \{z \in \{2,3,4,5,7,9,10\} \mid 5 \leqslant z \leqslant 10\} = \{5,7,9,10\}\\
\max(A,B)^{1} &= \{z \in \{2,3,4,5,7,9,10\} \mid 5 \leqslant z \leqslant 5\} = \{5\}
\end{aligned}$$

El nombre borrós discret $\max(A,B)$ *es pot veure representat en la figura 11.*

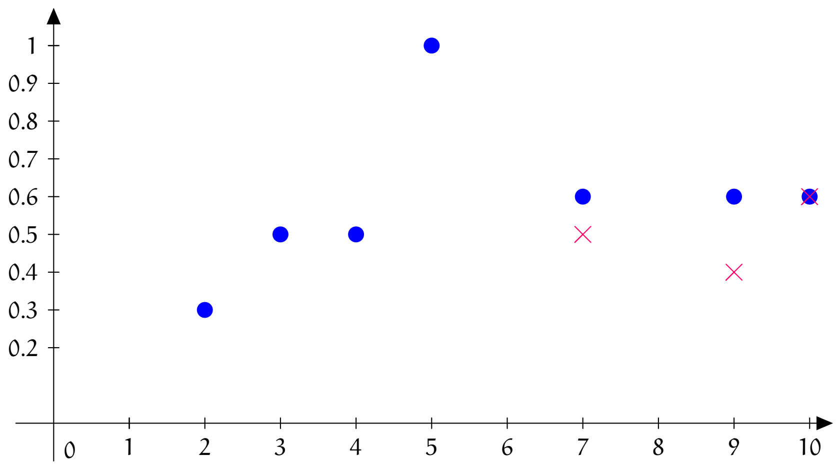

Figura 11: $\max(A,B)$ verifica les condicions de nombre borrós discret. En el punt $(10, 0.6)$ el decreixement s'havia perdut (reproduït per les creus vermelles), cosa que no passa ara aplicant la nova definició.

Anàlogament a com hem definit els α-conjunts de nivell M^α (veure definició 3.2.6) a partir d'una parella $A, B \in DFN$, que ha possibilitat la construcció de $\max(A,B)$, es té:

Definició 3.2.10. *Per a cada parella de nombres borrosos discrets* $A, B \in DFN$*, si el conjunts*

$$A^\alpha = \{x_1^\alpha, ..., x_p^\alpha\} \qquad B^\alpha = \{y_1^\alpha, ..., y_k^\alpha\}$$

representen l'α*-nivell d'* A *i* B *respectivament, es poden considerar els següents conjunts:*

$$\operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B) = \{x \wedge y \mid x \in \operatorname{supp}(A), y \in \operatorname{supp}(B)\} \quad i$$

$$N^\alpha = \{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B) \mid (\min A^\alpha \wedge \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant (\max A^\alpha \wedge \max B^\alpha)\}$$

és a dir,

$$N^\alpha = \{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B) \mid (x_1^\alpha \wedge y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha \wedge y_k^\alpha)\}$$

I de manera semblant al resultats obtinguts en la proposició 3.2.7 i en el teorema 3.2.8, tenim el següent:

Proposició 3.2.11. *Per a cada* $\alpha \in [0,1]$ *els conjunts* N^α *verifiquen les següents propietats:*

1. N^α *és un subconjunt no buit.*
2. $N^\beta \subseteq N^\alpha$ *per a cada* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *amb* $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

3. *Per a cada* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *amb* $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, *si* $x \in N^{\alpha} - N^{\beta}$, *aleshores* $x < y$ *per a tot* $y \in N^{\beta}$, *o* $x > y$ *per a tot* $y \in N^{\beta}$.

4. *Per a cada* $\alpha \in (0,1]$, *existeix un nombre real* α' *amb* $0 < \alpha' < \alpha$ *tal que* $N^{\alpha'} = N^{\alpha}$ *(és a dir* $N^{r} = N^{\alpha}$, *per a cada* $r \in [\alpha', \alpha]$ *).*

Teorema 3.2.12. *Per a cada parella* $A, B \in \mathrm{DFN}$ *existeix un únic nombre borrós, que denotarem per* $\min(A,B)$, *tal que té per* α*-conjunts de nivell els conjunts*

$$\{z \in \mathrm{supp}(A) \wedge \mathrm{supp}(B) \mid \min(A^{\alpha}) \wedge \min(B^{\alpha}) \leqslant z \leqslant \max(A^{\alpha}) \wedge \max(B^{\alpha})\}$$

per a cada $\alpha \in [0,1]$.

Exemple 3.2.13. *Si* $A = \{0.3/1, 0.4/3, 1/4\}$ *i* $B = \{0.5/2, 1/5, 1/6\}$. *Aplicant el mètode exposat en el teorema 3.2.12 resulta*

$$\min(A,B) = \{0.3/1, 0.5/2, 0.5/3, 1/4\}$$

perquè els seus nivells venen donats per

$$\begin{aligned}
\min(A,B)^{0.3} &= \{z \in \{1,2,3,4\} \mid 1 \leqslant z \leqslant 4\} = \{1,2,3,4\} \\
\min(A,B)^{0.4} &= \{z \in \{1,2,3,4\} \mid 2 \leqslant z \leqslant 4\} = \{2,3,4\} \\
\min(A,B)^{0.5} &= \{z \in \{1,2,3,4\} \mid 2 \leqslant z \leqslant 4\} = \{2,3,4\} \\
\min(A,B)^{1} &= \{z \in \{1,2,3,4\} \mid 4 \leqslant z \leqslant 4\} = \{4\}
\end{aligned}$$

El nombre borrós $\min(A,B)$ *es pot veure en la figura 12.*

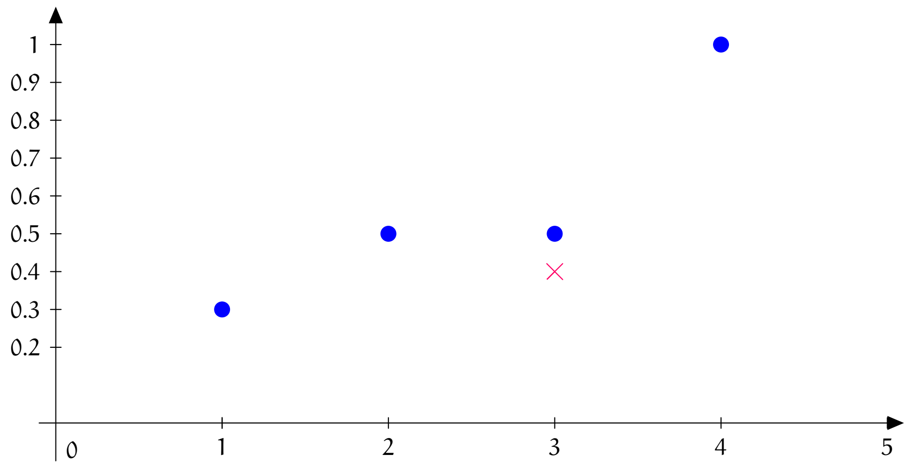

Figura 12: $\min(A,B)$ verifica les condicions de nombre borrós discret. En el punt $(3, 0.4)$ aplicant el principi d'extensió de Zadeh el creixement s'havia perdut, com es pot veure en la figura (dibuixat amb una creu roja), cosa que no passa ara aplicant la nova definició.

Nota 3.2.14. *Així dels resultats obtinguts en els teoremes 3.2.8 i 3.2.12 veim que és possible definir en el conjunt de nombres borrosos discrets dues aplicacions binàries, que anomenarem* max *i* min *on*

$$\begin{aligned}
\max : \mathrm{DFN} \times \mathrm{DFN} &\longrightarrow \mathrm{DFN} \\
(A,B) &\longmapsto \max(A,B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min : \mathrm{DFN} \times \mathrm{DFN} &\longrightarrow \mathrm{DFN} \\
(A,B) &\longmapsto \min(A,B)
\end{aligned}$$

El que farem a continuació es estudiar quines propietats verifiquen aquestes dues noves aplicacions binàries. Per això necessitarem un resultat previ que analitza diferents operacions reticulars (commutativitat, associativitat,...) que es poden realitzar entre els suports (interpretats inicialment només com a conjunts numèrics) de qualsevol nombre borrós discret.

Proposició 3.2.15. *Siguin* $A, B, C \in DFN$ *amb suports els conjunts* $supp(A)$, $supp(B)$ *i* $supp(C)$ *respectivament. Es verifiquen les següents propietats:*

1. *Commutativitat:*
$$\begin{aligned} supp(A) \wedge supp(B) &= supp(B) \wedge supp(A) \\ supp(A) \vee supp(B) &= supp(B) \vee supp(A) \end{aligned}$$

2. *Associativitat:*
$$\begin{aligned} (supp(A) \wedge supp(B)) \wedge supp(C) &= supp(A) \wedge (supp(B) \wedge supp(C)) \\ (supp(A) \vee supp(B)) \vee supp(C) &= supp(A) \vee (supp(B) \vee supp(C)) \end{aligned}$$

3. *Idempotència:*
$$\begin{aligned} supp(A) \wedge supp(A) &= supp(A) \\ supp(A) \vee supp(A) &= supp(A) \end{aligned}$$

4. *Es verifiquen les següents inclusions:*
$$supp(A) \wedge (supp(B) \vee supp(C))) \subseteq (supp(A) \wedge supp(B)) \vee (supp(A) \wedge supp(C))$$
$$supp(A) \vee (supp(B) \wedge supp(C))) \subseteq (supp(A) \vee supp(B)) \wedge (supp(A) \vee supp(C))$$

5. *Es verifiquen les següents inclusions:*
$$supp(A) \subseteq supp(A) \wedge (supp(A) \vee supp(B))$$
$$supp(A) \subseteq supp(A) \vee (supp(A) \wedge supp(B))$$

Demostració. En primer lloc, d'acord a la definició 3.2.1, sabem que el suport de qualsevol nombre borrós discret és un subconjunt finit de nombres reals. I a més, el conjunt de nombres reals és un reticle distributiu amb les operacions usuals màxim(max) i mínim(min). Anomenem X, Y i Z els suport del nombres $A, B, C \in DFN$ respectivament.

1. Immediata a partir de la commutativitat de les funcions reals màxim i mínim.

2. Associativitat:
Si $z \in (X \wedge Y) \wedge Z$ aleshores $z = \min(x, c)$ on $x = \min(a, b)$, $a \in X$, $b \in Y$ i $c \in Z$. Per tant $z = \min(\min(a, b), c)$. Com la funció mínim entre nombres reals és associativa resulta $z = \min(\min(a, b), c) = \min(a, \min(b, c))$. Així $z \in X \wedge (Y \wedge Z)$ i es té que
$$(X \wedge Y) \wedge Z \subseteq X \wedge (Y \wedge Z)$$
Si $z \in X \wedge (Y \wedge Z)$ aleshores $z = \min(a, x)$ on $x = \min(b, c)$, $a \in X$, $b \in Y$ i $c \in Z$. Així, $z = \min(a, \min(b, c))$. Com la funció mínim entre nombres reals és associativa tenim que $z = \min(a, \min(b, c)) = \min(\min(a, b), c)$. Llavors $z \in (X \wedge Y) \wedge Z$. Aleshores,
$$X \wedge (Y \wedge Z) \subseteq (X \wedge Y) \wedge Z$$
La demostració de l'altre propietat és totalment anàloga.

3. Idempotència:

   Si $z \in X \wedge X$ es té que $z = \min(a, a')$ amb $a, a' \in X$. Per tant $z = a \in X$ or $z = a' \in X$. Això significa que $z \in X$ i així $X \wedge X \subseteq X$. Per altre banda, és evident que $X \subseteq X \wedge X$ perquè la funció mínim és idempotent i aleshores per a cada $z \in X$, $z = \min(z, z)$.

   La prova de l'altre propietat és semblant.

4. Si $z \in X \wedge (Y \vee Z))$ aleshores $z = \min(a, \max(b, c))$ on $a \in X$, $b \in Y$ i $c \in Z$. Ara d'acord a la propietat distributiva es pot escriure com $z = \max(\min(a, b), \min(a, c))$. Aleshores obtenim que $z \in (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ i així $X \wedge (Y \vee Z)) \subseteq (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

   Anàlogament l'altra inclusió.

5. Si $z \in X$ llavors $z = \max(z, \min(z, b))$ per a tot $b \in Y$. Perquè si $\min(z, b) = b$ aleshores $\max(z, b) = z$. I, si $\min(z, b) = z$ es té que $\max(z, z) = z$. Per tant, $X \subseteq X \vee (X \wedge Y)$

$\square$

Nota 3.2.16. *En general, les lleis d'absorció i la propietat distributiva dels suports no es verifiquen. Per exemple, si aquests conjunts* $X = \{4, 7, 9\}$,$Y = \{4, 6, 7\}$ *i* $Z = \{8, 9, 10\}$ *representen els suports de tres nombres borrosos discrets, aleshores*

a) $X \wedge (X \vee Y) = \{4, 6, 7, 9\}$ *però* $X = \{4, 7, 9\}$.

b) $X \wedge (Y \vee Z) = \{4, 7, 8, 9\}$, *però* $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) = \{4, 6, 7, 8, 9\}$.

Aquest inconvenient farà que el conjunt DFN amb les operacions definides, max i min, no sigui en general un reticle (fallarà l'absorció). Hi ha però, casos particulars especialment interessants pels nostres objectius que evitaran aquest problema. Per aquest motiu introduirem les següents definicions.

Definició 3.2.17. *Sigui* S *una progressió aritmètica de nombres naturals de raó* r. *Llavors, anomenarem* $\mathcal{A}_r^S$ *al subconjunt de nombres borrosos discrets tals que tenen per suport un subconjunt finit de termes consecutius d'*S. *En particular, denotarem simplement per* $\mathcal{A}_1$ *al subconjunt de nombres borrosos discrets que tenen per suport un subconjunt finit de la progressió* $S = \mathbb{N}$.

Exemple 3.2.18. *Considerem per exemple la successió* $S = \{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\}$. *Llavors els nombres borrosos discrets* $A = \{0.3/7, 0.5/9, 1/11, 0.8/13\}$ *i* $B = \{0.6/13, 0.9/15, 1/17\}$ *pertanyen a* $\mathcal{A}_2^S$.

Recordem que denotam per L_n la cadena finita $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$.

Definició 3.2.19. *Anomenarem* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *al subconjunt de nombres borrosos discrets que tenen per suport un subconjunt de nombres naturals consecutius inclosos en la cadena* L_n *(òbviament, es té la inclusió* $\mathcal{A}_1^{L_n} \subseteq \mathcal{A}_1$*).*

Proposició 3.2.20. *Siguin* $A, B, C \in \mathrm{DFN}$ *amb suports els conjunts* $\mathrm{supp}(A)$, $\mathrm{supp}(B)$ *i* $\mathrm{supp}(C)$ *respectivament. Es verifiquen les següents propietats:*

1. *Absorció:*

   Si $\mathrm{supp}(B) \subseteq \mathrm{supp}(A)$ *o* $A, B \in \mathcal{A}_r^S$ *aleshores:*

$$\mathrm{supp}(A) \wedge (\mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B)) = \mathrm{supp}(A)$$

$$\mathrm{supp}(A) \vee (\mathrm{supp}(A) \wedge \mathrm{supp}(B)) = \mathrm{supp}(A)$$

2. *Distributivitat:*

   Si $A, B, C \in \mathcal{A}_r^S$, *aleshores es verifiquen les següents propietats:*

$$\mathrm{supp}(A) \wedge (\mathrm{supp}(B) \vee \mathrm{supp}(C)) = (\mathrm{supp}(A) \wedge \mathrm{supp}(B)) \vee (\mathrm{supp}(A) \wedge \mathrm{supp}(C))$$

$$\mathrm{supp}(A) \vee (\mathrm{supp}(B) \wedge \mathrm{supp}(C)) = (\mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B)) \wedge (\mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(C))$$

Demostració. Analitzem els dos casos. Com en la proposició 3.2.15, representarem respectivament per X, Y i Z als suports dels nombres borrosos discrets A, B i C.

1. Absorció:

   Si $z \in X \wedge (X \vee Y)$ aleshores $z = \min(a, \max(a', b))$ sent $a, a' \in X$ i $b \in Y$. Per tant si $z = a$ o $z = a'$ òbviament $z \in X$. Però si $z = b$ tenim que $a' \leqslant b \leqslant a$. Ara, d'acord amb les hipòtesi de la proposició, $b \in X$. D'on es dedueix que $X \wedge (X \vee Y) \subseteq X$.

   L'altre inclusió es conseqüència de la proposició 3.2.15.

2. Distributivitat: Volem veure que

$$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \subseteq X \wedge (Y \vee Z)$$

   Sigui $x \in (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$. Aleshores $x = \max(\min(x_1, y), \min(x_2, z))$ on $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ i $z \in Z$. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $x_1 \leqslant x_2$. Llavors:

   – Si $x = x_1$ aleshores $x_1 \leqslant y \leqslant y \vee z$ i així $x_1 = x_1 \wedge (y \vee z) \in X \wedge (Y \vee Z)$.
   – Si $x = y$ aleshores $y \leqslant x_1 \leqslant x_2$. Però $x_1 \wedge y = y \geqslant x_2 \wedge z = z$ i per tant $z \leqslant y \leqslant x_1 \leqslant x_2$ d'on es dedueix que $y = x_1 \wedge (y \vee z) \in X \wedge (Y \vee Z)$.
   – Si $x = x_2$ aleshores $x_2 \leqslant z \leqslant y \vee z$. I llavors $x_2 = x_2 \wedge (y \vee z) \in X \wedge (Y \vee Z)$.
   – Si $x = z$ tenim que $z \leqslant x_2$ i $x_2 \wedge z = z \geqslant x_1 \wedge y$. Per tant $x_1 \wedge y \leqslant z \leqslant x_2$ i diferenciam dos casos:
     * Si $x_1 \leqslant z$ llavors $x_1 \leqslant z \leqslant x_2$ i per tant $z \in X$, d'on $z = z \wedge (y \vee z) \in X \wedge (Y \vee Z)$.
     * Si $x_1 > z$ aleshores $x_1 \wedge y \leqslant z$ i així $x_1 \wedge y = y$ i tenim que $y \leqslant z < x_1 \leqslant x_2$ i d'aquí $z = x_1 \wedge (y \vee z) \in X \wedge (Y \vee Z)$.

   L'altre inclusió es conseqüència de la proposició 3.2.15.

□

La proposició 3.2.15 ens permetrà traslladar de manera senzilla les mateixes propietats a les operacions binàries min i max definides en la nota 3.2.14.

Teorema 3.2.21. *Les operacions binàries* min *i* max, *verifiquen, per a cada* $A, B, C \in \mathrm{DFN}$, *les següents propietats:*

1. Commutativa: $\min(A, B) = \min(B, A)$
   $\max(A, B) = \max(B, A)$

2. Associativa: $\min(\min(A, B), C) = \min(A, \min(B, C))$
   $\max(\max(A, B), C) = \max(A, \max(B, C))$

3. Idempotència: $\min(A, A) = A$
   $\max(A, A) = A$

Demostració. Siguin $A, B, C \in$ DFN. Considerem els seus α-nivells $A^\alpha = \{x_1^\alpha, ..., x_p^\alpha\}$, $B^\alpha = \{y_1^\alpha, ..., y_k^\alpha\}$, $C^\alpha = \{w_1^\alpha, ..., w_l^\alpha\}$ per a A, B i C respectivament.

1. Volem provar que $\min(A, B) = \min(B, A)$

Per això basta veure que els seus α-nivells són iguals, és a dir, $\min(A, B)^\alpha$ i $\min(B, A)^\alpha$ són els mateixos conjunts per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

D'acord al teorema 3.2.12 és té que

$$\begin{aligned}
\min(A, B)^\alpha &= \{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B) \mid (\min A^\alpha \wedge \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant (\max A^\alpha \wedge \max B^\alpha)\} \\
&= \{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B) \mid (x_1^\alpha \wedge y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha \wedge y_k^\alpha)\} \\
&= \{z \in \operatorname{supp}(B) \wedge \operatorname{supp}(A) \mid (y_1^\alpha \wedge x_1^\alpha) \leqslant z \leqslant (y_p^\alpha \wedge x_k^\alpha)\} \\
&= \min(B, A)^\alpha
\end{aligned}$$

Anàlogament es demostraria pel cas del màxim.

2. Volem demostrar que

$$\min(\min(A, B), C) = \min(A, \min(B, C))$$

Basta veure que els seus α-nivells, per a cada $\alpha \in [0, 1]$, són els mateixos conjunts .

D'acord al teorema 3.2.12

$$\begin{aligned}
\min(\min(A, B), C)^\alpha &= \{z \in \operatorname{supp}(\min(A, B)) \wedge \operatorname{supp}(C) \mid \\
&\quad \min\min(A, B)^\alpha \wedge \min C^\alpha \leqslant z \leqslant \max\min(A, B)^\alpha \wedge \max C^\alpha\} \\
&= \{z \in \operatorname{supp}(\min(A, B)) \wedge \operatorname{supp}(C) \mid \\
&\quad (x_1^\alpha \wedge y_1^\alpha) \wedge w_1^\alpha \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha \wedge y_k^\alpha) \wedge w_l^\alpha\} \\
&= \{z \in (\operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B)) \wedge \operatorname{supp}(C) \mid \\
&\quad (x_1^\alpha \wedge y_1^\alpha) \wedge w_1^\alpha \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha \wedge y_k^\alpha) \wedge w_l^\alpha\} \\
&= \{z \in (\operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B)) \wedge \operatorname{supp}(C) \mid \\
&\quad x_1^\alpha \wedge (y_1^\alpha \wedge w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant x_p^\alpha \wedge (y_k^\alpha \wedge w_l^\alpha\}) \\
&= \{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge (\operatorname{supp}(B) \wedge \operatorname{supp}(C)) \mid \\
&\quad x_1^\alpha \wedge (y_1^\alpha \wedge w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant x_p^\alpha \wedge (y_k^\alpha \wedge w_l^\alpha\}) \\
&= \min(A, \min(B, C))^\alpha
\end{aligned}$$

La demostració de l'altre propietat associativa és semblant.

3. Volem comprovar que

$$\min(A, A) = A$$

D'acord a la definició dels α-nivells de la funció min es té que

$$\begin{aligned}
\min(A, A)^\alpha &= \{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(A) \mid (x_1^\alpha \wedge x_1^\alpha) \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha \wedge x_p^\alpha)\} \\
&= \{z \in \operatorname{supp}(A) \mid x_1^\alpha \leqslant z \leqslant x_p^\alpha\} \\
&= A^\alpha
\end{aligned}$$

El mateix es faria per la funció max. □

En el cas que els nombres borrosos siguin del conjunt $\mathcal{A}_r^S$ tenim també la propietat distributiva i d'absorció, com es pot veure en el següent resultat.

Teorema 3.2.22. *Si* $A, B, C \in \mathcal{A}_r^S$ *es verifica:*

1. Absorció: $$\begin{aligned} \min(A, \max(A, B)) &= A \\ \max(A, \min(A, B)) &= A \end{aligned}$$

2. Distributivitat: $$\begin{aligned} \min(A, \max(B, C)) &= \max(\min(A, B), \min(A, C)) \\ \max(A, \min(B, C)) &= \min(\max(A, B), \max(A, C)) \end{aligned}$$

Demostració. Siguin $A, B, C \in$ DFN. I considerem els seus α-nivells $A^\alpha = \{x_1^\alpha, ..., x_p^\alpha\}$, $B^\alpha = \{y_1^\alpha, ..., y_k^\alpha\}$, $C^\alpha = \{w_1^\alpha, ..., w_l^\alpha\}$ per a A, B i C respectivament.

1. Volem verificar que
$$\min(A, \max(A, B)) = A$$

D'acord al teorema 3.2.12 els α-nivells vindran donats per

$$\begin{aligned} \min(A, \max(A, B))^\alpha = &\{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(\max(A, B)) \mid \\ &\min A^\alpha \wedge \min \max(A, B)^\alpha \leqslant z \leqslant \max A^\alpha \wedge \max \max(A, B)^\alpha\} \\ = &\{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(\max(A, B)) \mid \\ &x_1^\alpha \wedge (x_1^\alpha \vee y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant x_p^\alpha \wedge (x_p^\alpha \vee y_k^\alpha\}) \\ = &\{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge (\operatorname{supp}(A) \vee \operatorname{supp}(B)) \mid x_1^\alpha \leqslant z \leqslant x_p^\alpha\} \\ = &\{z \in \operatorname{supp}(A) \mid x_1^\alpha \leqslant z \leqslant x_p^\alpha\} \\ = &A^\alpha \end{aligned}$$

On les dues darreres igualtats hem aplicat, respectivament la propietat d'absorció dels nombres reals i la proposició 3.2.20. De la mateixa forma demostraríem l'altra llei d'absorció.

2. Demostrarem només la primera propietat distributiva, l'altra es faria de manera semblant. Per tant es tracte de veure que

$$\min(A, \max(B, C)) = \max(\min(A, B), \min(A, C))$$

D'acord als teoremes 3.2.8 i 3.2.12 es té que

$$\begin{aligned} \min(A, \max(B, C))^\alpha = &\{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(\max(B, C)) \mid \\ = &\min A^\alpha \wedge \min \max(B, C)^\alpha \leqslant z \leqslant \max A^\alpha \wedge \max \max(A, B)^\alpha\} \\ = &\{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge (\operatorname{supp}(B) \vee \operatorname{supp}(C)) \mid \\ &x_1 \wedge (y_1^\alpha \vee w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant x_p^\alpha \wedge (y_k^\alpha \vee w_l^\alpha)\} \end{aligned}$$

La darrera igualtat és conseqüència de la propietat distributiva dels nombres naturals. Així,

$$\begin{aligned} \min(A, \max(B, C))^\alpha = &\{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge (\operatorname{supp}(B) \vee \operatorname{supp}(C)) \mid \\ &(x_1^\alpha \wedge y_1^\alpha) \vee ((x_1^\alpha \wedge w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha \wedge y_k^\alpha) \vee (x_p^\alpha \wedge w_l^\alpha)\} \\ = &\{z \in (\operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B)) \vee (\operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(C)) \mid \\ &(x_1^\alpha \wedge y_1^\alpha) \vee ((x_1^\alpha \wedge w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha \wedge y_k^\alpha) \vee (x_p^\alpha \wedge w_l^\alpha) \\ = &\max(\min(A, B), \min(A, C))^\alpha \end{aligned}$$

□

Una conseqüència important del teorema anterior és que en el conjunt $\mathcal{A}_r^S$, de nombres borrosos discrets tals que tenen per suport un subconjunt finit de termes consecutius d'una progressió aritmètica S de nombres naturals de diferència r, és pot considerar una estructura de reticle distributiu amb les operacions min i max. Per tant es té el següent resultat:

Teorema 3.2.23. *La terna* $(\mathcal{A}_r^S, \min, \max)$ *és un reticle distributiu, on les operacions binàries* min *i* max *representaran la conjunció i la disjunció respectivament.*

Demostració. Primer notem que si $A, B \in \mathcal{A}_r^S$ els seus suports,$\mathrm{supp}(A)$ i $\mathrm{supp}(B)$, són subconjunts de termes consecutius de S. Llavors, també ho seran $\mathrm{supp}(A) \wedge \mathrm{supp}(B)$ i $\mathrm{supp}(A) \vee \mathrm{supp}(B)$. Així el resultat és conseqüència immediata dels teoremes 3.2.21 i 3.2.22 anteriors. □

Nota 3.2.24. *El reticle* $(\mathcal{A}_r^S, \min, \max)$ *també es podrà expressar com* $(\mathcal{A}_r^S, \preceq)$*, on* $\preceq$ *és l'ordre parcial donat per la següent relació binària:*
$A \preceq B$ *si i només si* $\min(A, B) = A$ *o, alternativament,*
$A \preceq B$ *si i només si* $\max(A, B) = B$ *per a qualsevol parella* $A, B \in \mathcal{A}_r^S$.

Nota 3.2.25. *També és possible definir l'ordre anterior a partir dels* α*-conjunts de nivell de la següent forma:*
$A \preceq B$ *si i només si* $\min(A, B)^\alpha = A^\alpha$
$A \preceq B$ *si i només si* $\max(A, B)^\alpha = B^\alpha$
per a qualsevol parella $A, B \in \mathcal{A}_r^S$ *i* $\alpha \in [0, 1]$*, on* A^α *i* B^α *denotaran els* α*-nivells dels nombres borrosos discrets* A *i* B *respectivament.*

Exemple 3.2.26. *Siguin*

$$A = \{0.4/1, 1/2, 0.8/3, 0.6/4, 0.5/5, 0.4/6, 0.3/7\}$$
$$B = \{0.3/4, 0.6/5, 0.7/6, 0.8/7, 1/8, 0.8/9\}$$

dos nombres borrosos del conjunt $\mathcal{A}_1$*. Un senzill càlcul permet veure que* $A \preceq B$ *perquè* $\max(A, B) = B$*, o equivalentment,* $\min(A, B) = A$.

Nota 3.2.27. *Cal remarcar que l'ordre definit en el reticle distributiu* $(\mathcal{A}_r^S, \preceq)$ *tal com s'explicita en la nota 3.2.24 o de manera equivalent a partir dels conjunts de nivell en la nota 3.2.25 no és un ordre total, és a dir, és possible trobar nombres borrosos discrets* $A, B \in \mathcal{A}_1$ *tals que no siguin comparables per tant que es tingui que* $\max(A, B) \neq A$ *i* $\max(A, B) \neq B$ *o equivalentment* $\min(A, B) \neq A$ *i* $\min(A, B) \neq B$*. Per exemple, si consideram els nombres borrosos discrets*

$$A = \{0.3/4, 0.5/5, 0.8/6, 1/7, 0.9/8, 0.7/9\}$$
$$B = \{0.5/6, 1/7, 0.9/8, 0.6/9, 0.5/10\}$$

Aleshores,

$$\min(A, B) = \{0.3/4, 0.5/5, 0.8/6, 1/7, 0.9/8, 0.6/9\} \neq A, B.$$

Una altre resultat interessant que s'obté de manera immediata del teorema 3.2.21 és que també es possible obtenir una estructura de reticle distributiu en cert tipus de subconjunts de nombres borrosos discrets tal com es veurà en el següent resultat.

Proposició 3.2.28. *Per a cada subconjunt finit* X *de nombres reals, considerem els subconjunt* $F_X = \{A \in DFN \mid \mathrm{supp}(A) = X\}$*. Aleshores, la terna* $(F_X, \min, \max)$ *és un reticle distributiu on* min *i* max *representen la conjunció i la disjunció respectivament.*

Demostració. Immediata a partir del teorema 3.2.21. □

Exemple 3.2.29. *Siguin* $X = \{3, 4, 7, 8\} \subseteq \mathbb{R}$ *i considerem* $A = \{0.3/3, 0.4/5, 1/7, 0.7/8\}, B = \{0.3/3, 1/5, 0.7/7, 0.6/8\} \in F_X$. *És fàcil demostrar que* $B \preceq A$ *perquè* $\max(A, B) = A$.

D'acord al teorema 3.2.23, sabem que $\mathcal{A}_r^S$ és un conjunt parcialment ordenat que té estructura de reticle amb les operacions min and max, definides en les proposicions 3.2.12 i 3.2.8 respectivament, com a operacions reticulars. Ara, a partir d'aquest fet, volem estudiar si és possible construir reticles fitats inclosos dins d'aquest reticle.

Seguidament comprovarem que el conjunt $\mathcal{A}_1^{L_n}$ té estructura de reticle fitat distributiu amb les operacions min i max. Per això, primerament comprovarem que aquestes operacions són tancades dins d'aquest conjunt.

Proposició 3.2.30. *Si* $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ *aleshores* $\min(A, B)$ *i* $\max(A, B)$ *pertanyen al conjunt* $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Demostració. Aquest fet es deriva de la definició dels α-conjunts de nivell dels nombres borrosos discrets $\min(A, B)$ i $\max(A, B)$. En efecte, si $A^\alpha = \{x_1^\alpha, \cdots, x_p^\alpha\}$ i $B^\alpha = \{y_1^\alpha, \cdots, y_k^\alpha\}$ denoten els α-conjunts de nivell per a A, B respectivament, sabem d'acord als teoremes 3.2.8 i 3.2.12 que els α-nivells vindran dotats per a cada $\alpha \in [0, 1]$ per les expressions:

$$\max(A, B)^\alpha = \{z \in \operatorname{supp}(A) \vee \operatorname{supp}(B) \mid \max(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant \max(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\}$$

$$\min(A, B)^\alpha = \{z \in \operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B) \mid \min(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant \min(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\}$$

A més, és obvi que els conjunts $\operatorname{supp}(A) \wedge \operatorname{supp}(B)$ i $\operatorname{supp}(A) \vee \operatorname{supp}(B)$ són subconjunts de nombres naturals consecutius inclosos en la cadena finita L_n, i així els α-nivells $\min(A, B)^\alpha$ i $\max(A, B)^\alpha$ també per a tot $\alpha \in [0, 1]$. Per tant, els nombres borrosos discrets $\min(A, B)$ i $\max(A, B)$ pertanyen al conjunt $\mathcal{A}_1^{L_n}$. □

A continuació veurem un exemple senzill on es constata aquest fet.

Exemple 3.2.31. *Siguin*

$$\begin{aligned} A &= \{0.4/1, 1/2, 0.8/3, 0.6/4, 0.5/5, 0.4/6, 0.3/7\} \\ B &= \{0.3/4, 0.6/5, 0.7/6, 0.8/7, 1/8, 0.8/9\} \end{aligned}$$

dos nombres borrosos discrets que pertanyen al conjunt $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Aleshores,*

$$\begin{aligned} \max(A, B) &= \{0.3/4, 0.6/5, 0.7/6, 0.8/7, 1/8, 0.8/9\} \\ \min(A, B) &= \{0.4/1, 1/2, 0.8/3, 0.6/4, 0.5/5, 0.4/6, 0.3/7\} \end{aligned}$$

que pertanyen clarament a $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Teorema 3.2.32. *El triplet* $(\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max)$ *és un reticle fitat distributiu amb mínim el dfn* 1_0 *i màxim el dfn* 1_n.

Demostració. L'estructura de reticle distributiu es deriva immediatament del teorema 3.2.23 i de la proposició anterior 3.2.30. A més, és immediat veure que el nombre borrós discret 1_n que només té com a suport el nombre natural n és el màxim del reticle distributiu $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Anàlogament, el nombre borrós discret 1_0 que només té com a suport el nombre natural 0 és el mínim del reticle distributiu $\mathcal{A}_1^{L_n}$. □

Definició 3.2.33. *El reticle* $\mathcal{A}_1^{L_n} = (\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max)$ *serà anomenat* reticle borrós discret.

Sigui ara, $\mathbb{B}$ el subconjunt de $\mathcal{A}_1^{L_n}$ donat per

$$\mathbb{B} = \{A \in \mathcal{A}_1^{L_n} \mid \mathrm{supp}(A) = \mathrm{core}(A)\} \subseteq \mathcal{A}_1^{L_n}, \tag{3.4}$$

que té per elements els nombres borrosos discrets tals que els seus α-nivells són sempre iguals per a qualsevol $\alpha \in [0,1]$ i òbviament continguts en L_n. D'aquesta forma, cada nombre borrós discret $A \in \mathbb{B}$ pot ser interpretat com un interval tancat $[a,b] \subseteq I(L_n)$, on $I(L_n)$ denota el conjunt d'intervals tancats de la cadena L_n. Ara per ser $\mathcal{A}_1^{L_n}$ un reticle fitat distributiu resulta,

Proposició 3.2.34. $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, \max, \min, 1_0, 1_n)$ *és un reticle distributiu fitat on els nombres borrosos discrets* 1_0 *i* 1_n *són interpretats com els elements del conjunt* $\mathbb{B}$ *que tenen per suport els intervals* $[0,0]$ *i* $[n,n]$ *respectivament.*

Demostració. És immediat que $\max(A,B), \min(A,B) \in \mathbb{B}$ per a tots $A, B \in \mathbb{B}$ i per tant $\mathbb{B}$ és un subreticle fitat de $\mathcal{A}_1^{L_n}$. $\square$

D'aquesta manera, l'estudi del reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$ conté, en particular, el reticle $I(L_n)$ dels intervals discrets de L_n. La qüestió que ens plantejam ara és si existeix alguna relació entre les operacions reticulars MAX i MIN definides d'acord al principi d'extensió de Zadeh [90] i aquestes dues noves operacions binàries min, max considerades en la nota 3.2.14 en el cas de $\mathcal{A}_r^S$ i, en particular, en $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

3.2.1 *Relació entre el principi de Zadeh i les operacions* min *i* max

Els nombres borrosos discrets podem ser interpretats com subconjunts borrosos homòlegs als nombres borrosos però amb suport discret. Aquest interpretació ve motivada perquè les seves funcions de pertinença verifiquen propietats semblants com per exemple: convexitat, existència de nucli, etc. Les operacions aritmètiques, així com les operacions reticulars màxim i mínim, entre nombres borrosos es calculen habitualment utilitzant el principi d'extensió de Zadeh [90]. Però com hem vist en l'exemple 3.2.4, aquest mètode falla en el cas discret. Per aquesta raó s'ha proporcionat al llarg d'aquest capítol un mètode que permet construir operacions reticulars en els conjunts DFN, $\mathcal{A}_r^S$ i $\mathbb{B}$. El que seria interessant és saber quan el principi d'extensió i els mètodes exposats en els teoremes 3.2.8 i 3.2.12 coincideixen, perquè d'aquesta manera tindrien dos possibles camins per a calcular dites operacions.

El que a continuació demostrarem és que el mètode proposat coincideix amb el principi d'extensió de Zadeh quan els nombres borrosos discrets tenen per suport un subconjunt de termes consecutius d'una progressió aritmètica S. Concretament:

Proposició 3.2.35. *Si* $A, B \in \mathcal{A}_r^S$ *aleshores* $\mathrm{MAX}(A,B)$, *definit a partir del principi d'extensió, coincideix amb* $\max(A,B)$. *Per tant, si* $A, B \in \mathcal{A}_r^S$, *aleshores* MAX *i* max *són la mateixa operació. A més,* $\mathrm{MAX}(A,B) \in \mathcal{A}_r^S$.

Demostració. Siguin $A, B \in \mathcal{A}_r^S$. Per demostrar que les dues operacions són iguals cal demostrar que per a tot $\alpha \in [0,1]$ els α-conjunts de nivell dels subconjunts borrosos $\mathrm{MAX}(A,B)$ i $\max(A,B)$ coincideixen. D'aquesta forma, tindrem que com $\max(A,B) \in \mathcal{A}_r^S$ és tindrà que $\mathrm{MAX}(A,B) \in \mathcal{A}_r^S$.

Sabem [90] que la funció de pertinença de la funció MAX d'acord al principi d'extensió ve donada per l'expressió

$$\mathrm{MAX}(A,B)(z) = \sup\{\min(A(x), B(y)) \mid z = \max(x,y)\}$$

I que els seus α-conjunts de nivell venen dotats per

$$MAX(A,B)^{\alpha} = \{z = \max(x,y) \mid x \in A^{\alpha}, y \in B^{\alpha}\}.$$

Per demostrar que $MAX(A,B)^{\alpha} = \max(A,B)^{\alpha}$ ho demostrarem en dues passes:

- Primer veurem que $MAX(A,B)^{\alpha} \subseteq \max(A,B)^{\alpha}$

  Si $z \in MAX(A,B)^{\alpha}$, aleshores aquest element s'expressa com $z = \max(x,y)$ amb $x \in A^{\alpha}, y \in B^{\alpha}$. Per tant, $z \in \{supp(A) \vee supp(B) \mid \min(A^{\alpha}) \vee \min(B^{\alpha}) \leqslant z \leqslant \max(A^{\alpha}) \vee \max(B^{\alpha})\}$ i llavors $z \in \max(A,B)^{\alpha}$.

- Ara provarem que $\max(A,B)^{\alpha} \subseteq MAX(A,B)^{\alpha}$. Suposem que $A^{\alpha} = \{x_1^{\alpha}, \cdots, x_p^{\alpha}\}$ i $B^{\alpha} = \{y_1^{\alpha}, \cdots, y_k^{\alpha}\}$. Si $z \in \max(A,B)^{\alpha}$, aleshores tenim que $z \in \{supp(A) \vee supp(B) \mid (x_1^{\alpha} \vee y_1^{\alpha}) \leqslant z \leqslant (x_p^{\alpha} \vee y_k^{\alpha})\}$.

  Ara diferenciam 4 casos:

  - Si $x_1^{\alpha} \vee y_1^{\alpha} = x_1^{\alpha}$ i $x_p^{\alpha} \vee y_k^{\alpha} = x_p^{\alpha}$, aleshores $z \in A^{\alpha}$ i $z = z \vee y_1^{\alpha} \in MAX(A,B)^{\alpha}$
  - Si $x_1^{\alpha} \vee y_1^{\alpha} = x_1^{\alpha}$ i $x_p^{\alpha} \vee y_k^{\alpha} = y_k^{\alpha}$, aleshores $z \in B^{\alpha}$ i $z = x_1^{\alpha} \vee z \in MAX(A,B)^{\alpha}$
  - Si $x_1^{\alpha} \vee y_1^{\alpha} = y_1^{\alpha}$ i $x_p^{\alpha} \vee y_k^{\alpha} = x_p^{\alpha}$, aleshores $z \in A^{\alpha}$ i $z = z \vee y_1^{\alpha} \in MAX(A,B)^{\alpha}$
  - Si $x_1^{\alpha} \vee y_1^{\alpha} = y_1^{\alpha}$ i $x_p^{\alpha} \vee y_k^{\alpha} = y_k^{\alpha}$, aleshores $z \in B^{\alpha}$ i $z = x_1^{\alpha} \vee z \in MAX(A,B)^{\alpha}$

  D'on deduïm que $z \in MAX(A,B)^{\alpha}$.

A més, si $A, B \in \mathcal{A}_r^S$, aleshores els seus α-nivells es poden escriure com

$$A^{\alpha} = \{z \in S \mid \min A^{\alpha} \leqslant z \leqslant \max A^{\alpha}\}$$
$$B^{\alpha} = \{z \in S \mid \min B^{\alpha} \leqslant z \leqslant \max B^{\alpha}\}$$

per a tot $\alpha \in [0,1]$. Per tant,

$$MAX(A,B)^{\alpha} = \{z \in S \mid (\min A^{\alpha} \vee \min B^{\alpha}) \leqslant z \leqslant (\max A^{\alpha} \vee \max B^{\alpha})\}$$

i podem afirmar que $MAX(A,B)^{\alpha} = \max(A,B)^{\alpha}$ és un subconjunt de termes consecutius de S per a tot $\alpha \in [0,1]$. Així, $MAX(A,B) = \max(A,B) \in \mathcal{A}_r^S$. □

Un resultat totalment anàleg ho tenim en el cas de la funció mínim.

Proposició 3.2.36. *Si* $A, B \in \mathcal{A}_r^S$ *aleshores* $MIN(A,B)$*, definit a partir del principi d'extensió, coincideix amb* $\min(A,B)$*. Per tant, si* $A, B \in \mathcal{A}_r^S$*, aleshores* MIN *i* min *són la mateixa operació. A més,* $MIN(A,B) \in \mathcal{A}_r^S$.

Nota 3.2.37. *En el capítol següent treballarem casi exclusivament amb el reticle* $(\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max)$ *i per tant, alhora de calcular* $\min(A,B)$ *o* $\max(A,B)$ *ho podrem fer indistintament, utilitzant el principi d'extensió de Zadeh, que ens permet un càlcul més ràpid, o mitjançant la nostra construcció, que assegura que els nivells venen donats per*

$$\min(A,B)^{\alpha} = \{z \in \mathbb{N} \mid \min A^{\alpha} \wedge \min B^{\alpha} \leqslant z \leqslant \max A^{\alpha} \wedge \max B^{\alpha}\}$$

$$\max(A,B)^{\alpha} = \{z \in \mathbb{N} \mid \min A^{\alpha} \vee \min B^{\alpha} \leqslant z \leqslant \max A^{\alpha} \vee \max B^{\alpha}\}$$

3.3 ESTRUCTURES MONOIDALS EN EL CONJUNT DE NOMBRES BORROSOS DISCRETS

L'estudi de monoides és interessant des de dos punts de vista. Per una part, pel propi interès algebraic, donat que a partir d'elles és poden construir les principals estructures algebraiques conegudes (recordem a més, que les pròpies t-normes i t-conormes doten d'aquesta estructura a l'interval $[0,1]$) o per l'altra, perquè poden ser emprats com a fonaments d'algunes semàntiques de determinades lògiques, com ara, la lògica lineal intuicionista (a partir de la completació de monoides ordenats), etc.

En aquesta secció, estudiam aquesta estructura algèbrica en el conjunt de nombres borrosos discrets. En concret, donat que en el reticle distributiu $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_1, \min, \max)$ es té definit un ordre parcial, el que farem és considerar una operació interna $\oplus$, de tal manera que la terna $(\mathcal{A}_1, \preceq, \oplus)$ tingui estructura de monoide ordenat. Aquesta estructura ens interessarà a més, perquè en el capítol següent serà emprada tant en l'anàlisi de funcions d'agregació sobre el subreticle $\mathcal{A}_1^{L_n} \subseteq \mathcal{A}_1$, en particular en l'estudi de l'equació de Frank en el reticle borrós discret, com en la construcció d'algunes funcions d'implicació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

3.3.1 *La suma de nombres borrosos discrets*

Amb la intenció de proporcionar una operació interna (en el nostre cas la suma) en el conjunt DFN, la primera idea que cal plantejar-se és la d'utilitzar el principi d'extensió de Zadeh 2.4.6 de manera anàloga a com es fa en el conjunt de nombres borrosos. Ara bé, ens trobam un altre cop, com veurem en el següent exemple, que la suma de nombres borrosos discrets emprant aquest mètode produeix subconjunts borrosos que no verifiquen les condicions exposades en la definició 3.2.1.

Exemple 3.3.1. *Si consideram els nombres borrosos discrets, $A = \{0.5/1, 1/2, 0.7/4\}$ i $B = \{0.8/8, 1/16, 0.7/32\}$. Aleshores, aplicant el principi d'extensió, el subconjunt borrós que obtindríem és*

$$A \oplus B = \{0.5/9, 0.8/10, 0.7/12, 0.5/17, 1/18, 0.7/20, 0.5/33, 0.7/34, 0.7/36\}$$

que no pertany a DFN perquè $(A \oplus B)(10) = 0.8 < (A \oplus B)(12) = 0.7$ i per aquesta raó no verifica la condició 2 de la definició 3.2.1.

L'any 2005, G. Wang proporciona un mètode per obtenir la suma de nombres borrosos discrets a partir dels conjunts de nivells de cadascuns dels sumands que intervenen en l'operació. En concret,

Definició 3.3.2. *[145] Siguin $A, B \in \mathrm{DFN}$. Es defineix la suma de A i B com el subconjunt borrós, que denotarem per $A \underset{W}{\oplus} B$, tal que té per α-conjunts de nivell el subconjunts $[A \underset{W}{\oplus} B]^\alpha$ definits per a cada $\alpha \in [0,1]$ com*

$$\{x \in \mathrm{supp}(A) + \mathrm{supp}(B) \mid \min(A^\alpha + B^\alpha) \leqslant x \leqslant \max(A^\alpha + B^\alpha)\}$$

i on la seva funció de pertinença es defineix com

$$(A \underset{W}{\oplus} B)(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid x \in [A \underset{W}{\oplus} B]^\alpha\}$$

Teorema 3.3.3. *[145] Per a tota parella $A, B \in \mathrm{DFN}$ es verifica que $A \underset{W}{\oplus} B \in \mathrm{DFN}$. A més a més, si la suma $A \oplus B$, calculada a partir del principi d'extensió de Zadeh pertany a DFN, llavors $A \oplus B = A \underset{W}{\oplus} B$.*

Exemple 3.3.4. *Siguin* $A = \{0.4/15, 1/19, 1/25, 0.5/30\}$ *i* $B = \{0.2/1, 1/2, 1/3, 0.3/4\}$ *dos nombres borrosos discrets. Si aplicam el mètode de Wang resulta:*

$$A \underset{W}{\oplus} B = \{0.2/16, 0.4/17, 0.4/18, 0.4/19, 0.4/20, 1/21, 1/22, 1/23, 1/26,$$
$$1/27, 1/28, 0.5/29, 0.5/31, 0.5/32, 0.5/33, 0.3/34\}$$

obtingut a partir del següents conjunts de nivell,

$$\begin{aligned}
[A \underset{W}{\oplus} B]^1 &= \{21, 22, 23, 26, 27, 28\} \\
[A \underset{W}{\oplus} B]^{0.5} &= \{21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33\} \\
[A \underset{W}{\oplus} B]^{0.4} &= \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33\} \\
[A \underset{W}{\oplus} B]^{0.3} &= \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34\} \\
[A \underset{W}{\oplus} B]^{0.2} &= \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34\}
\end{aligned}$$

El que farem ara és estudiar diferents possibilitats de definició de suma en el conjunt DFN a través del concepte d'*associació*. En particular estudiarem la relació d'aquest amb el mètode de Wang exposat abans i amb el principi d'extensió de Zadeh.

3.3.2 *Associacions*

Definició 3.3.5. *Per a cada* $A \in \mathrm{DFN}$ *amb suport el conjunt,* $\mathrm{supp}(A) = \{x_1, ...x_s, ..., x_t, ..., x_n\}$ *i* $A(x_i) = 1$ *per a cada nombre natural* i *tal que* $s \leqslant i \leqslant t$*, considerem el conjunt de nombres borrosos* $\tilde{A}$ *que verifica les següents propietats:*

1. $\mathrm{supp}(\tilde{A}) = [x_1, x_n]$
2. *Si* $x_i \in \mathrm{supp}(A)$ *aleshores* $\tilde{A}(x_i) = A(x_i)$ *para a cada* $i = 1, ..., n$
3. *Per a tot* $x \in [x_i, x_{i+1}]$ *amb* $1 \leqslant i \leqslant i+1 \leqslant s$ *es verifiquen les desigualtats següents:*
$$A(x_i) \leqslant \tilde{A}(x) \leqslant A(x_{i+1})$$
4. *Per a tot* $x \in [x_i, x_{i+1}]$ *amb* $t \leqslant i \leqslant i+1 \leqslant n$ *es verifiquen les desigualtats següents:*
$$A(x_i) \geqslant \tilde{A}(x) \geqslant A(x_{i+1})$$

Denotarem per $\mathrm{FN}(A)$ *al conjunt de tots els nombres borrosos* $\tilde{A}$ *amb aquestes condicions.*

Definició 3.3.6. *Definim una* associació *com una aplicació que assigna a cada nombre borrós discret* A *un nombre borrós de* $\mathrm{FN}(A)$*, és a dir,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}: \ \mathrm{DFN} &\rightarrow \mathrm{FN} \\
A &\mapsto \mathbf{A}(A) \in \mathrm{FN}(A)
\end{aligned}$$

Exemple 3.3.7. *A continuació proposarem dos senzills exemples d'aquest concepte que anomenarem respectivament* associació lineal *i* α-associació*.*

1. *Per a cada* $A \in DFN$ *denotam el suport* $\mathrm{supp}(A) = \{x_1, ..., x_s, ..., x_t, ..., x_n\}$, *amb* $x_1 < ... < x_s < ... < x_t, ... < x_n$, *i* $A(x_p) = 1$ *per a cada nombre natural* p *tal que* $s \leqslant p \leqslant t$. *Definim* $\tilde{A}_l$ *com el nombre borrós donat per l'expressió:*

$$\tilde{A}_l(x) = \begin{cases} \frac{A(x_{i+1})-A(x_i)}{x_{i+1}-x_i}(x - x_{i+1}) + A(x_{i+1}) & \textit{si} \;\; x \in [x_i, x_{i+1}] \textit{ amb } \; x_{i+1} \leqslant x_s \\ 1 & \textit{si} \;\; x \in [x_s, x_t] \\ \frac{A(x_i)-A(x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}}(x - x_i) + A(x_i) & \textit{si} \;\; x \in [x_i, x_{i+1}] \textit{ amb } \; x_i \geqslant x_t \end{cases}$$

Es fàcil provar que $\tilde{A}_l \in FN(A)$.

2. *Per una altra part, definim* $\tilde{A}_\alpha$ *com el nombre borrós que té per expressió:*

$$\tilde{A}_\alpha(x) = \begin{cases} A(x_i) & \textit{si} \;\; x \in [x_i, x_{i+1}] \textit{ amb } \; x_{i+1} \leqslant x_s \\ 1 & \textit{si} \;\; x \in [x_s, x_t] \\ A(x_{i+1}) & \textit{si} \;\; x \in (x_i, x_{i+1}] \textit{ amb } \; x_i \geqslant x_t \end{cases}$$

Un altre cop és fàcil provar que $\tilde{A}_\alpha \in FN(A)$.

En particular, si A *és el nombre borrós discret* $A = \{0.2/1, 1/2, 1/3, 0.3/4\}$, *aleshores*

$$\tilde{A}_l(x) = \begin{cases} \frac{8x-6}{10} & \textit{si} \;\; x \in [1,2] \\ 1 & \textit{si} \;\; x \in [2,3] \\ \frac{31-7x}{10} & \textit{si} \;\; x \in [3,4] \end{cases} \qquad \tilde{A}_\alpha(x) = \begin{cases} 0.2 & \textit{si} \;\; x \in [1,2) \\ 1 & \textit{si} \;\; x \in [2,3] \\ 0.3 & \textit{si} \;\; x \in (3,4] \end{cases}$$

Aquest nombre borrós A *i els seu associat* $\tilde{A}_l$ *es poden veure en la figura* 13. *Igualment,* A *i el seu associat* $\tilde{A}_\alpha$ *es poden veure en la figura* 14.

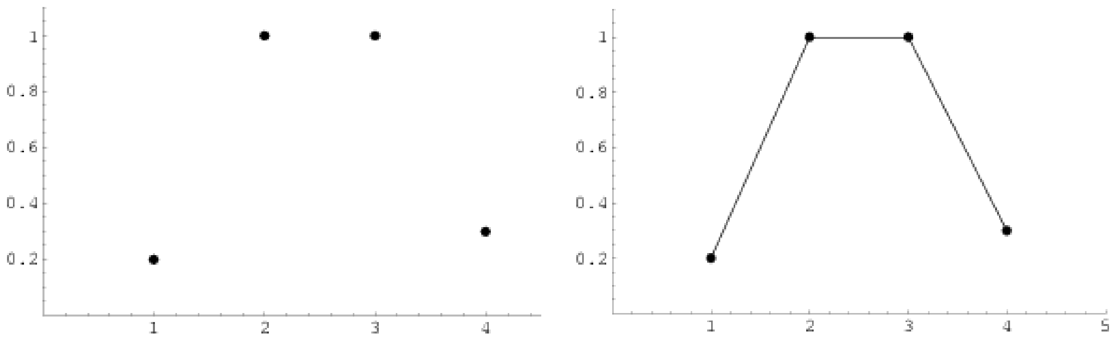

Figura 13: El nombre borrós discret A de l'exemple 3.3.7 i el seu associat $\tilde{A}_l$ construït a partir de l'associació lineal.

A partir de l'ordre estàndard del conjunt dels nombres reals podem induir un ordre parcial en el conjunt $FN(A)$ per a cada $A \in DFN$ de la següent manera:

Definició 3.3.8. *Siguin* $\tilde{B}, \tilde{C} \in FN(A)$. *Aleshores es defineix l'ordre parcial* $\tilde{B} \leqslant \tilde{C}$ *si i només si* $\tilde{B}(x) \leqslant \tilde{C}(x)$ *per a tot element* $x \in \mathrm{supp}(\tilde{B}) = \mathrm{supp}(\tilde{C})$.

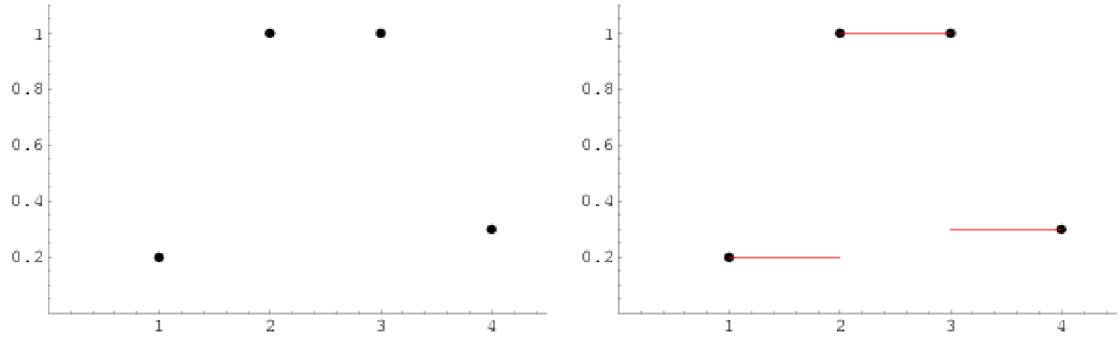

Figura 14: El nombre borrós discret A de l'exemple 3.3.7 i el seu associat $\tilde{A}_\alpha$ obtingut a través de la α-associació.

Proposició 3.3.9. *Sigui* $\tilde{A}_\alpha \in \mathrm{FN}(A)$ *el nombre borrós definit d'acord amb la* α*-associació (veure l'exemple* 3.3.7*). Aleshores* $\tilde{A}_\alpha \leqslant \tilde{B}$ *per a tot nombre borrós* $\tilde{B} \in \mathrm{FN}(A)$.

Demostració. Considerem $A \in \mathrm{DFN}$ que té per suport $\mathrm{supp}(A) = \{x_1, ..., x_s, ..., x_t, ..., x_n\}$ i $A(x_p) = 1$ per a cada nombre natural p tal que $s \leqslant p \leqslant t$. Sigui $x \in [x_1, x_n] = \mathrm{supp}(\tilde{A}_\alpha) = \mathrm{supp}(\tilde{B})$. Llavors:

- Si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ amb $i \leqslant s$, tenim $\tilde{A}_\alpha(x) = A(x_i) \leqslant \tilde{B}(x)$.
- Si $x \in [x_s, x_t]$ així $\tilde{A}_\alpha(x) = 1 = \tilde{B}(x)$.
- Si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ amb $i \geqslant t$, llavors $\tilde{A}_\alpha(x) = A(x_{i+1}) \leqslant \tilde{B}(x)$.

Per tant es dedueix que, per a tot x del suport, $\tilde{A}_\alpha(x) \leqslant \tilde{B}(x)$. □

Nota 3.3.10. *Sigui* $\mathbb{A}$ *el conjunt de totes les associacions, és a dir, funcions* $\mathbf{A} : \mathrm{DFN} \to \mathrm{FN}$ *tals que* $\mathbf{A}(B) \in \mathrm{FN}(B)$ *per a tot* $B \in \mathrm{DFN}$. *En aquest conjunt és fàcil definir un ordre parcial de la següent manera:*

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{A}$ *aleshores* $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$ *si i només si* $\mathbf{A}(C) \leqslant \mathbf{B}(C)$ *per a tot* $C \in \mathrm{DFN}$.

Nota 3.3.11. *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$ *verifica que per a tot* $B \in \mathrm{DFN}$, $\mathbf{A}(B) = \tilde{B}_\alpha$, *tal com s'ha definit en l'exemple* 3.3.7, *aleshores a l'associació* $\mathbf{A}$ *la denotarem per* $\mathbf{A}_\alpha$.

Proposició 3.3.12. *Sigui* $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$ *una associació. Aleshores* $\mathbf{A}_\alpha \leqslant \mathbf{A}$, *és a dir, per a tot* $B \in \mathrm{DFN}$ $\mathbf{A}_\alpha(B) = \tilde{B}_\alpha \leqslant \mathbf{A}(B)$.

Demostració. És immediata per la proposició 3.3.9. □

3.3.3 *Sumes definides a través d'associacions*

Definició 3.3.13. *Siguin* $B, C \in \mathrm{DFN}$ *i* $\mathcal{A} : \mathrm{DFN} \to \mathrm{FN}$ *una associació. Anomenarem suma borrosa discreta dels nombres* B *i* C *relativa a l'associació* $\mathbf{A}$, *i ho denotarem per* $B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C$, *al subconjunt borrós tal que:*

1. *El seu suport ve donat pel conjunt*

$$\mathrm{supp}(B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C) = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y, x \in \mathrm{supp}(B), y \in \mathrm{supp}(C)\} = \mathrm{supp}(B) + \mathrm{supp}(C)$$

2. *El valor en cada punt del suport es calcula d'acord a l'expressió*

$$(B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C)(z) = (\mathbf{A}(B) \oplus \mathbf{A}(C))(z) \ \ \textit{per a tot} \ \ z \in \operatorname{supp}(B \underset{\mathcal{A}}{\oplus} C)$$

on $\mathbf{A}(B) \oplus \mathbf{A}(C)$ *representa la suma dels nombres borrosos* $\mathbf{A}(B), \mathbf{A}(C)$ *calculada d'acord al principi d'extensió de Zadeh.*

Nota 3.3.14. *Notam que*

1. *El subconjunt borrós discret* $B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C$ *definit anteriorment satisfà les condicions de nombre borrós discret.*

2. *Si* $\mathbf{A}(B) = \tilde{B}_l$ i $\mathbf{A}(C) = \tilde{C}_l$ *definit en l'exemple 3.3.7, aleshores el nombre borrós discret* $B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C$ *el denotarem per* $B \underset{l}{\oplus} C$.

3. *Si* $\mathbf{A}(B) = \tilde{B}_\alpha$ i $\mathbf{A}(C) = \tilde{C}_\alpha$ *definit en l'exemple 3.3.7 aleshores el nombre borrós discret* $B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C$ *el denotarem per* $B \underset{\alpha}{\oplus} C$.

Exemple 3.3.15. *Siguin* $B = \{0.4/15, 1/19, 1/25, 0.5/30\}, C = \{0.2/1, 1/2, 1/3, 0.3/4\} \in DFN$. *Si aplicam l'associació lineal (considerada en l'exemple 3.3.7) en aquests nombres borrosos discrets obtenim els nombres borrosos* $\tilde{B}_l$ *i* $\tilde{C}_l$*, definits respectivament com*

$$\tilde{B}_l = \begin{cases} \frac{3x-37}{20} & \textit{si} \ \ x \in [15,19] \\ 1 & \textit{si} \ \ x \in [19,25] \\ \frac{35-x}{10} & \textit{si} \ \ x \in [25,30] \end{cases}, \qquad \tilde{C}_l = \begin{cases} \frac{8x-6}{10} & \textit{si} \ \ x \in [1,2] \\ 1 & \textit{si} \ \ x \in [2,3] \\ \frac{31-7x}{10} & \textit{si} \ \ x \in [3,4] \end{cases}$$

Si aplicam el principi de extensió de Zadeh per calcular la seva suma, obtenim el següent nombre borrós:

$$(\tilde{B}_l \oplus \tilde{C}_l)(x) = \begin{cases} \frac{8x-126}{10} & \textit{si} \ \ x \in [16,16.25] \\ \frac{24x-314}{190} & \textit{si} \ \ x \in [16.25,21] \\ 1 & \textit{si} \ \ x \in [21,28] \\ \frac{276-7x}{80} & \textit{si} \ \ x \in [28,\frac{236}{7}] \\ \frac{241-7x}{10} & \textit{si} \ \ x \in [\frac{236}{7},34] \end{cases}$$

I, d'acord a la definició 3.3.13, obtenim que la suma borrosa discreta dels nombres B *i* C *corresponent a l'associació lineal vindrà donada pel següent nombre borrós discret:*

$$\begin{aligned} B \oplus_l C = &\{0.2/16, \tfrac{45}{95}/17, \tfrac{59}{95}/18, \tfrac{71}{95}/19, \tfrac{83}{95}/20, 1/21, 1/22, 1/23, \\ &1/26, 1/27, 1/28, \tfrac{73}{80}/29, \tfrac{59}{80}/31, \tfrac{13}{20}/32, \tfrac{9}{16}/33, 0.3/34\} \end{aligned}$$

El nombre borrós $\tilde{B}_l \oplus \tilde{C}_l$ *es pot veure a la figura 15, i el nombre borrós discret* $B \underset{l}{\oplus} C$ *és representa en la figura 16.*

El que volem estudiar ara és si existeix alguna associació tal que la suma obtinguda a partir d'ella i a partir del procés de Wang, proporcionin el mateix nombre borrós discret.

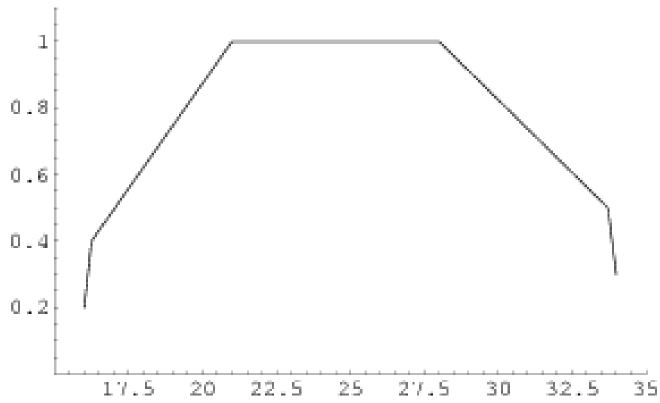

Figura 15: Nombre borrós $\tilde{B}_l \oplus \tilde{C}_l$ de l'exemple 3.3.15.

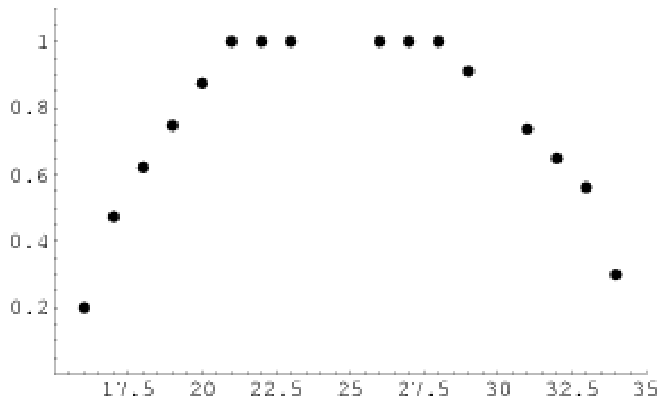

Figura 16: Nombre borrós discret $B \underset{l}{\oplus} C$ de l'exemple 3.3.15.

3.3.4 *Relació entre la suma de Wang i la suma definida a partir d'una associació*

Teorema 3.3.16. *Siguin* $A, B \in DFN$ *dos nombres borrosos discrets. Aleshores* $A \underset{W}{\oplus} B$ *definit segons el procediment de Wang 3.3.3 i* $A \underset{\alpha}{\oplus} B$ *definida d'acord al mètode exposat en 3.3.14 són el mateix nombre borrós discret.*

Demostració. Siguin $supp(A) = \{x_1, ..., x_s, ..., x_t, ..., x_n\}$ i $supp(B) = \{y_1, ..., y_m, ..., y_k, ..., y_r\}$ els suports dels nombres A i B respectivament on $A(x_i) = 1$ per a tot $s \leqslant i \leqslant t$ i $B(y_j) = 1$ per a tot $m \leqslant j \leqslant k$.

Volem provar que els nombres borrosos discrets $A \underset{W}{\oplus} B$ i $A \underset{\alpha}{\oplus} B$ tenen els mateixos conjunts de nivell, és a dir, que per a tot $r \in \mathbb{R}$ es verifica

$$[A \underset{W}{\oplus} B]^r = [A \underset{\alpha}{\oplus} B]^r.$$

Dividim la demostració en diverses passes.

a) Per ser $\tilde{A}_\alpha$ i $\tilde{B}_\alpha$ nombres borrosos es verifica [90] que $\left[\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha\right]^r = \tilde{A}^r_\alpha + \tilde{B}^r_\alpha$

b) És verifica que $\min \tilde{A}_\alpha^r = \min A^r$ i $\max \tilde{A}_\alpha^r = \max A^r$ per a tot $r \in [0,1]$. Perquè , $\min \tilde{A}_\alpha^r = \min\{x \in \operatorname{supp}\tilde{A}_\alpha \mid \tilde{A}_\alpha(x) \geqslant r\}$ i $\max \tilde{A}_\alpha^r = \max\{x \in \operatorname{supp}\tilde{A}_\alpha \mid \tilde{A}_\alpha(x) \geqslant r\}$. Però, com que $\tilde{A}_\alpha(x)$ és constant a troços coincidint amb un $A(x)$, tenim que

$$\begin{aligned}\min \tilde{A}_\alpha^r &= \min\{x \in \operatorname{supp}(A) \mid \tilde{A}_\alpha(x) \geqslant r\}\\ &= \min\{x \in \operatorname{supp}(A) \mid A(x) \geqslant r\}\\ &= \min A^r\end{aligned}$$

Igualment resulta que

$$\begin{aligned}\max \tilde{A}_\alpha^r &= \max\{x \in \operatorname{supp}(A) \mid \tilde{A}_\alpha(x) \geqslant r\}\\ &= \max\{x \in \operatorname{supp}(A) \mid A(x) \geqslant r\}\\ &= \max A^r\end{aligned}$$

I anàlogament ho demostraríem per $\tilde{B}_\alpha$ i B.

c) $\left[A \underset{\alpha}{\oplus} B\right]^r = \left[\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha\right]^r \cap (\operatorname{supp}(A) + \operatorname{supp}(B))$

Perquè, $\left[\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha\right](x) = \left(A \underset{\alpha}{\oplus} B\right)(x)$ si $x \in \operatorname{supp}(A \underset{\alpha}{\oplus} B) = \operatorname{supp}\left(\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha\right)$

Finalment,

d)

$$x \in [A \underset{W}{\oplus} B]^r \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{supp}(A \underset{W}{\oplus} B) = \operatorname{supp}(A) + \operatorname{supp}(B) \\ \min(A^r + B^r) \leqslant x \leqslant \max(A^r + B^r) \end{cases}$$

Però, per a tot $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \min(A^r + B^r) \leqslant x \leqslant \max(A^r + B^r)\\ & \Leftrightarrow \min A^r + \min B^r \leqslant x \leqslant \max A^r + \max B^r\\ \text{aplicant b)} & \Leftrightarrow \min \tilde{A}_\alpha^r + \min \tilde{B}_\alpha^r \leqslant x \leqslant \max \tilde{A}_\alpha^r + \max \tilde{B}_\alpha^r\\ & \Leftrightarrow \min(\tilde{A}_\alpha^r + \tilde{B}_\alpha^r) \leqslant x \leqslant \max(\tilde{A}_\alpha^r + \tilde{B}_\alpha^r)\\ \text{aplicant c)} & \Leftrightarrow \min[\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha]^r \leqslant x \leqslant \max[\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha]^r\\ & \Leftrightarrow x \in [\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha]^r \text{ perquè } [\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha]^r \text{ és un interval.}\end{aligned}$$

I així,

$$x \in [A \underset{W}{\oplus} B]^r \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \in \operatorname{supp}(A \underset{W}{\oplus} B) = \operatorname{supp}(A) + \operatorname{supp}(B) \\ x \in [\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha]^r \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \in [A \underset{\alpha}{\oplus} B]^r$$

□

Corol·lari 3.3.17. *Siguin* $A, B \in \mathrm{DFN}$. *Si la seva suma segons el principi d'extensió de Zadeh,* $A \oplus B$, *és un nombre borrós discret, llavors* $A \oplus B = A \underset{\alpha}{\oplus} B$.

Exemple 3.3.18. *Si* $A = \{0.4/15, 1/19, 1/25, 0.5/30\}$ *i* $B = \{0.2/1, 1/2, 1/3, 0.3/4\}$. *Aleshores, els nombres borrosos* $\tilde{A}_\alpha$ *i* $\tilde{B}_\alpha$ *venen donats per les expressions:*

$$\tilde{A}_\alpha(x) = \begin{cases} 0.4 & si \;\; x \in [15,19) \\ 1 & si \;\; x \in [19,25] \\ 0.5 & si \;\; x \in (25,30] \end{cases} \quad \tilde{B}_\alpha(x) = \begin{cases} 0.2 & si \;\; x \in [1,2) \\ 1 & si \;\; x \in [2,3] \\ 0.3 & si \;\; x \in (3,4] \end{cases}$$

Si calculam la seva suma d'acord al principi d'extensió de Zadeh:

$$(\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha)(x) = \begin{cases} 0.2 & si \;\; x \in [16,17) \\ 0.4 & si \;\; x \in [17,21) \\ 1 & si \;\; x \in [21,28] \\ 0.5 & si \;\; x \in (28,33] \\ 0.3 & si \;\; x \in (33,34] \end{cases}$$

Aplicant la definició 3.3.13 obtenim el següent nombre borrós discret:

$$A \oplus_\alpha B = \{0.2/16, 0.4/17, 0.4/18, 0.4/19, 0.4/20, 1/21, 1/22, 1/23, 1/26, 1/27, 1/28, 0.5/29, 0.5/31, 0.5/32, 0.5/33, 0.3/34\}$$

Podem observar que si comparam aquest resultat amb l'obtingut a l'exemple 3.3.4 veim que es tracte del mateix nombre borrós discret.

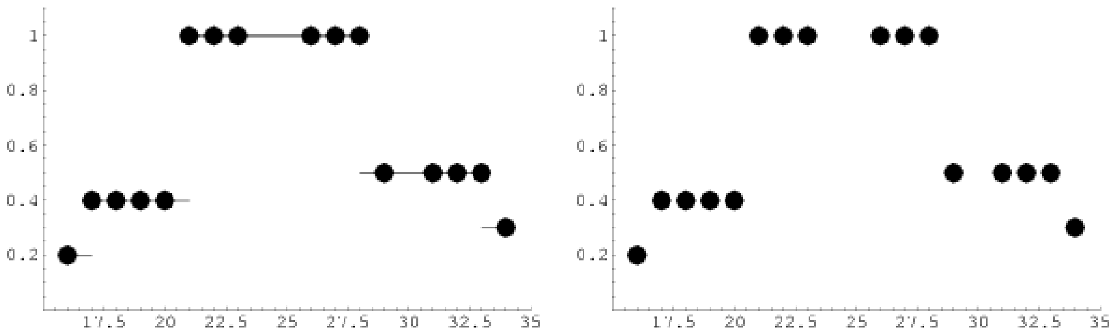

Figura 17: En aquesta figura podem veure el procés de discretització que s'aplica per obtenir el nombre borrós discret $A \underset{\alpha}{\oplus} B$ a partir del nombre borrós $\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha$ de l'exemple 3.3.18.

Segons hem provat abans és possible definir un ordre parcial en el conjunt de les associacions. Així, el que ens plantejam ara és si aquest ordre parcial, pot induir un ordre entre els nombres borrosos discrets obtinguts a partir d'aquestes associacions.

3.3.5 *Ordenació de sumes a partir d'associacions*

Proposició 3.3.19. *Siguin* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{A}$ *dues associacions tals que* $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$ *segons l'ordre parcial definit en la definició 3.3.8. Siguin* $A, B \in DFN$.

Aleshores

$$A \underset{\mathbf{A}}{\oplus} B \preccurlyeq A \underset{\mathbf{B}}{\oplus} B$$

Demostració. Suposem que $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$. Llavors tenim:

$\mathbf{A}(C) \leqslant \mathbf{B}(C)$ per a tot $C \in DFN$ i per tant $\mathbf{A}(C)(x) \leqslant \mathbf{B}(C)(x)$ per a tot $C \in DFN$ i tot $x \in \mathbb{R}$. Així,

$$\mathbf{A}(A)(x) \leqslant \mathbf{B}(A)(x) \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}$$
$$\mathbf{A}(B)(y) \leqslant \mathbf{B}(B)(y) \text{ per a tot } y \in \mathbb{R}$$

d'on $\min(\mathbf{A}(A)(x), \mathbf{A}(B)(y)) \leqslant \min(\mathbf{B}(A)(x), \mathbf{B}(B)(y))$.

Ara d'acord a la definició 2.4.6 tenim que, per a tot $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}(A) \oplus \mathbf{A}(B))(z) &= \sup_{z=x+y} (\min(\mathbf{A}(A)(x), \mathbf{A}(B)(y))) \\ &\leqslant \sup_{z=x+y} (\min(\mathbf{B}(A)(x), \mathbf{B}(B)(y))) = (\mathbf{B}(A) \oplus \mathbf{B}(B))(z)\end{aligned}$$

En particular, pels nombres $z \in \mathbb{R}$ tals que $z = x + y$, $x \in \operatorname{supp}(A), y \in \operatorname{supp}(B)$ tenim que

$(\mathbf{A}(A) \oplus \mathbf{A}(B))(z) = (A \underset{\mathbf{A}}{\oplus} B)(z)$ i també que $(\mathbf{B}(A) \oplus \mathbf{B}(B))(z) = (A \underset{\mathbf{B}}{\oplus} B)(z)$.

I per tant obtenim que

$(A \underset{\mathbf{A}}{\oplus} B)(z) \leqslant (A \underset{\mathbf{B}}{\oplus} B)(z)$ per a tot $z \in \mathbb{R}$, és a dir, $A \underset{\mathbf{A}}{\oplus} B \leqslant A \underset{\mathbf{B}}{\oplus} B$. □

En particular, es té:

Proposició 3.3.20. *Per a cada parella de nombres borrosos discrets A, B en les condicions de la proposició 3.3.19 i per a cada associació $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$ es verifica que $A \underset{\alpha}{\oplus} B \leqslant A \underset{\mathbf{A}}{\oplus} B$.* □

Demostració. És immediata perquè $\mathbf{A}_\alpha \leqslant \mathbf{A}$ per a tota associació $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$. □

Nota 3.3.21. *En la figura 18 podem veure gràficament un exemple del resultat obtingut en la proposició 3.3.20.*

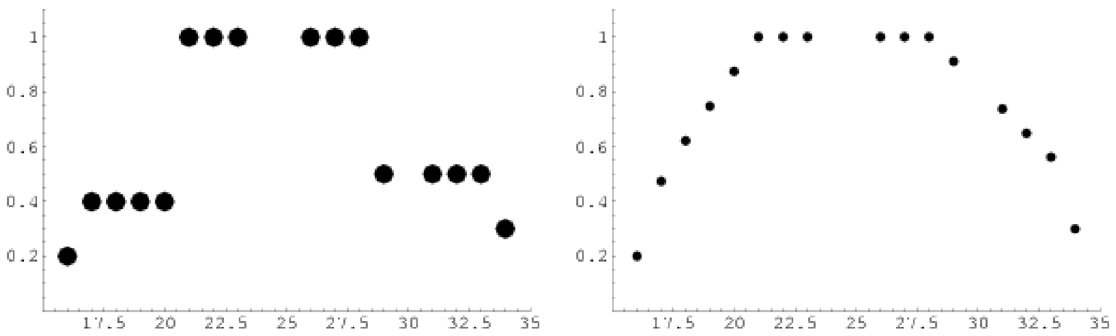

Figura 18: Comparació gràfica dels nombres borrosos discrets $A \underset{\alpha}{\oplus} B$ i $A \underset{l}{\oplus} B$ dels exemples 3.3.15 i 3.3.18.

3.3.6 *Suma de nombres borrosos discrets amb suport una progressió aritmètica*

Volem estudiar ara la suma de nombres borrosos discrets quan aquests varien dins els subconjunts $\mathcal{A}_r^S$, $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_1^{L_n}$ definits en 3.2.17. Recordem que $\mathcal{A}_r^S$ és el subconjunt de nombres borrosos discrets tals que tenen per suport un subconjunt finit de termes consecutius d'una successió aritmètica S de nombres naturals de diferència r. $\mathcal{A}_1$ és el cas particular quan $S = \mathbb{N}$ i $r = 1$. Finalment, $\mathcal{A}_1^{L_n}$ és el subconjunt de nombres borrosos amb suport un subconjunt de termes consecutius de la cadena L_n.

Començarem pel cas general.

Teorema 3.3.22. *Si* $A, B \in \mathcal{A}_r^S$. *Es verifica que*

$$A \oplus B \in \mathcal{A}_r^S$$

on el símbol $\oplus$ *representa la suma definida a partir del principi d'Extensió de Zadeh.*

Demostració. Siguin $A, B \in \mathcal{A}_r^S$ tals que

$$\begin{aligned} supp(A) &= \{a, a+r, a+2\cdot r, \cdots, a+l\cdot r, \cdots, a+k\cdot r, \cdots, a+p\cdot r\} \\ supp(B) &= \{b, b+r, b+2\cdot r, \cdots, b+m\cdot r, \cdots, b+n\cdot r, \cdots, b+q\cdot r\} \end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned} &A(a+i\cdot r) = 1 \text{ per a tot } i \in \{l, \cdots, k\} \quad \text{i} \\ &B(b+j\cdot r) = 1 \text{ per a tot } j \in \{m, \cdots, n\}. \end{aligned}$$

És evident que el suport de la suma d'aquests nombres borrosos discrets ve donat per

$$\begin{aligned} supp(A \oplus B) = \{&a+b, a+b+r, \cdots, a+b+(l+m)\cdot r, \cdots, \\ &a+b+(k+n)\cdot r, \cdots, a+b+(p+q)\cdot r\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

A més a més, si denotam per $\tilde{i} = a+b+i\cdot r$ amb $i \in \{0, 1, ..., p+q\}$, és clar que es verifica que $(A \oplus B)(\tilde{i}) = 1$ si i només si $i \in \{l+m, ..., k+n\}$. Ja que

$(A \oplus B)(\tilde{i}) = 1 \;\Leftrightarrow\;$ existeix $x^i \in \{0, \cdots, p\}$ i $y^i \in \{0, \cdots, q\}$ amb $i = x^i + y^i$ de manera que $A(a+x^i\cdot r) = B(b+y^i\cdot r) = 1$, i això passa si i només si $l \leqslant x^i \leqslant k$ i $m \leqslant y^i \leqslant n$ d'on $i = x^i + y^i$ verifica que $l+m \leqslant i \leqslant k+n$.

Per veure que $A \oplus B$ és un nombre borrós discret hem de demostrar que $A \oplus B$ és creixent fins $l+m$ i decreixent a partir de $k+n$. Ho feim per passes:

- Sigui $\tilde{i} = a+b+i\cdot r$ amb $0 \leqslant i < l+m$. Llavors

$$(A \oplus B)(\tilde{i}) = \bigvee_{\substack{x+y=i \\ x\in\{0,...,p\} \\ y\in\{0,...,q\}}} A(a+x\cdot r) \wedge B(b+y\cdot r) \tag{3.6}$$

  i aquest suprem s'agafarà per un determinats valors $x^i \in \{0, \cdots, p\}$ i $y^i \in \{0, \cdots, q\}$ amb $x^i + y^i = i$. Aleshores $(A \oplus B)(\tilde{i}) = A(a+x^i\cdot r) \wedge B(b+y^i\cdot r)$.

  I sense pèrdua de generalitat poden suposar que $(A \oplus B)(\tilde{i}) = A(a+x^i\cdot r)$.

  D'aquesta manera tindrem que

$$A(a+x^i\cdot r) \leqslant B(b+y^i\cdot r) \tag{3.7}$$

  Amb aquesta suposició diferenciam tres casos:

A) Si $0 \leqslant x^i < l$. En aquest cas per ser A un nombre borrós discret es verifica

$$A(a + x^i \cdot r) \leqslant A(a + (x^i + 1) \cdot r)$$

I ara tenint en compte l'expressió 3.7 tenim que

$$\begin{aligned}(A \oplus B)(\tilde{i}) = A(a + x^i \cdot r) &\leqslant A(a + (x^i + 1) \cdot r) \wedge B(b + y^i \cdot r) \\ &\leqslant \bigvee_{\substack{x+y=i+1 \\ x \in \{0,...,p\} \\ y \in \{0,...,q\}}} A(a + x \cdot r) \wedge B(b + y \cdot r) \\ &= (A \oplus B)(\widetilde{i+1})\end{aligned}$$

B) Si $l \leqslant x^i \leqslant k$. Aquest cas no es pot donar, ja que llavors es tindria que $A(a + x^i \cdot r) = 1$ i per l'expressió 3.7 tenim que $B(b + y^i \cdot r) = 1$. És a dir, $m \leqslant y^i \leqslant k$ i per tant estaríem en el cas $i = x^i + y^i \in \{l + m, \cdots, k + n\}$, contràriament al que hem suposat de que $i < l + m$.

C) Si $k \leqslant x^i \leqslant p$, llavors necessàriament haurà de ser $y^i < m$, ja que $i = x^i + y^i < l + m$. D'aquesta manera, $B(b + y^i \cdot r) \leqslant B(b + (y^i + 1) \cdot r)$ i per tant

$$\begin{aligned}(A \oplus B)(\tilde{i}) &= A(a + x^i \cdot r) \wedge B(b + y^i \cdot r) \\ &\leqslant A(a + x^i \cdot r) \wedge B(b + (y^i + 1) \cdot r) \\ &\leqslant \bigvee_{\substack{x+y=i+1 \\ x \in \{0,...,p\} \\ y \in \{0,...,q\}}} A(a + x \cdot r) \wedge B(b + y \cdot r) \\ &= (A \oplus B)(\widetilde{i+1})\end{aligned}$$

- De forma totalment anàloga es pot veure que $(A \oplus B)(\tilde{i}) \geqslant (A \oplus B)(\widetilde{i+1})$ per a tot i amb $k + n < i \leqslant p + q$ i, per tant, $A \oplus B$ és un nombre borrós discret.

Més encara, a partir de la relació 3.5, és clar que $A \oplus B \in \mathcal{A}_r^S$. □

En particular,

Corol·lari 3.3.23. *Es verifica que:*

1. *Si* $A, B \in \mathcal{A}_1$ *llavors* $A \oplus B \in \mathcal{A}_1$.
2. *Si* $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ *tals que* $\max(\text{supp}(A)) + \max(\text{suppp}(B)) \leqslant n$ *aleshores* $A \oplus B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.

on el símbol $\oplus$ *representa la suma definida a partir del principi d'extensió de Zadeh.*

Demostració. És una conseqüència directa del teorema anterior en el cas $r = 1$. □

Nota 3.3.24. *Cal tenir en compte que:*

1. *El teorema anterior no es compleix si consideram una progressió aritmètica* S *de diferència* r, *i agafam nombres borrosos discrets* A *i* B *que tenen per suport un subconjunt de termes no consecutius de* S *que formin progressions aritmètiques amb diferència distinta.*

Per exemple, sigui $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$. *Aleshores, si consideram els nombres borrosos discrets*

$$A = \{0.8/5, 1/9, 0.8/13, 0.7/17\} \quad i \quad B = \{0.7/3, 1/5, 0.6/7\}$$

Es clar que els punts del seu suport formen progressions aritmètiques de diferència 4 i 2 respectivament i contingudes a S. *Si calculam la suma d'ells emprant el principi d'extensió, resulta el subconjunt borrós*

$$A \oplus B = \{0.7/8, 0.8/10, 0.7/12, 1/14, 0.7/16, 0.8/18, 0.7/20, 0.7/22, 0.6/24\}$$

que no és de DFN *perquè* $(A \oplus B)(10) = 0.8 > (A \oplus B)(12) = 0.7$.

2. *El teorema 3.3.22 anterior és vàlid també si en les hipòtesi del mateix, canviam la paraula progressió aritmètica de diferència* r *per progressió geomètrica de raó* r.

3.3.7 *Suma de nombres borrosos discrets amb suport un subconjunt qualsevol del nombres naturals*

Hem vist en l'apartat anterior com es podem sumar, segons el principi d'extensió de Zadeh, nombres borrosos discrets de manera que la seva suma sigui també un nombre borrós discret. Es pot fer, per exemple, quan $A, B \in \mathcal{A}_1$ o amb certes condicions quan $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Com ja hem comentat abans, els nostres propers objectius seran definir diversos tipus d'operadors (especialment t-normes, t-conormes i implicacions) sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Per això, hem estudiat les propietats i l'estructura de $\mathcal{A}_1^{L_n}$. L'interès d'aquest estudi radica en que els elements d'aquest reticle s'utilitzaran per a representar informació borrosa, per exemple, valoracions d'experts sobre un determinat problema. Aquestes valoracions habitualment no presenten "forats", de manera que el suport és un subconjunt de nombres naturals consecutius (veure capítol 4), és a dir, és un element de $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Tot i així, hi pot haver vegades en que la informació sigui incompleta o que es "perdi"part de la informació per diversos motius. Això ens porta a voler sumar (o operar) també nombres borrosos discrets amb "forats", és a dir, amb subconjunt qualsevol de nombres naturals (continguts dins L_n o no).

A més, tradicionalment els nombres naturals s'han emprat per a representar el cardinal d'un conjunt finit. Ara bé, en presència d'incertesa s'ha definit i caracteritzat extensions d'aquest, anomenat cardinal borrós, com les que podem trobar en els treballs de [48, 49, 153] o també en [65, 68]. Concretament D. Rocacher en [123, 124] utilitza nombres naturals generalitzats normalitzats per a definir el concepte de cardinalitat borrosa. Aquests subconjunts borrosos són un exemple de nombres borrosos discrets que tenen per suport un subconjunt de nombres naturals. El que farem a continuació és estudiar la suma de nombres borrosos discrets que tenen per suport un subconjunt de nombres naturals i ho relacionarem amb el principi d'extensió de Zadeh.

Definició 3.3.25. *Anomenarem* $\mathrm{DFN}(\mathbb{N})$ *al conjunt de nombres borrosos discrets que tenen per suport un subconjunt qualsevol de nombres naturals.*

A continuació proposarem un mètode que permet obtenir la suma de dos nombres borrosos discrets que pertanyen al conjunt $\mathrm{DFN}(\mathbb{N})$, sense sortir d'aquest conjunt de nombres borrosos discrets.

Definició 3.3.26. *Sigui* $B \in \mathrm{DFN}(\mathbb{N})$ *un nombre borrós discret tal que té per suport el conjunt* $\mathrm{supp}(B) = \{x_1, ..., x_s, ..., x_t, ..., x_n\}$ *amb* $x_1 < \cdots < x_s < \cdots < x_t < \cdots < x_n$ *i* $B(x_p) = 1$ *per a tot nombre natural* p *tal que* $s \leqslant p \leqslant t$. *Una associació discreta és una aplicació*

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{A}: & \mathrm{DFN}(\mathbb{N}) & \rightarrow & \mathcal{A}_1 \\ & B & \mapsto & \mathbf{A}(B) \end{array}$$

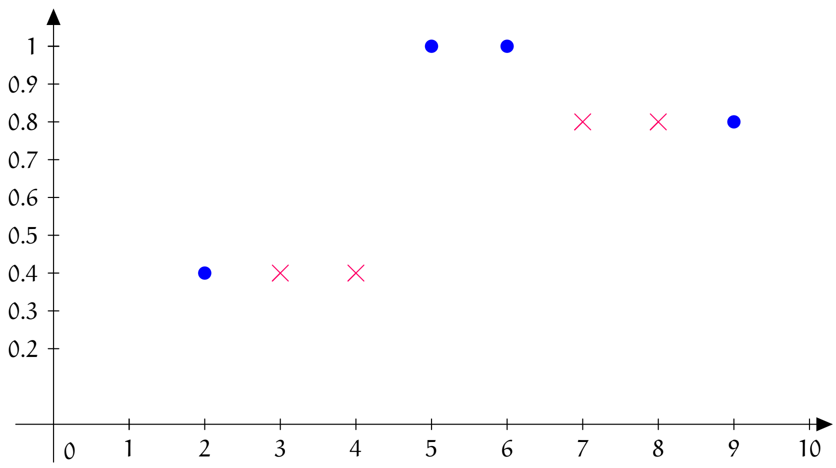

Figura 19: Els punts blaus corresponent al dfn B original de l'exemple 3.3.27 i les creus vermelles corresponen al punts que s'incorporen en el procés d'associació discreta que converteix el nombre B amb un nombre borrós discret $\mathbf{A}_\alpha(B) \in \mathcal{A}_1$.

tal que per a cada nombre borrós discret $B \in \mathrm{DFN}(\mathbb{N})$, *li assignam un nombre borrós discret* $\mathbf{A}(B) \in \mathcal{A}_1$ *que verifica les següents condicions:*

1. *Si* $x_i \in \mathrm{supp}(B)$ *aleshores* $\mathbf{A}(B)(x_i) = B(x_i)$ *per a cada* $i = 1, \ldots, n$
2. $B(x_i) \leqslant \mathbf{A}(B)(x) \leqslant B(x_{i+1})$, $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ *amb* $1 \leqslant i \leqslant i+1 \leqslant s$.
3. $\mathbf{A}(B)(x_i) = 1$, $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ *amb* $s \leqslant i \leqslant i+1 \leqslant t$.
4. $B(x_{i+1}) \leqslant \mathbf{A}(B)(x_i) \leqslant B(x_i)$, $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ *amb* $t \leqslant i \leqslant i+1 \leqslant n$.

Exemple 3.3.27. *A continuació proposam diferents exemples d'associació discreta.*

1. *Anomenarem* α*-associació discreta a aquella associació tal que per a cada nombre borrós discret* $B \in \mathrm{DFN}(\mathbb{N})$ *li assigna el nombre borrós discret* $\mathcal{A}_\alpha(B) \in \mathcal{A}_1$ *definit com:*

$$\mathbf{A}_\alpha(B)(x) = \begin{cases} B(x_i) & si\ x \in [x_i, x_{i+1})\ amb\ x_{i+1} < x_s \\ 1 & si\ x \in [x_s, x_t] \\ B(x_{i+1}) & si\ x \in (x_i, x_{i+1}]\ amb\ x_i > x_t \end{cases}$$

Per exemple:

a) *Si* $B = \{0.4/2, 1/5, 1/6, 0.8/9\}$, *la seva* α *-associació estarà definida com*

$$\mathbf{A}_\alpha(B)(x) = \begin{cases} 0.4 & si\ \ x \in \{2,3,4\} \\ 1 & si\ \ x \in \{5,6\} \\ 0.8 & si\ \ x \in \{7,8,9\} \end{cases}$$

Veure la figura 19 que mostra la transformació del nombre borrós discret B *produïda per la* α *-associació.*

b) Sigui $C = \{0.3/1, 1/3, 0.5/7\}$*. La seva* α*-associació serà vindrà definida com*

$$\mathbf{A}_\alpha(C)(x) = \begin{cases} 0.3 & si \;\; x \in \{1,2\} \\ 1 & si \;\; x \in \{3\} \\ 0.8 & si \;\; x \in \{4,5,6,7\} \end{cases}$$

2. *Anomenarem* ω*-associació a aquella associació discreta* $\mathbf{A}_\omega$ *tal que per a cada* $B \in DFN(\mathbb{N})$ *li assigna el nombre borrós discret* $\mathbf{A}_\omega(B)$ *definit com:*

$$\mathbf{A}_\omega(B)(x) = \begin{cases} B(x) & si \;\; x \in supp(u) \\ B(x_{i+1}) & si \;\; x \in (x_i, x_{i+1}) \;\; amb \; x_{i+1} < x_s \\ 1 & si \;\; x \in (x_s, x_t) \\ B(x_i) & si \;\; x \in (x_i, x_{i+1}) \;\; amb \; x_i > x_t \end{cases}$$

Per exemple:

a) Sigui $B = \{0.4/2, 0.6/4, 1/5, 1/6, 0.9/7, 0.8/9\}$*. La seva* ω*-associació serà el nombre borrós discret*

$$\mathbf{A}_\omega(B)(x) = \begin{cases} 0.4 & si \;\; x \in \{2\} \\ 0.6 & si \;\; x \in \{3,4\} \\ 1 & si \;\; x \in \{5,6\} \\ 0.9 & si \;\; x \in \{7,8\} \\ 0.8 & si \;\; x \in \{9\} \end{cases}$$

Es pot veure la figura 20 que mostra la transformació del nombre borrós discret B *produïda per la* ω *-associació.*

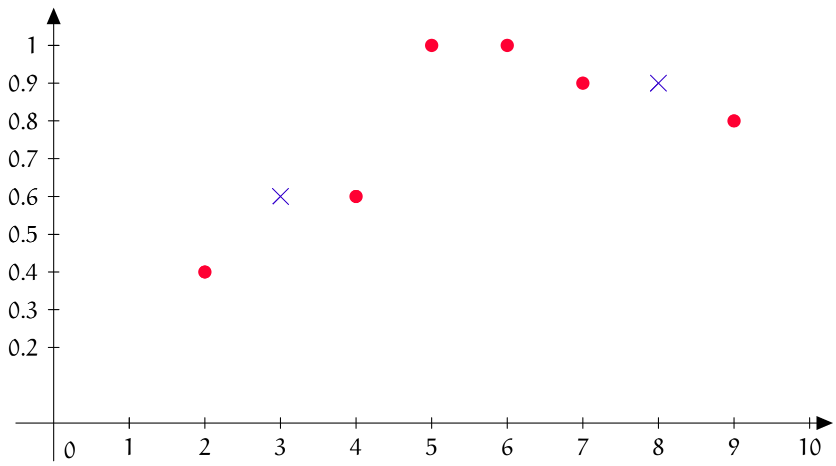

Figura 20: Els punts vermells corresponent al dfn B original i les creus blaves corresponen al punts que s'incorporen a través de la ω-associació que converteix el nombre B amb un dfn $\mathbf{A}_\omega(B) \in \mathcal{A}_1$.

3. *Anomenarem associació lineal discreta a aquella associació* $\mathcal{C}_l$ *tal que per a cada nombre borrós discret* $B \in \mathsf{DFN}(\mathbb{N})$ *li assigna el nombre borrós discret* $\mathcal{C}_l(B) \in \mathcal{A}_1$ *definit de la següent manera:*

$$\mathcal{C}_l(B)(x) = \begin{cases} B(x) \quad \text{si} \quad x \in \operatorname{supp}(B) \\ \frac{B(x_{i+1}) - B(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + B(x_i) \quad \text{si} \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

Nota 3.3.28. *És evident que* $\mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{A}_\omega$ *i* $\mathbf{A}_l$ *verifiquen les propietats de la definició 3.3.26.*

Nota 3.3.29. *Si* $\mathbf{A} : \mathsf{DFN}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_1$ *és una associació, aleshores la relació* $\mathbf{A}_\alpha(B) \leqslant \mathbf{A}_l(B) \leqslant \mathbf{A}_\omega(B)$ *és verifica per a tot* $B \in \mathsf{DFN}(\mathbb{N})$.

El fet de que sempre és possible sumar nombres borrosos discrets que pertanyen al conjunt $\mathcal{A}_1$ a través del principi d'extensió o equivalentment emprant l'α-associació o el mètode de Wang, ens possibilita construir un mètode general que permeti sumar qualsevol parella de nombres borrosos discrets que pertanyen al conjunt $\mathsf{DFN}(\mathbb{N})$ a partir de les associacions discretes de manera similar a com s'ha proposat en 3.3.13.

Definició 3.3.30. *Siguin* $B, C \in \mathsf{DFN}(\mathbb{N})$ *i* $\mathbf{A} : \mathsf{DFN}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_1$ *una associació discreta. Anomenarem suma borrosa discreta dels nombres* B *i* C *relativa a l'associació discreta* $\mathbf{A}$*, i ho denotarem per* $B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C$*, al subconjunt borrós tal que:*

1. *El seu suport ve donat pel conjunt*

$$\operatorname{supp}(B \underset{\mathcal{A}}{\oplus} C) = \operatorname{supp}(B) + \operatorname{supp}(C)$$

2. *El valor en cada punt del suport es calcula d'acord a l'expressió*

$$(B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C)(z) = (\mathbf{A}(B) \oplus \mathbf{A}(C))(z) \quad \textit{per a tot} \;\; z \in \operatorname{supp}(B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C)$$

on $\mathbf{A}(B) \oplus \mathbf{A}(C)$ *representa la suma dels nombres borrosos discrets* $\mathbf{A}(B)$, $\mathbf{A}(C)$ *calculada d'acord al principi d'extensió de Zadeh.*

Nota 3.3.31. *Notam que*

1. *El subconjunt borrós discret* $B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C$ *definit anteriorment satisfà les condicions de nombre borrós discret que pertany al conjunt* $\mathcal{A}_1$.
2. *Si* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\alpha$ *o* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\omega$ *o* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_l$ *definides en l'exemple 3.3.27, aleshores el nombre borrós discret* $B \underset{\mathbf{A}}{\oplus} C$ *ho denotarem respectivament per* $B \underset{\alpha}{\oplus} C$, $B \underset{\omega}{\oplus} C$ *i* $B \underset{l}{\oplus} C$.

Exemple 3.3.32. *Siguin* $B = \{0.3/1, 1/3, 0.5/7\}$ *i* $C = \{0.4/2, 1/5, 1/6, 0.8/9\}$. *Si calculam la seva suma emprant el principi d'extensió resulta el subconjunt borrós*

$$B \oplus C = \{0.3/3, 0.4/5, 0.3/6, 0.3/7, 1/8, 1/9, 0.3/10, 0.8/12, 0.5/13, 0.5/16\}$$

que no compleix les propietats de nombre borrós discret establertes en la definició 3.2.1.

- *Si consideram les seves* α*-associacions* $\mathbf{A}_\alpha(B)$ *i* $\mathbf{A}_\alpha(C)$ *respectivament, definides en l'exemple 3.3.27, és fàcil veure que*

$$B \underset{\alpha}{\oplus} C = \{0.3/3, 0.4/5, 0.4/6, 0.4/7, 1/8, 1/9, 0.8/10, 0.8/12, 0.5/13, 0.5/16\}$$

- *Si consideram les seves ω-associacions*

$$\mathbf{A}_\omega(B) = \{0.3/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 0.5/7\} \ \textit{i}$$

$$\mathbf{A}_\omega(C) = \{0.4/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 0.8/9\}$$

respectivament, és fàcil veure que

$$B \underset{\omega}{\oplus} C = \{0.3/3, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/12, 1/13, 0.5/16\}$$

A continuació, provarem que la suma de dos dfn amb suport un subconjunt de nombres naturals obtinguda a partir de la α-associació i la suma proposada per Wang en 3.3.3 són el mateix nombre borrós discret. Concretament,

Teorema 3.3.33. *Si $A, B \in DFN(\mathbb{N})$ són dos nombres borrosos discrets. Aleshores,*

$$A \underset{W}{\oplus} B = A \underset{\alpha}{\oplus} B$$

on $A \underset{W}{\oplus} B$ i $A \underset{\alpha}{\oplus} B$ representen les sumes definides en 3.3.3 i 3.3.30.

Demostració. Similar al teorema 3.3.16. □

Exemple 3.3.34. *Siguin $A = \{0.3/1, 1/3, 0.5/7\}$ i $B = \{0.4/2, 1/5, 1/6, 0.8/9\}$ dos nombres borrosos discrets que pertanyen al conjunt $DFN(\mathbb{N})$. Segons l'exemple 3.3.32*

$$A \underset{\alpha}{\oplus} B = \{0.3/3, 0.4/5, 0.4/6, 0.4/7, 1/8, 1/9, 0.8/10, 0.8/12, 0.5/13, 0.5/16\}$$

Si aplicam el mètode de Wang 3.3.3 haurem de calcular per a cada $r \in [0, 1]$ els r-talls $\left[A \underset{W}{\oplus} B\right]^r$. Així és tindrà que

$$\left[A \underset{W}{\oplus} B\right]^r = \begin{cases} \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16\} & \textit{si} \ \ r \in [0, 0.3] \\ \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16\} & \textit{si} \ \ r \in (0.3, 0.4] \\ \{8, 9, 10, 12, 13, 16\} & \textit{si} \ \ r \in (0.4, 0.5] \\ \{8, 9, 10, 12\} & \textit{si} \ \ r \in (0.5, 0.8] \\ \{8, 9\} & \textit{si} \ \ r \in (0.8, 0.1] \end{cases}$$

I els valors de la funció de pertinença seran: $(A \underset{W}{\oplus} B)(x) = sup\{r \in [0, 1] \mid x \in [A \underset{W}{\oplus} B]^r\}$. Aleshores

$$\left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(8) = \left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(9) = 1$$

$$\left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(10) = \left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(12) = 0.8$$

$$\left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(13) = \left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(16) = 0.5$$

$$\left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(5) = \left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(6) = \left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(7) = 0.4$$

$$\left(A \underset{W}{\oplus} B\right)(5) = 0.3$$

És a dir, es comprova que $A \underset{\alpha}{\oplus} B = A \underset{W}{\oplus} B$.

3.3.8 *Estructura de monoide del conjunt de nombres borrosos discrets*

El que farem ara és comprovar que el conjunt $\mathcal{A}_1$ té estructura de monoide ordenat amb la suma com operació monoidal (definida equivalentment o bé a partir del principi de Zadeh [90] o bé a partir de les α-associacions (veure teorema 3.3.33) o bé d'acord al mètode de Wang 3.3.3) i amb l'ordre parcial considerat en el teorema 3.2.23.

Nota 3.3.35. *En aquesta secció utilitzarem el símbol* $\oplus$ *per denotar indistintament, donada la seva equivalència, la suma de Zadeh obtinguda segons el principi d'extensió, el mètode de Wang o la suma construïda a partir de les* α*-associacions.*

El primer pas serà estudiar una propietat dels suports dels nombres borrosos discrets interpretats, en aquest cas, com a subconjunts de nombres naturals.

Lema 3.3.36. *Siguin* $A, B, C \in \mathcal{A}_1$ *que tenen per suports els conjunts de nombres naturals consecutius* $\text{supp}(A)$, $\text{supp}(B)$ *i* $\text{supp}(C)$ *respectivament. Aleshores es verifiquen les següents propietats:*

1. *Commutativitat:*
$$\text{supp}(A) + \text{supp}(B) = \text{supp}(A) + \text{supp}(B)$$

2. *Associativitat:*
$$(\text{supp}(A) + \text{supp}(B)) + \text{supp}(C) = \text{supp}(A) + (\text{supp}(B) + \text{supp}(C))$$

Demostració. Immediata perquè $\text{supp}(A), \text{supp}(B)$ i $\text{supp}(C)$ són subconjunts de nombres naturals consecutius. □

A partir d'aquest resultat tenim

Teorema 3.3.37. *Per a cada* $A, B, C \in \mathcal{A}_1$*, la suma verifica les següents propietats:*

a) Commutativa:
$$A \oplus B = B \oplus A$$

b) Associativa:
$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

c) Existència de l'element neutre de la suma, i.e., existeix un nombres borrós discret $1_0 \in \mathcal{A}_1$ *tal que* $A \oplus 1_0 = A$ *per a tot* $A \in \mathcal{A}_1$*, on* 1_0 *és el nombre borrós discret que té per suport el nombre natural zero.*

Demostració. Siguin $A, B, C \in \mathcal{A}_1$ i considerem $A^\alpha = \{x_1^\alpha, ..., x_p^\alpha\}$, $B^\alpha = \{y_1^\alpha, ..., y_k^\alpha\}$, $C^\alpha = \{w_1^\alpha, ..., w_l^\alpha\}$ els conjunts de nivell de A, B i C respectivament.

a) Volem demostrar que
$$A \oplus B = B \oplus A$$

Per això basta comprovar que els nombres borrosos discrets $A \oplus B$ i $B \oplus A$ tenen els mateixos conjunts de nivell per a cada $\alpha \in [0, 1]$, on $(A \oplus B)^0$ denota el suport de $A \oplus B$.

Per definició

$$\begin{aligned}
(A \oplus B)^\alpha &= \{z \in \text{supp}(A) + \text{supp}(B) \mid \min(A^\alpha + B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max(A^\alpha + B^\alpha)\} \\
&= \{z \in \text{supp}(A) + \text{supp}(B) \mid (x_1^\alpha + y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha + y_k^\alpha)\} \\
&= \{z \in \text{supp}(B) + \text{supp}(A) \mid (y_1^\alpha + x_1^\alpha) \leqslant z \leqslant (y_p^\alpha + x_k^\alpha)\} \\
&= (B \oplus A)^\alpha
\end{aligned}$$

b) Volem provar que

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

Per definició dels conjunts de nivell tenim

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \oplus C)^\alpha &= \{z \in supp(A \oplus B) + supp(C) \mid \\ &\quad \min((A \oplus B)^\alpha + C^\alpha) \leqslant z \leqslant \max((A \oplus B)^\alpha + C^\alpha)\} \\ &= \{z \in supp(A \oplus B) + supp(C) \mid \\ &\quad \min(A \oplus B)^\alpha + \min C^\alpha \leqslant z \leqslant \max(A \oplus B)^\alpha + \max C^\alpha\} \\ &= \{z \in supp(A \oplus B) + supp(C) \mid \\ &\quad (x_1^\alpha + y_1^\alpha) + w_1^\alpha \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha + y_k^\alpha) + w_l^\alpha\} \\ &= \{z \in (supp(A) + supp(B)) + supp(C) \mid \\ &\quad (x_1^\alpha + y_1^\alpha) + w_1^\alpha \leqslant z \leqslant (x_p^\alpha + y_k^\alpha) + w_l^\alpha\} \\ &= \{z \in (supp(A) + supp(B)) + supp(C) \mid \\ &\quad x_1^\alpha + (y_1^\alpha + w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant x_p^\alpha + (y_k^\alpha + w_l^\alpha)\} \\ &= \{z \in supp(A) + (supp(B) + supp(C)) \mid \\ &\quad x_1^\alpha + (y_1^\alpha + w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant x_p^\alpha + (y_k^\alpha + w_l^\alpha)\} \\ &= \{z \in supp(A) + (supp(B \oplus C)) \mid \\ &\quad x_1^\alpha + (y_1^\alpha + w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant x_p^\alpha + (y_k^\alpha + w_l^\alpha)\} \\ &= (A \oplus (B \oplus C))^\alpha\end{aligned}$$

c) Element neutre: És obvi a partir de la definició dels α-talls del nombre borrós 1_0 que $(A \oplus 1_0)^\alpha = A^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0, 1]$. Llavors $A \oplus 1_0 = A$.

□

Corol·lari 3.3.38. *El conjunt $\mathcal{A}_1$ és un monoide commutatiu amb la operació $\oplus$ (veure nota 3.3.35).*

Nota 3.3.39. *Volem notar que*

- *El parell $(DFN(\mathbb{N}), \underset{\mathbf{A}}{\oplus})$ té una estructura de monoide per a cada associació discreta $\mathbf{A}$.*

A continuació provarem que l'operació monoidal $\oplus$ (amb les consideracions fetes a la nota 3.3.35) es compatible amb l'ordre establert en el reticle borrós discret $(\mathcal{A}_1, \preceq)$.

Proposició 3.3.40. *Siguin $A, B, C, D \in \mathcal{A}_1$. Si $A \preceq B$ i $C \preceq D$ on representa $\preceq$ l'ordre parcial del reticle $(\mathcal{A}_1, \preceq)$ aleshores $A \oplus B \preceq C \oplus D$, on $\oplus$ denota la suma de Zadeh.*

Demostració. Volem provar que $\min(A \oplus C, B \oplus D) = A \oplus C$, és a dir, per a tot $\alpha \in [0, 1]$ es verifica $\min(A \oplus C, B \oplus D)^\alpha = (A \oplus C)^\alpha$. Com $A \preceq B$ llavors $\min(A, B) = A$ si i només si $\min(A, B)^\alpha = A^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0, 1]$. I anàlogament, $C \preceq D$ implica que $\min(C, D) = C$ si i només si $\min(C, D)^\alpha = C^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0, 1]$.

Suposem que $A^\alpha = \{a_1^\alpha, \cdots, a_k^\alpha\}$, $B^\alpha = \{b_1^\alpha, \cdots, b_m^\alpha\}$, $C^\alpha = \{c_1^\alpha, \cdots, c_n^\alpha\}$ i $D^\alpha = \{d_1^\alpha, \cdots, d_p^\alpha\}$ representen els α-conjunts de nivell per A, B, C i D respectivament amb $\alpha \in [0, 1]$. Com $A, B, C, D \in \mathcal{A}_1$ aleshores els α-conjunts de nivell de $A \oplus C$ i $B \oplus D$ són conjunts de nombres naturals consecutius i vindran donats per $(A \oplus C)^\alpha = \{a_1^\alpha + c_1^\alpha, \cdots, a_k^\alpha + c_n^\alpha\}$ i $(B \oplus D)^\alpha = \{b_1^\alpha + d_1^\alpha, \cdots, b_m^\alpha + d_p^\alpha\}$.

Llavors,

$$\begin{aligned}
\min(A \oplus C, B \oplus D)^{\alpha} &= \{z \in supp(A \oplus C) \wedge supp(B \oplus D) \mid \\
&\quad \min((A \oplus C)^{\alpha} \wedge (B \oplus D)^{\alpha}) \leqslant z \leqslant \max((A \oplus C)^{\alpha} \wedge (B \oplus D)^{\alpha})\} \\
&= \{z \in supp(A \oplus C) \wedge supp(B \oplus D) \mid a_1^{\alpha} + c_1^{\alpha} \leqslant z \leqslant a_k^{\alpha} + c_n^{\alpha}\} \\
&= \{z \in supp(A \oplus C) \mid a_1^{\alpha} + c_1^{\alpha} \leqslant z \leqslant a_k^{\alpha} + c_n^{\alpha}\} \\
&= (A \oplus C)^{\alpha}
\end{aligned}$$

□

4 FUNCIONS D'AGREGACIÓ EN EL RETICLE BORRÓS DISCRET

4.1 INTRODUCCIÓ

En aquest capítol volem construir funcions d'agregació sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Per això, el que es pretén és veure una manera d'estendre funcions d'agregació definides sobre L_n a funcions d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

És ben sabut que la cadena L_n és representativa de conjunts de valoració o d'etiquetes lingüístiques, com per exemple, de la forma $\mathfrak{L} = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$ on les lletres es refereixen als termes lingüístic nul, molt baix, baix, mitja, alt, molt alt i perfecte. Aquestes etiquetes o valoracions són habitualment utilitzades en el raonaments dels experts, i això ha fet que diversos investigadors hagin dedicat els seus esforços a definir i estudiar diversos tipus de funcions d'agregació, en especial, t-normes i t-conormes sobre L_n. En aquest entorn discret, tot i que presenta moltes avantatges, entre elles evitar processos de *fuzzificació* i *defuzzificació*, mostra que les possibles funcions són limitades (no hi ha t-normes estrictament creixents, la única t-norma Arquimediana és la de Łukasiewicz, ...) i fonamentalment, la representació de cada concepte per l'etiqueta és molt poc flexible.

Notem, en canvi, que un nombre borrós discret definit en $\mathcal{A}_1^{L_n}$, és pot interpretar com una flexibilització de cadascun d'aquests conceptes. Així, per exemple, si un expert ha de donar una valoració sobre algun aspecte concret, i dita valoració es troba entre una etiqueta i l'altra, es pot donar una avaluació més difusa, expressada com un nombre borrós discret que pertany al reticle borrós discret $\mathcal{A}_1^{L_n}$(veure figura 21). Aleshores, ens interessa disposar

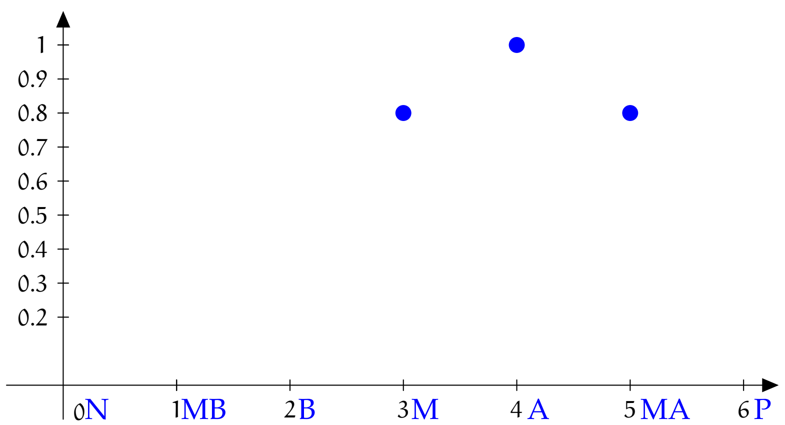

Figura 21: El nombre borrós discret $\{0.8/3, 1/4, 08./5\} \in \mathcal{A}_1^{L_6}$ on $L_6 = \{0, \cdots, 6\}$ presentat, descriu una situació on l'expert considera molt possible que és doni una valoració alta A d'acord a l'escala lingüística $\mathfrak{L} = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$, però no descarta que no es pugui donar qualsevol de les dues valoracions veïnes MA o M.

de funcions d'agregació sobre aquest reticle borrós discret per a poder operar i manipular diverses informacions expressades d'aquesta manera.

Començarem el nostre estudi per l'extensió de t-normes i t-conormes suaus definides sobre la cadena finita L_n.

4.2 EXTENSIÓ DE T-NORMES I T-CONORMES SUAUS DEFINIDES SOBRE UNA CADENA FINITA

Sigui $T(S)$ una t-norma (t-conorma) definida sobre la cadena finita $L_n \subset \mathbb{N}$. Tot i que ens interessa treballar en $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que és un reticle fitat, començarem per estendre operacions monòtones en un cas més general. Considerem dons el subconjunt de nombres borrosos discrets $\mathcal{D}_{L_n}$ definit com

$$\mathcal{D}_{L_n} = \{A \in \mathrm{DFN} \mid \mathrm{supp}(A) \subseteq L_n\}$$

i siguin $A, B \in \mathcal{D}_{L_n}$.

4.2.1 *Extensió d'operacions monòtones*

Sigui

$$\begin{aligned} O : L_n \times L_n &\longrightarrow L_n \\ (x, y) &\longmapsto O(x, y) \end{aligned}$$

una operació binària monòtona definida sobre L_n (per exemple, una t-norma, t-conorma, etc.). Denotarem també per O, la operació binària

$$\begin{aligned} O : 2^{L_n} \times 2^{L_n} &\longrightarrow 2^{L_n} \\ (X, Y) &\longmapsto O(X, Y) \end{aligned}$$

on $O(X, Y) = \{O(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. Per exemple, si consideram els α-conjunts de nivell,

$$A^\alpha = \{x_1^\alpha, \dots, x_p^\alpha\} \tag{4.1}$$
$$B^\alpha = \{y_1^\alpha, \dots, y_k^\alpha\} \tag{4.2}$$

dels nombres borrosos discrets A i B respectivament, aleshores

$$T(A^\alpha, B^\alpha) = \{T(x, y) \mid x \in A^\alpha, y \in B^\alpha\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$, on A^0 i B^0 denoten $\mathrm{supp}(A)$ i $\mathrm{supp}(B)$ respectivament.

Definició 4.2.1. *Sigui* $T : L_n \times L_n \to L_n$ *una operació monòtona. Per a cada* $\alpha \in [0, 1]$, *considerem el conjunt*

$$C^\alpha = \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B)) \mid \min T(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max T(A^\alpha, B^\alpha)\}$$

Nota 4.2.2. *A partir de la monotonia de l'operació* T, *els conjunts* C^α *es podran representar com:*

$$C^\alpha = \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B)) \mid T(\min A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant T(\max A^\alpha, \max B^\alpha)\}$$

és a dir, si A^α *i* B^α *venen donats respectivament per les expressions 4.1 i 4.2*

$$C^\alpha = \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B)) \mid T(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\}$$

En particular, si $\alpha = 0$ *aleshores* C^0 *és el conjunt* $T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B))$.

Ara demostrarem que amb aquests conjunts C^α (definits en 4.2.1) és possible construir un únic nombre borrós discret que els té per α-nivells. Per això:

Proposició 4.2.3. *Per a cada $\alpha \in [0,1]$ els conjunts C^α verifiquen les següents propietats:*

1. *C^α és un subconjunt no buit.*
2. *$C^\beta \subseteq C^\alpha$ per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.*
3. *Per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, si $x \in C^\alpha - C^\beta$, aleshores $x < y$ per a tot $y \in C^\beta$, o $x > y$ per a tot $y \in C^\beta$.*
4. *Per a cada $\alpha \in (0,1]$, existeix un nombre real α' amb $0 < \alpha' < \alpha$ tal que $C^{\alpha'} = C^\alpha$ (és a dir $C^r = C^\alpha$, per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$).*

Demostració. Ho farem per passes:

1. Per a cada $\alpha \in [0,1]$, C^α és un conjunt finit no buit perquè A^α i B^α són ambdós conjunts no buits finits i $T(supp(A), supp(B))$ és un conjunt finit.
2. $C^\beta \subseteq C^\alpha$ per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.
   Perquè si $A, B \in DFN$ i

   $$A^\alpha = \{x_1^\alpha, ..., x_p^\alpha\},\ A^\beta = \{x_1^\beta, ..., x_r^\beta\},$$
   $$B^\alpha = \{y_1^\alpha, ..., y_k^\alpha\},\ B^\beta = \{y_1^\beta, ..., y_l^\beta\},$$

   aleshores

   $$A^\beta \subseteq A^\alpha \text{ implica que } x_1^\alpha \leqslant x_1^\beta \text{ i } x_r^\beta \leqslant x_p^\alpha \tag{4.3}$$
   $$B^\beta \subseteq B^\alpha \text{ implica que } y_1^\alpha \leqslant y_1^\beta \text{ i } y_l^\beta \leqslant y_k^\alpha \tag{4.4}$$

   A més, com T és una funció monòtona tenim

   $$T(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant T(x_1^\beta, y_1^\beta) \leqslant T(x_r^\beta, y_l^\beta) \leqslant T(x_p^\alpha, y_k^\alpha)$$

   Per tant, $C^\beta \subseteq C^\alpha$.
3. Si $x \in C^\alpha - C^\beta$ aleshores $x \in T(supp(A), supp(B))$ i x no pertany al conjunt C^β, així o bé $x < T(x_1^\beta, y_1^\beta)$, que és el mínim del conjunt C^β, o $x > T(x_r^\beta, y_l^\beta)$, que és el màxim del conjunt C^β.
4. Com $A, B \in DFN$, tenint en compte el Teorema 3.2.2 (de representació del nombres borrosos dicrets), per a cada $\alpha \in (0,1]$ existeixen nombres reals α_1' i α_2' amb $0 < \alpha_1' < \alpha$ i $0 < \alpha_2' < \alpha$ tals que per a cada $r \in [\alpha_1', \alpha]$, $A^\alpha = A^r$. A més, $B^\alpha = B^r$, per a cada $r \in [\alpha_2', \alpha]$. Així, si $\alpha' = \alpha_1' \vee \alpha_2'$, obtenim:

   $$\min(A^r) = \min(A^\alpha) \text{ i } \max(A^r) = \max(A^\alpha)$$
   $$\min(B^r) = \min(B^\alpha) \text{ i } \max(B^r) = \max(B^\alpha)$$

   per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$. Aleshores

   $$T(\min(A^r), \min(B^r)) = T(\min(A^\alpha), \min(B^\alpha))$$
   $$T(\max(A^r), \max(B^r)) = T(\max(A^\alpha), \max(B^\alpha))$$

Així,

$$\begin{aligned} C^{\alpha} &= \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B)) \mid \\ &\quad T(\min(A^{\alpha}), \min(B^{\alpha})) \leqslant z \leqslant T(\max(A^{\alpha}), \max(B^{\alpha}))\} \\ &= \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B)) \mid \\ &\quad T(\min(A^{r}), \min(B^{r})) \leqslant z \leqslant T(\max(A^{r}), \max(B^{r}))\} \\ &= C^{r} \end{aligned}$$

per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$.

□

Teorema 4.2.4. *Existeix un únic nombre borrós discret, que denotarem per $\mathcal{T}(A,B)$, tal que els seus α-conjunts de nivell $\mathcal{T}(A,B)^{\alpha}$ són exactament els conjunts C^{α} (definits en 4.2.1) per a cada $\alpha \in [0,1]$ i $\mathcal{T}(A,B)(z) = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid z \in C^{\alpha}\}$.*

Demostració. És immediata a partir de la proposició 4.2.3 i del teorema 3.2.2 (de representació de nombres borrosos discrets) □

Ara, donarem alguns exemples de nombres borrosos discrets obtinguts a partir del mètode anterior emprant dos coneguts casos de t-normes i t-conormes discretes.

Exemple 4.2.5. *Considerem la cadena finita $L_5 = \{0,1,2,3,4,5\}$ i els nombres borrosos discrets $A = \{0.2/0, 0.5/2, 1/3, 0.8/5\}$ i $B = \{0.1/1, 0.8/3, 1/4, 0.6/5\}$. Per altre part, siguin*
$T_Ł(x,y) = \max(0, x+y-5)$ *i* $S_Ł(x,y) = \min(5, x+y)$
la t-norma i la t-conorma de Łukasiewicz respectivament. Sigui també

$$T_D = \begin{cases} x & \text{si } y = 5 \\ y & \text{si } x = 5 \\ 0 & \text{altre cas} \end{cases} \quad i \quad S_D = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 5 & \text{altre cas} \end{cases}$$

la t-norma i la t-conorma dràstica respectivament.
Aleshores uns càlculs senzills demostren que

- $\mathcal{T}_Ł(A,B) = \{0.5/0, 0.8/1, 1/2, 0.8/3, 0.8/4, 0.6/5\}$
- $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}(A,B) = \{1/0, 0.8/1, 0.8/2, 0.8/3, 0.8/4, 0.6/5\}$
- $\mathcal{S}_Ł(A,B) = \{0.1/1, 0.2/3, 0.2/4, 1/5\}$
- $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(A,B) = \{0.1/1, 0.2/3, 0.2/4, 1/5\}$

Definició 4.2.6. *D'acord al teorema 4.2.4 veim que a partir d'una operació monòtona T sobre L_n, es dedueix que és possible definir una operació binària sobre el conjunt $\mathcal{D}_{L_n} = \{A \in \mathrm{DFN} \mid \mathrm{supp}(A) \subseteq L_n\}$,*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{D}_{L_n} \times \mathcal{D}_{L_n} &\longrightarrow \mathcal{D}_{L_n} \\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{T}(A,B) \end{aligned}$$

que serà anomenada l'extensió de l'operació T a $\mathcal{D}_{L_n}$.

Anam ara a estudiar algunes propietats rellevants d'aquesta operació. Per això, introduirem la següent notació.

Notació 4.2.7. *Donat un element* $a \in L_n$*, dontarem per* 1_a *l'únic nombre borrós discret que té per suport el subconjunt unitari* $\{a\} \subseteq L_n$*. Llavors, per exemple, es veu fàcilment que l'element més petit de* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *i el més gran són els nombres borrosos discrets* 1_0 *i* 1_n *respectivament. Amb aquesta notació, notem que l' apartat 2. de la següent proposició ens assegura que* $\mathcal{T}$ *és efectivament una extensió de* T*.*

Teorema 4.2.8. *Sigui* $\mathcal{T} : \mathcal{D}_{L_n} \times \mathcal{D}_{L_n} \to \mathcal{D}_{L_n}$ *l'extensió d'una operació monòtona* T *sobre* $\mathcal{D}_{L_n}$ *considerada en la definició 4.2.6. Aleshores, per a cada* $A, B, C \in \mathcal{D}_{L_n}$ *és verifiquen les següents propietats:*

1. $\mathcal{T}$ *és monòtona creixent.*
2. $\mathcal{T}(1_a, 1_b) = 1_{T(a,b)}$.
3. $\mathcal{T}$ *és commutativa si i només si ho és* T*.*
4. $\mathcal{T}$ *és associativa si i només si ho és* T*.*

Demostració. Siguin A, B i C tres nombres borrosos discrets del conjunt D_{L_n}. Considerem els seus α-nivells: $A^\alpha = \{x_1^\alpha, ..., x_p^\alpha\}$, $B^\alpha = \{y_1^\alpha, ..., y_k^\alpha\}$, $C^\alpha = \{w_1^\alpha, ..., w_l^\alpha\}$ per A, B i C respectivament.

1. Volem veure que $\mathcal{T}$ és una aplicació monòtona creixent, és a dir, per a cada $A, B, C \in \mathcal{D}_{L_n}$ tals que $B \preceq C$ (on $\preceq$ és l'ordre parcial considerat en la nota 3.2.25) aleshores $\mathcal{T}(A, B) \preceq \mathcal{T}(A, C)$, és a dir, $\min(\mathcal{T}(A, B), \mathcal{T}(A, C)) = \mathcal{T}(A, B)$. Aquesta darrera relació és equivalent a demostrar que $\min(\mathcal{T}(A, B), \mathcal{T}(A, C))^\alpha = \mathcal{T}(A, B)^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0, 1]$ on

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(A, B)^\alpha &= \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B)) \mid T(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\} \\
\mathcal{T}(A, C)^\alpha &= \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(C)) \mid T(x_1^\alpha, w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T(x_p^\alpha, w_l^\alpha)\}
\end{aligned}$$

Com que $B \preceq C$ implica que $\min(B, C)^\alpha = B^\alpha$, és té que $y_1^\alpha \leqslant w_1^\alpha$, $y_k^\alpha \leqslant w_l^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0, 1]$. Emprant aquesta darrera relació i el fet de que T és monòtona, obtenim que

$$T(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant T(x_1^\alpha, w_1^\alpha) \quad \text{i} \quad T(x_p^\alpha, y_k^\alpha) \leqslant T(x_p^\alpha, w_l^\alpha)$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\min(\mathcal{T}(A, B), \mathcal{T}(A, C))^\alpha &= \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B)) \wedge T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(C)) \mid \\
&\quad \min(T(x_1^\alpha, y_1^\alpha), T(x_1^\alpha, w_1^\alpha)) \leqslant z \leqslant \min(T(x_p^\alpha, y_k^\alpha), T(x_p^\alpha, w_l^\alpha))\} \\
&= \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B)) \wedge T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(C)) \mid \\
&\quad T(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\}
\end{aligned}$$

$B \preceq C$ implica, en particular, que $\min(\mathrm{supp}(B), \mathrm{supp}(C)) = \mathrm{supp}(B)$ i, per tant,

$$\begin{aligned}
\min(\mathcal{T}(A, B), \mathcal{T}(A, C))^\alpha &= \{z \in T(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B)) \mid T(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\} \\
&= \mathcal{T}(A, B)^\alpha.
\end{aligned}$$

2. Basta adonar-se'n que per a tot $\alpha \in [0, 1]$ els α-conjunts de nivell de $\mathcal{T}(1_a, 1_b)$ venen donats per

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(1_a, 1_b)^\alpha &= \{z \in T(a, b) \mid T(\min 1_a, \min 1_b) \leqslant z \leqslant T(\max 1_a, \max 1_b)\} \\
&= \{z \in T(a, b) \mid T(a, b) \leqslant z \leqslant T(a, b)\} = \{T(a, b)\}.
\end{aligned}$$

3. Si T és commutativa, per demostrar que $\mathcal{T}(A,B)=\mathcal{T}(B,A)$, basta comprovar que els nombres borrosos discrets $\mathcal{T}(A,B)$ i $\mathcal{T}(B,A)$ tenen els mateixos α-nivells per a cada $\alpha\in[0,1]$.

   Per definició

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(A,B)^\alpha &= \{z\in T(supp(A),supp(B)) \mid \\ &\quad T(\min A^\alpha,\min B^\alpha)\leqslant z\leqslant T(\max A^\alpha,\max B^\alpha)\}\\ &=\{z\in T(supp(A),supp(B))\mid T(x_1^\alpha,y_1^\alpha)\leqslant z\leqslant T(x_p^\alpha,y_k^\alpha)\}\\ &\quad \text{Per la commutativitat de l'operació } T\\ &=\{z\in T(supp(B),supp(A))\mid T(y_1^\alpha,x_1^\alpha)\leqslant z\leqslant T(y_k^\alpha,x_p^\alpha)\}\\ &=\mathcal{T}(B,A)^\alpha\end{aligned}$$

   Recíprocament, si $\mathcal{T}$ és commutativa llavors tenim en particular, que $\mathcal{T}(1_a,1_b)=\mathcal{T}(1_b,1_a)$ per a tot $a,b\in L_n$. És a dir, tenim que $1_{T(a,b)}=1_{T(b,a)}$ i per tant $T(a,b)=T(b,a)$.

4. Suposem que T és associativa. Per veure que $\mathcal{T}(\mathcal{T}(A,B),C)=\mathcal{T}(A,\mathcal{T}(B,C))$, basta demostrar que els nombres borrosos discrets $\mathcal{T}(\mathcal{T}(A,B),C)$ i $\mathcal{T}(A,\mathcal{T}(B,C))$ tenen els mateixos α-nivells per a cada $\alpha\in[0,1]$.

   Per definició

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathcal{T}(A,B),C)^\alpha &=\{z\in T(supp(\mathcal{T}(A,B)),supp(C))\mid\\ &\quad T(\min\mathcal{T}(A,B)^\alpha,\min C^\alpha)\leqslant z\leqslant T(\max\mathcal{T}(A,B)^\alpha,\max C^\alpha)\}\\ &=\{z\in T(supp(\mathcal{T}(A,B)),supp(C))\mid\\ &\quad T(T(x_1^\alpha,y_1^\alpha),w_1^\alpha)\leqslant z\leqslant T(T(x_p^\alpha,y_k^\alpha),w_l^\alpha)\}\\ &=\{z\in T(T(supp(A),supp(B)),supp(C))\mid\\ &\quad T(T(x_1^\alpha,y_1^\alpha),w_1^\alpha)\leqslant z\leqslant T(T(x_p^\alpha,y_k^\alpha),w_l^\alpha)\}\end{aligned}$$

   Per l'associativitat de T

$$\begin{aligned}&=\{z\in T(supp(A),T(supp(B),supp(C))\mid\\ &\quad T(x_1^\alpha,T(y_1^\alpha,w_1^\alpha))\leqslant z\leqslant T(x_p^\alpha,T(y_k^\alpha,w_l^\alpha))\}\\ &=\mathcal{T}(A,\mathcal{T}(B,C))^\alpha.\end{aligned}$$

   Recíprocament, si $\mathcal{T}$ és associativa llavors tenim en particular, que $\mathcal{T}(\mathcal{T}(1_a,1_b),1_c)=\mathcal{T}(1_a,\mathcal{T}(1_b,1_c))$ per a tot $a,b,c\in L_n$. És a dir, tenim que $1_{T(a,T(b,c))}=1_{T(a,T(b,c))}$ i per tant $T(a,T(b,c))=T(a,T(b,c))$.

□

Volem veure ara que l'extensió d'una operació monòtona T sobre L_n, $\mathcal{T}$, és tancada en el conjunt $\mathcal{A}_1$. És a dir, que si consideram dos nombres borrosos discrets $A,B\in\mathcal{A}_1$ llavors $\mathcal{T}(A,B)\in\mathcal{A}_1$.

Lema 4.2.9. *Siguin* T *i* S *una t-norma suau i una t-conorma suau sobre* $L_n=\{0,1,\cdots,n\}$ *respectivament. Si X i Y són subconjunts de nombres naturals consecutius de* L *aleshores* $T(X,Y)$ *i* $S(X,Y)$ *també són subconjunts de nombres naturals consecutius de* L_n*, on* $T(X,Y)=\{T(a,b),\ a\in X,\ b\in Y\}$ *i* $S(X,Y)=\{S(a,b),\ a\in X,\ b\in Y\}$.

Demostració. Només demostrarem el cas per a la t-norma suau T perquè el cas de la t-conorma S és totalment semblant. Si T és suau, llavors verifica el teorema del valors intermedis (veure la proposició 2.1.8) i, per tant, $T(X,Y)$ agafa tots els valors entre $T(\min X,\min Y)$

i $T(\max X, \max Y)$. Per tant $T(X,Y)$ és un subconjunt de nombres naturals consecutius de L_n. □

Nota 4.2.10. *A partir dels lema 4.2.9 observem que si X, Y són subconjunts de nombres naturals consecutius el conjunt $T(X,Y) = \{T(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ pot ser expressat com $T(X,Y) = \{z \in \mathbb{N} \mid T(x_1,y_1) \leqslant z \leqslant T(x_p,y_k)\}$ on x_1, x_p denoten el mínim i màxim element del conjunt X respectivament i y_1, y_k denoten el mínim i màxim element del conjunt Y respectivament.*

Proposició 4.2.11. *Per a cada parella de nombres borrosos discrets $A, B \in \mathcal{A}_1$ i qualsevol operació monòtona i suau T sobre L_n, $\mathcal{T}(A,B)$ és un nombre borrós discret que pertany al conjunt $\mathcal{A}_1$.*

Demostració. Segons el teorema 4.2.4, $\mathcal{T}(A,B)$ és un nombre borrós discret. A més, com que T és suau aplicant el lema 4.2.9, els conjunts $T(\operatorname{supp}(A), \operatorname{supp}(B))$ i $\mathcal{T}(A,B)^\alpha = \{z \in T(\operatorname{supp}(A), \operatorname{supp}(B)) \mid T(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\}$ per a cada $\alpha \in [0,1]$ són subconjunts de nombres naturals consecutius i per tant $\mathcal{T}(A,B) \in \mathcal{A}_1$. □

Nota 4.2.12. *Quan treballam en $\mathcal{A}_1$ els α-nivells de nombres borrosos discrets de $\mathcal{A}_1$ són en realitat intervals continguts dins L_n. Aleshores, extrapolant la notació habitual per a t-normes interval-valorades [59, 60] podríem escriure $T(A,B)^\alpha = T(A^\alpha, B^\alpha)$.*

En el cas de t-normes i t-conormes suaus tenim el següent corol·lari.

Corol·lari 4.2.13. *Sigui $T(S)$ una t-norma(t-conorma) suau sobre L_n i sigui*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{S}) : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 &\to \mathcal{A}_1 \\ (A,B) &\to \mathcal{T}(A,B) \end{aligned}$$

l'extensió de $T(S)$ a $\mathcal{A}_1$, definida d'acord a la definició 4.2.6. Aleshores, aquesta operació binària $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ és monòtona creixent, associativa i commutativa.

Demostració. Immediata a partir de les proposicions 4.2.8 i 4.2.11. □

Nota 4.2.14. *A partir d'ara, cada sentència sobre una t-norma T definida sobre la cadena finita L_n pot ser obtinguda també per una t-conorma S també definida sobre L_n, simplement canviant les paraules i l'element màxim n de L_n, per l'element mínim 0 de L_n.*

En el teorema 3.2.32 hem demostrat que el triplet $(\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max)$ és un reticle fitat distributiu. En el següent resultat provarem que es possible definir una t-norma (t-conorma) sobre el mateix a partir d'una t-norma (t-conorma) suau definida sobre L_n.

Teorema 4.2.15. *Sigui T una t-norma suau sobre L_n i sigui*

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{T}(A,B) \end{aligned}$$

l'extensió de T sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$, (definida d'acord a la definició 4.2.6). Aleshores, $\mathcal{T}$ és una t-norma en el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Demostració. Primer de tot, com T és una operació tancada sobre la cadena finita L_n, tenint en compte la proposició 4.2.11, la operació binària $\mathcal{T}$ és tancada sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. A més, a partir dels teorema 4.2.8 podem veure que $\mathcal{T}$ és una operació monòtona creixent, associativa i commutativa. Finalment, considerem el nombre borrós discret 1_n, aleshores, és fàcil veure que $\mathcal{T}(A, 1_n) = A$ perquè

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(A, 1_n)^\alpha &= \{z \in T(\operatorname{supp} A, n) \mid T(x_1^\alpha, n) \leqslant z \leqslant T(x_p^\alpha, n)\}\\ &= \{z \in \operatorname{supp} A \mid x_1^\alpha \leqslant z \leqslant x_p^\alpha\}\\ &= A^\alpha\end{aligned}$$

per a tot $\alpha \in [0, 1]$. □

Nota 4.2.16. *És important recalcar que per a cada t-conorma suau* S *definida sobre la cadena finita* L_n *l'operació binària*

$$\begin{aligned}\mathcal{S} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A, B) &\longmapsto \mathcal{S}(A, B)\end{aligned}$$

és una t-conorma sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$*, on* $\mathcal{S}(A, B)$ *és el nombre borrós discret que té per* α*-conjunts de nivell els conjunts*

$$\mathcal{S}(A, B)^\alpha = \{z \in S(\operatorname{supp}(A), \operatorname{supp}(B)) \mid S(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant S(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

En la proposició 3.2.34 veiem que $\mathbb{B}$ és un subreticle fitat de $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Es veu trivialment que les extensions de t-normes i t-conormes sobre L_n a $\mathcal{A}_1^{L_n}$ es poden restringir al subreticle $\mathbb{B}$.

Proposició 4.2.17. *Sigui* T *una t-norma suau sobre* L_n *i sigui*

$$\begin{aligned}\mathcal{T} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A, B) &\longmapsto \mathcal{T}(A, B)\end{aligned}$$

l'extensió de T *sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$*. Aleshores, la restricció de* $\mathcal{T}$ *al reticle fitat* $\mathbb{B}$ *és una t-norma en dit reticle.*

Similarment,

Proposició 4.2.18. *Sigui* S *una t-norma suau sobre* L_n *i sigui*

$$\begin{aligned}\mathcal{S} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A, B) &\longmapsto \mathcal{T}(A, B)\end{aligned}$$

l'extensió de S *sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$*. Aleshores, la restricció de* $\mathcal{S}$ *al reticle fitat* $\mathbb{B}$ *és una t-norma en dit reticle.*

Nota 4.2.19. *Notem que en el cas de* $\mathcal{A}_1$ *o del reticle fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$*, els* α*-nivells d'una t-norma* T *(t-conorma* S*) es poden escriure com*

$$\mathcal{T}(A, B)^\alpha = \{z \in L_n \mid T(\min A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant T(\max A^\alpha, \max B^\alpha)\}$$

És a dir, si $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ *llavors els* α*-nivells* A^α*,* B^α *són intervals de* L_n *i* $\mathcal{T}(A, B)^\alpha$ *és l'interval de* L_n *donat per* $[T(\min A^\alpha, \min B^\alpha), T(\max A^\alpha, \max B^\alpha)]$*. I, seguint la notació habitual de t-normes interval valorades podríem escriure* $\mathcal{T}(A, B)^\alpha = T(A^\alpha, B^\alpha)$*.*

En el cas en que la t-norma T *(o l'operació monòtona) no és suau això ja no es verifica i no té perquè ser tancada sobre* $\mathcal{A}_1$ *o* $\mathcal{A}_1^{L_n}$*. Per exemple, si consideram la norma dràstica*

$$T_D = \begin{cases} x & \text{si } y = 5\\ y & \text{si } x = 5\\ 0 & \text{altre cas}\end{cases}$$ *definida sobre la cadena* $L_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *i* $A = \{0.4/3, 1/4, 0.8/5\}$ *i* $B = \{0.4/3, 0.8/4, 1/5\}$*, resulta* $\mathcal{T}_\mathcal{D}(A, B) = \{0.8/0, 0.8/3, 1/4, 0.8/5\} \notin \mathcal{A}_1^{L_5}$*.*

Llavors si volem estendre operacions no suaus sobre L_n *a operacions sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *caldrà modificar un mínim la definició. El que farem serà agafar en els* α*-nivells els* $z \in L_n$ *en lloc dels* $z \in T(\operatorname{supp}(A), \operatorname{supp}(B))$*, com ho proposarem en una propera secció.*

Notació 4.2.20. *Quan considerem nombres borrosos discrets del conjunt $\mathcal{A}_1$ o del reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$, el seu suport o els seus α-nivells, com són subconjunts de nombres naturals consecutius, les representarem per simplicitat en forma d'intervals, en comptes d'enumerar cadascuns dels seus elements. Per exemple, si $A^\alpha = \{x_1^\alpha, \cdots, x_p^\alpha\}$ és el α-nivell del nombre A, llavors ho representarem com l'interval $A^\alpha = [x_1^\alpha, x_p^\alpha]$.*

Per acabar aquesta secció veurem com l'ordre puntual de t-normes i t-conormes suaus es manté ens les seves respectives extensions sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Proposició 4.2.21. *Siguin $T_1(S_1)$ i $T_2(S_2)$ dues t-normes (t-conormes) suaus sobre la cadena finita $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$ verificant que $T_1(S_1) \leqslant T_2(S_2)$. Aleshores, per a tota parella $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ és satisfà la següent desigualtat $\mathcal{T}_1(\mathcal{S}_1)(A, B) \preceq \mathcal{T}_2(\mathcal{S}_2)(A, B)$.*

Demostració. A partir de la nota 3.2.25, basta demostrar que

$$\min(\mathcal{T}_1(A, B), \mathcal{T}_2(A, B))^\alpha = \mathcal{T}_1(A, B)^\alpha$$

per a tot $\alpha \in [0, 1]$. Per aquesta raó, considerem els α-nivells $A^\alpha = [x_1^\alpha, x_p^\alpha]$ i $B^\alpha = [y_1^\alpha, y_k^\alpha]$ de A i B respectivament. Així,

$$\mathcal{T}_1(A, B)^\alpha = \{z \in L_n \mid T_1(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T_1(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\} = T_1(A^\alpha, B^\alpha)$$

$$\mathcal{T}_2(A, B)^\alpha = \{z \in L_n \mid T_2(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T_2(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\} = T_2(A^\alpha, B^\alpha)$$

Aleshores, com $T_1(x, y) \leqslant T_2(x, y)$ per a tot $x, y \in L_n$

$$\begin{aligned}\min(\mathcal{T}_1(A, B), \mathcal{T}_2(A, B))^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min(T_1(x_1^\alpha, y_1^\alpha), T_2(x_1^\alpha, y_1^\alpha)) \leqslant \\ &\quad z \leqslant \min(T_1(x_p^\alpha, y_k^\alpha), T_2(x_p^\alpha, y_k^\alpha))\} \\ &= \{z \in L_n \mid T_1(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T_1(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\} \\ &= \mathcal{T}_1(A, B)^\alpha.\end{aligned}$$

□

4.2.2 *Negacions i dualitat sobre el reticle borrós discret*

Negacions i negacions fortes sobre l'interval unitat i les seves aplicacions en la teoria de conjunts borrosos han estat estudiades i caracteritzades per molts d'autors (per exemple, cal destacar els treballs [71, 70, 135]). Les negacions neixen per a realitzar la modelització del complementari o negació clàssica i s'utilitzen especialment per a temes de dualitat. Dins de la lògica borrosa són útils també en molts altres aspectes. Per exemple en la construcció d'implicacions borroses de diversos tipus com les implicacions fortes , les QL-implicacions i les D-implicacions. Per altre banda, en l'entorn discret, sabem ([105], veure també la nota 2.1.20) que existeix una única negació forta sobre L_n que ve donada per l'expressió $N(x) = n - x$ per a tot $x \in L_n$. L'objectiu d'aquesta secció serà, per una part construir una funció de negació forta sobre el reticle distributiu fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$. I per una altra, fer un estudi clàssic de dualitat sobre t-normes i t-conormes sobre aquest reticle fitat.

Prèviament recordarem la definició i alguns resultats sobre funcions de negació.

Definició 4.2.22. *[70] Una funció de negació o simplement negació definida sobre un reticle fitat $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \vee, \wedge, 0, 1)$ és una aplicació $N : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que*

I) $x \leqslant y$ *implica* $N(x) \geqslant N(y)$

II) $N(1) = 0$ *i* $N(0) = 1$.

Si $N^2 = \mathrm{Id}$ *aleshores* N *serà anomenada negació forta.*

Nota 4.2.23. *Cal recalcar els següent fets:*

1. *[88] Si nosaltres consideram la negació* N *sobre l'interval tancat* $[0,1]$*, aleshores la negació associada sobre el conjunt d'intervals tancats sobre* $[0,1]$ *(denotat per* $\mathcal{I}([0,1])$*) vindrà definida per* $\overline{N} : \mathcal{I}([0,1]) \to \mathcal{I}([0,1])$ *on* $\overline{N}([a,b]) = [N(b), N(a)]$.

2. *Anàlogament a l'ítem anterior, és possible considerar un negació forta en el conjunt d'intervals tancats de la cadena finita* L_n *(denotat per* $\mathcal{I}(L_n)$*) a partir d'una negació forta* N *definida sobre* L_n*, de la següent manera:* $\overline{N} : \mathcal{I}(L_n) \to \mathcal{I}(L_n)$ *on* $\overline{N}([a,b]) = [N(b), N(a)]$.

Com sempre, en aquesta secció, els α-conjunts de nivell del nombre borrós discret $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ seran denotats per $A^\alpha = \{x_1^\alpha, \cdots, x_p^\alpha\}$ o equivalentment per $[x_1^\alpha, x_p^\alpha]$ on $[x_1^\alpha, x_p^\alpha] = \{z \in L_n \mid x_1^\alpha \leqslant z \leqslant x_p^\alpha\}$, per a cada $\alpha \in [0,1]$.

Lema 4.2.24. *Sigui* N *la negació forta sobre* L_n*. Si* $X \subseteq L_n$ *és un subconjunt de nombres naturals consecutius aleshores* $N(X) = \{N(x) \mid x \in X\} = \{n - x \mid x \in X\}$ *també és un subconjunt de nombres naturals consecutius.*

Demostració. Com N és una bijecció estrictament decreixent sobre L_n aleshores $N(X) = N([x_1, x_p]) =$ (tenint en compte la nota 4.2.23) $[N(x_p), N(x_1)] = \{z \in \mathbb{N} \mid N(x_p) \leqslant z \leqslant N(x_1)\}$. □

Proposició 4.2.25. *Sigui* $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$*. A més, per a cada* $\alpha \in [0,1]$ *considerem els subconjunts* $\mathcal{N}(A)^\alpha = \{z \in N(\mathrm{supp}(A)) \mid \min(N(A^\alpha)) \leqslant z \leqslant \max(N(A^\alpha))\}$*. Aleshores existeix un únic nombre borrós discret, que denotarem per* $\mathcal{N}(A)$*, tal que té per* α*-conjunts de nivell el conjunts* $\mathcal{N}(A)^\alpha$.

Demostració. Sabem que si $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ aleshores els seus α-nivells són conjunts de nombres naturals consecutius per a cada $\alpha \in [0,1]$. Per tant, a partir del lema 4.2.24 els conjunts $N(A^\alpha)$ per a cada $\alpha \in [0,1]$ també. A més, tenint en compte la monotonia de la negació forta N,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(A)^\alpha &= \{z \in N(\mathrm{supp}(A)) \mid \min(N(A^\alpha)) \leqslant z \leqslant \max(N(A^\alpha))\} \\
&= \{z \in N(\mathrm{supp}(A)) \mid N(x_p^\alpha) \leqslant z \leqslant N(x_1^\alpha)\} \\
&= [N(x_p^\alpha), N(x_1^\alpha)] \\
&= N(A^\alpha).
\end{aligned}$$

Ara només queda provar que els conjunts $\mathcal{N}(A)^\alpha$ verifiquen per a cada $\alpha \in [0,1]$ les condicions 1-4 del teorema 3.2.2 i per tant el resultat quedarà demostrat. En efecte,

1. $\mathcal{N}(A)^\alpha$ són subconjunts finits no buits perquè cada A^α són subconjunts fintis no buits i $N(\mathrm{supp}(A))$ és un subconjunt finit.

2. Volem comprovar ara que la inclusió $\mathcal{N}(A)^\beta \subseteq \mathcal{N}(A)^\alpha$ per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ és certa.
   Si $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ i $A^\alpha = [x_1^\alpha, x_p^\alpha]$, $A^\beta = [x_1^\beta, x_r^\beta]$, llavors

   $$A^\beta \subseteq A^\alpha \text{ implica que } x_1^\alpha \leqslant x_1^\beta \text{ i que } x_r^\beta \leqslant x_p^\alpha \tag{4.5}$$

   A més, com N és una negació forta sobre L i tenint en compte la relació (4.5) obtenim:

   $$N(x_p^\alpha) \leqslant N(x_r^\beta) \leqslant N(x_1^\beta) \leqslant N(x_1^\alpha)$$

   Per tant, $\mathcal{N}(A)^\beta \subseteq \mathcal{N}(A)^\alpha$.

3. Si x no pertany a $\mathcal{N}(A)^\beta$, aleshores o bé $x < N(x_r^\beta)$, que és el mínim $\mathcal{N}(A)^\beta$, o $x > N(x_1^\beta)$, que és el màxim de $\mathcal{N}(A)^\beta$.

4. Com $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$, aleshores a partir del teorema 3.2.2, per a cada $\alpha \in (0, 1]$ existeix un nombre real α' amb $0 < \alpha' < \alpha$ tal que per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$, $A^\alpha = A^r$. Aleshores

$$\min(A^r) = \min(A^\alpha) \text{ i } \max(A^r) = \max(A^\alpha)$$

per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$. Per tant

$$\begin{aligned} \min(N(A^r)) &= \min(N(A^\alpha)) \\ \max(N(A^r)) &= \max(N(A^\alpha)) \text{ per a cada } r \in [\alpha', \alpha] \end{aligned}$$

Així,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A)^\alpha &= N(A^\alpha) \\ &= N(A^r) \\ &= \mathcal{N}(A)^r \text{ per a cada } r \in [\alpha', \alpha]. \end{aligned}$$

□

Exemple 4.2.26. *Considerem la cadena finita* $L_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *i el nombre borrós discret* $A \in \mathcal{A}_1^{L_7}$, $A = \{0.3/1, 0.5/2, 0.7/3, 1/4, 0.8/5\}$.

Aleshores $\mathcal{N}(A) = \{0.8/2, 1/3, 0.7/4, 0.5/5, 0.3/6\}$ *(Veure figura 22.)*

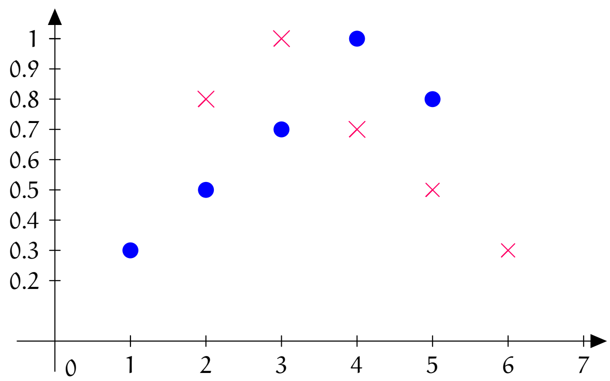

Figura 22: En la figura es pot veure el nombre borrós A (representat amb punts blaus) i el transformat $\mathcal{N}(A)$ (representat amb creus vermelles) de l'exemple 4.2.26.

Proposició 4.2.27. *Considerem la negació forta* N *sobre la cadena finita* L_n *i l'aplicació*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{N}: & \mathcal{A}_1^{L_n} & \longrightarrow & \mathcal{A}_1^{L_n} \\ & A & \mapsto & \mathcal{N}(A) \end{array}$$

(on $\mathcal{N}(A)$ *és el nombre borrós discret tal que té per* α*-nivells els conjunts* $N(A^\alpha) = [N(x_p^\alpha), N(x_1^\alpha)]$ *per a cada* $\alpha \in [0, 1]$*, essent* $[x_1^\alpha, x_p^\alpha]$ *els* α*-nivells de* A*) és una negació forta sobre el reticle fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n} = (\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max)$.

Demostració. A partir de la proposició 4.2.25, $\mathcal{N}(A) \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ perquè $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ i N és una negació forta sobre la cadena L_n. Ara, provarem que $\mathcal{N}$ és decreixent i involutiva. Per aquesta raó, considerem $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ verificant $A \preceq B$, on els seus α-conjunts de nivell per a cada $\alpha \in [0,1]$ venen donats per $A^\alpha = [x_1^\alpha, x_p^\alpha]$ i $B^\alpha = [y_1^\alpha, y_k^\alpha]$, per A i B respectivament. Com $A \preceq B$, d'acord a la nota 3.2.25, implica que $[x_1^\alpha, x_p^\alpha] \leqslant [y_1^\alpha, y_k^\alpha]$ per a cada $\alpha \in [0,1]$, i per tant, $x_1^\alpha \leqslant y_1^\alpha$ i $x_p^\alpha \leqslant y_k^\alpha$ per a cada $\alpha \in [0,1]$. Ara, tenint en compte la nota 4.2.23, com N és una negació forta es verifica la desigualtat $[N(y_k^\alpha), N(y_1^\alpha)] \leqslant [N(x_p^\alpha), N(x_1^\alpha)]$ per a cada $\alpha \in [0,1]$, és a dir, $\mathcal{N}(B) \preceq \mathcal{N}(A)$.

Finalment, la involució de la funció $\mathcal{N}$ és deriva immediatament de la nota 4.2.23 per ser N una negació forta sobre L_n. $\square$

Dualitat de t-normes i t-conormes sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$

És ben conegut (veure definició 2.1.21) que si T és una t-norma sobre la cadena finita L_n i N és la negació forta sobre L_n aleshores $T_N(x,y) = N(T(N(x), N(y)))$ és una t-conorma sobre L_n. Recíprocament, si S és una t-conorma sobre L_n aleshores $S_N(x,y) = N(S(N(x), N(y)))$ és una t-norma sobre L_n. El que veurem ara és, que a partir de les corresponents extensions de T i S en el reticle borrós discret $(\mathcal{A}_1^{L_n}, \preceq)$ és pot obtenir un resultat similar.

Teorema 4.2.28. *Sigui* S *una t-conorma suau sobre* L_n *i sigui* $\mathcal{S}$ *la seva extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Sigui* N *la negació forta sobre* L_n. *L'operació binària*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\mathcal{N} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\to \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{S}_\mathcal{N}(A,B) \end{aligned}$$

on $\mathcal{S}_\mathcal{N}(A,B) = \mathcal{N}(\mathcal{S}(\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B)))$ *és una t-norma sobre el reticle fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$, *que serà anomenada* la t-norma dual *de* $\mathcal{S}$ *respecte de* $\mathcal{N}$ *(o la* $\mathcal{N}$*-dual). Anàlogament, si* T *és una t-norma suau sobre* L_n *aleshores l'aplicació binària*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\mathcal{N} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\to \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{T}_\mathcal{N}(A,B) \end{aligned}$$

on $\mathcal{T}_\mathcal{N}(A,B) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B)))$ *és una t-conorma sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$, *que serà anomenada* t-conorma dual *de* $\mathcal{T}$ *respecte de la negació* $\mathcal{N}$ *(o la* $\mathcal{N}$*-dual).*

Demostració. $\mathcal{T}_\mathcal{N}(\mathcal{S}_\mathcal{N})$ és clarament una operació tancada sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ i llavors les propietats de t-conorma (t-norma) és dedueixen de forma immediata. $\square$

A més a més, la dualitat en $\mathcal{A}_1^{L_n}$ conserva la de L_n en el sentit de la següent proposició.

Proposició 4.2.29. *Sigui* N *la negació forta de* L_n, T *una t-norma suau sobre* L_n *i* $\mathcal{N}$ *i* $\mathcal{T}$ *les seves extensions a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Llavors la t-conorma* $\mathcal{N}$*-dual de* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_\mathcal{N}$, *coincideix amb l'extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *de la t-conorma* N*-dual de* T, T_N.

Demostració. Sigui T_N la N-dual de T i denotem per $\mathcal{S}$ la seva extensió a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Només cal veure que $\mathcal{T}_\mathcal{N}(A,B)^\alpha = \mathcal{S}(A,B)^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0,1]$.

Llavors segons la definició dels α-talls $\mathcal{T}_\mathcal{N}(A,B)^\alpha$, tenim que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B)))^\alpha &= N(\mathcal{T}(\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B))^\alpha) \\ &= N(T(\mathcal{N}(A)^\alpha, \mathcal{N}(B)^\alpha)) \\ &= N(T(N(A^\alpha), N(B^\alpha))) \\ &= T_N(A^\alpha, B^\alpha) \\ &= \mathcal{S}(A,B)^\alpha. \end{aligned}$$

$\square$

Una proposició anàloga es pot veure per a t-conormes sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Proposició 4.2.30. *Sigui* N *la negació forta de* L_n, S *una t-conorma suau sobre* L_n *i* $\mathcal{N}$ *i* $\mathcal{S}$ *les seves extensions a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Llavors la t-norma* $\mathcal{N}$*-dual de* $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$, *coincideix amb l'extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *de la t-norma* N*-dual de* S, S_N.

Demostració. Similar a la demostració de la proposició anterior. □

4.2.3 *Equació de Frank i nombres borrosos dicrets*

Es ben conegut una interessant relació entre l'equació de Frank i la condició de suavitat per a t-normes (t-conormes) definides sobre una cadena finita L_n (veure proposició 2.1.23).

En aquesta secció volem estudiar si és possible trobar una relació semblant a l'anterior emprant t-normes i t-conormes sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L}$ obtingudes com extensió de t-normes (t-conormes) suaus definides sobre L_n. Per això,

Sigui $\mathfrak{I}(L_n)$ el conjunt de tots els intervals de L_n definit per

$$\mathfrak{I}(L_n) = \{X \subseteq L_n \mid X \text{ és un subconjunt de nombres naturals consecutius de } L_n\}$$

Proposició 4.2.31. *Una parella* (T, S)*, on* T *és una t-norma i* S *és una t-conorma sobre la cadena finita* L_n*, és una solució de l'equació funcional*

$$T(X, Y) + S(X, Y) = X + Y \textit{ per a tots } X, Y \in \mathfrak{I}(L_n)$$

si i només si (T, S) *és una solució de l'equació de Frank.*

Demostració. Suposem primer que l'equació funcional $T(X, Y) + S(X, Y) = X + Y$ és certa per a cada parella $X, Y \in \mathfrak{I}(L_n)$, aleshores l'equació és certa per a cada parella de subconjunts unitaris $X = \{x\}$ i $Y = \{y\}$ de $\mathfrak{I}(L_n)$ amb $x, y \in L_n$. En aquest cas obtenim que

$$T(\{x\}, \{y\}) + S(\{x\}, \{y\}) = \{T(x, y)\} + \{S(x, y)\} = \{T(x, y) + S(x, y)\}$$

per a tot $x, y \in L_n$. Per altre part, com $X + Y = \{x\} + \{y\} = \{x + y\}$, aplicant les hipòtesi del teorema, els conjunts

$$\{T(x, y) + S(x, y)\} = \{x + y\} \text{ per a tots } \{x\}, \{y\} \in \mathfrak{I}(L_n)$$

Aleshores $T(x, y) + S(x, y) = x + y$ per a tot $x, y \in L_n$, és a dir, la parella (T, S) és una solució de l'equació funcional

$$T(x, y) + S(x, y) = x + y \text{ per a tot } x, y \in L_n$$

Reciprocament, si $X = [x_1, x_p]$ i $Y = [y_1, y_k]$ són intervals dins L_n aleshores

$$\begin{aligned} X + Y &= \{z = x + y,\ x \in X,\ y \in Y\} \\ &= \{z = x + y,\ x \in X,\ y \in Y \mid x_1 + y_1 \leqslant z \leqslant x_p + y_k\} \\ &= \{z \in L_n \mid x_1 + y_1 \leqslant z \leqslant x_p + y_k\} \\ &= [x_1 + y_1, x_p + y_k]. \end{aligned}$$

Ara, com (T, S) és una solució de l'equació funcional $T(x, y) + S(x, y) = x + y$ per a tot $x, y \in L_n$, a partir de la proposició 2.1.23, (T, S) són una parella de t-normes (t-conormes) suaus definides sobre L_n. Llavors, d'acord al lema 4.2.9, $T(X, Y)$ i $S(X, Y)$ són també subconjunts de nombres naturals consecutius. Per tant,

$$T(X, Y) = \{T(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\} = \{z \in L_n \mid T(x_1, y_1) \leqslant z \leqslant T(x_p, y_k)\} \quad \text{i}$$

$$S(X,Y) = \{S(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\} = \{z \in L_n \mid S(x_1,y_1) \leqslant z \leqslant S(x_p,y_k)\}$$

D'aquesta manera,

$$T(X,Y) + S(X,Y) = \{z \in L_n \mid T(x_1,y_1) + S(x_1,y_1) \leqslant z \leqslant T(x_p,y_k) + S(x_p,y_k)\} \quad (4.6)$$

A més, per hipòtesi T i S verifiquen l'equació de Frank i així,

$$\begin{aligned} T(X,Y) + S(X,Y) &= \{z \in L_n \mid T(x_1,y_1) + S(x_1,y_1) \leqslant z \leqslant T(x_p,y_k) + S(x_p,y_k)\} \\ &= \{z \in L_n \mid x_1 + y_1 \leqslant z \leqslant x_p + y_k\} \\ &= [x_1 + y_1, x_p + y_k]. \end{aligned}$$

□

Nota 4.2.32. *Volem destacar alguns fets derivats de la proposició anterior:*

(I) *A partir de la proposició 2.1.23, la proposició anterior pots ser reescrita com:*

Una parella (T,S), on T és una t-norma i S és una t-conorma sobre L_n, és una solució de l'equació funcional

$$T(X,Y) + S(X,Y) = X + Y \text{ per a tot } X,Y \in \mathfrak{I}(L_n)$$

si i només si T i S són suaus amb el mateix conjunts d'elements idempotents.

(II) *Si els subconjunts $X,Y \notin \mathfrak{I}(L_n)$ la proposició anterior no és certa. Per exemple, considerem la cadena finita $L_5 = \{0,1,2,3,4,5\}$, els subconjunts de L_5, $X = \{0,3\}$ i $Y = \{2,4\}$, i finalment la t-norma discreta $T(x,y) = \max(0, x+y-5)$ i la t-conorma $S(x,y) = \min(5, x+y)$. Aquestes t-norma i t-conorma verifiquen l'equació de Frank, però en aquest cas,*

$$X + Y = \{2,4,5,7\} \neq T(X,Y) + S(X,Y) = \{2,4,5,6,7\}$$

Corol·lari 4.2.33. *Una parella (T,S), on T és una t-norma i S és una t-conorma sobre la cadena finita L_n, és una solució de l'equació funcional*

$$T(\operatorname{supp}(A), \operatorname{supp}(B)) + S(\operatorname{supp}(A), \operatorname{supp}(B)) = \operatorname{supp}(A) + \operatorname{supp}(B)$$

per a tot $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ si i només si la parella (T,S) és una solució de l'equació de Frank.

Demostració. És dedueix a partir de la proposició 4.2.31, perquè els suports dels nombres borrosos discrets A i B són subconjunts de nombres naturals consecutius i pel fet que qualsevol subconjunt de nombres naturals consecutius pot ser considerat com el suport d'un nombre borrós discret de $\mathcal{A}_1^{L_n}$. □

Teorema 4.2.34. *Siguin T i S una t-norma i una t-conorma suaus sobre L_n, i siguin $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ les seves respectives extensions a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Llavors, la parella $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ satisfà l'equació funcional*

$$\mathcal{T}(A,B) \oplus \mathcal{S}(A,B) = A \oplus B \quad \text{per a cada} \quad A,B \in \mathcal{A}_1^{L_n} \quad (4.7)$$

on $\oplus$ representa la suma de nombres borrosos discrets segons el principi de Zadeh, si i només si, la parella (T,S) satisfan l'equació de Frank.

Demostració. Suposem que la parella (T, S) verifiquen l'equació de Frank. Llavors es verifica la relació

$$T(supp(A), supp(B)) + S(supp(A), supp(B)) = supp(A) + supp(B) \text{ per a tot } A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$$

Aleshores, basta provar que els nombres borrosos discrets $\mathcal{T}(A, B) \oplus \mathcal{S}(A, B)$ i $A \oplus B$ tenen els mateixos α-nivells per a cada $\alpha \in [0, 1]$. Per aquesta raó, considerem els α-nivells $A^\alpha = [x_1^\alpha, x_p^\alpha]$ i $B^\alpha = [y_1^\alpha, y_k^\alpha]$ per A, B respectivament. Sabem que $(A \oplus B)^\alpha = \{z \in supp(A) + supp(B) \mid x_1^\alpha + y_1^\alpha \leqslant z \leqslant x_p^\alpha + y_k^\alpha\} = [x_1^\alpha + y_1^\alpha, x_p^\alpha + y_k^\alpha]$. Llavors,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}(A, B) \oplus \mathcal{S}(A, B))^\alpha = &\ \{z \in supp(\mathcal{T}(A, B)) + supp(\mathcal{S}(A, B)) \mid \\
&\ \min(\mathcal{T}(A, B)^\alpha + \mathcal{S}(A, B)^\alpha) \leqslant z \leqslant \max(\mathcal{T}(A, B)^\alpha + \mathcal{S}(A, B)^\alpha)\} \\
= &\ \{z \in T(supp(A), supp(B)) + S(supp(A), supp(B)) \mid \\
&\ \min(T(A^\alpha, B^\alpha) + S(A^\alpha, B^\alpha)) \leqslant z \leqslant \max(T(A^\alpha, B^\alpha) + S(A^\alpha, B^\alpha))\} \\
= &\ \{z \in supp(A) + supp(B) \mid \\
&\ T(x_1^\alpha, y_1^\alpha) + S(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant T(x_p^\alpha, y_k^\alpha) + S(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\}.
\end{aligned}$$

Ara bé, com la parella (T, S) verifiquen l'equació de Frank,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}(A, B) \oplus \mathcal{S}(A, B))^\alpha &= \{z \in supp(A) + supp(B) \mid x_1^\alpha + y_1^\alpha \leqslant z \leqslant x_p^\alpha + y_k^\alpha\} \\
&= [x_1^\alpha + y_1^\alpha, x_p^\alpha + y_k^\alpha] \\
&= (A \oplus B)^\alpha \quad \text{per a tot } \alpha \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Recíprocament, suposem que $\mathcal{T}(A, B) \oplus \mathcal{S}(A, B) = A \oplus B$ per a tot $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Llavors, per a cada $a, b \in L_n$, tindrem que

$$\mathcal{T}(1_a, 1_b) \oplus \mathcal{S}(1_a, 1_b) = 1_a \oplus 1_b$$

Ara bé, és clar que per a cada nivell $\alpha \in [0, 1]$ es verifica que $(1_a \oplus 1_b)^\alpha = \{a + b\}$ i per tant $1_a \oplus 1_b = 1_{a+b}$. Per una altra part, sabem que $\mathcal{T}(1_a, 1_b) = 1_{T(a,b)}$ i $\mathcal{S}(1_a, 1_b) = 1_{S(a,b)}$.
Conseqüentment,

$$\mathcal{T}(1_a, 1_b) \oplus \mathcal{S}(1_a, 1_b) = 1_{T(a,b)} \oplus 1_{S(a,b)} = 1_{T(a,b)+S(a,b)} = 1_{a+b}$$

És a dir, $T(a, b) + S(a, b) = a + b$ per a tot $a, b \in L_n$. □

Nota 4.2.35. *Notem que en el teorema 4.2.34 hem exigit la suavitat de T i S per poder-les estendre a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. En canvi, en la proposició 2.1.23 no és necessari perquè la suavitat es dedueix de la satisfacció de la pròpia equació de Frank.*

En la propera secció estudiarem com estendre funcions d'agregació no suaus sobre L_n a funcions d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Amb els resultats que es veuran tindrem que la hipòtesis de suavitat del teorema 4.2.34 tampoc és necessària i que, en realitat, la suavitat de T i S es deriven de l'equació 4.7.

4.3 extensió de funcions d'agregació binàries (no suaus)

En aquesta secció volem estudiar si és possible construir funcions d'agregació sobre el reticle distributiu fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir de funcions d'agregació, no necessàriament suaus, definides sobre la cadena finita L_n. A més, s'aprofundirà en dos casos ben coneguts que seran els de les uninormes i els de les nulnormes. Per això, necessitam algunes definicions i consideracions prèvies.

Definició 4.3.1. *Una funció d'agregació n-ària definida sobre un conjunt fitat parcialment ordenat P, on 0 denotarà l'element mínim i 1 denotarà l'element màxim, és una funció $F : P^n \to P$ tal que és creixent en cada component i verifica a més que $F(0, \ldots, 0) = 0$ i $F(1, \ldots, 1) = 1$.*

És clar que, el nombre d'entrades que poden ser agregades pot ser diferent en cada cas. Per aquesta raó, habitualment les funcions d'agregació no estan definides a P^n, sinó a $\cup_{n \geqslant 1} P^n$ i aleshores, en aquest cas, reben el nom de *funcions d'agregació esteses*. Una manera senzilla de construir funcions d'agregació esteses és a partir de l'utilització de funcions d'agregació binàries associatives. Per això, a partir d'ara, l'objectiu del nostre estudi serà el cas binari, i en particular, els dos casos especials de funcions associatives anomenats uninormes i nulnormes.

En la secció 4.2 hem construït t-normes i t-conormes sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir de t-normes i t-conormes suaus definides sobre la cadena L_n. En aquest cas, utilitzarem un mètode de construcció semblant al presentat en el teorema 4.2.15, però fent una modificació dels conjunts de nivell proposats en aquest resultat. Sobre aquests conjunts de nivells cal destacar el següent:

Nota 4.3.2. *Quant una t-norma $T : L_n \times L_n \to L_n$ és suau, si consideram la seva extensió a $\mathcal{A}_1^{L_n}$, $\mathcal{T}$, tal com es proposa en el teorema 4.2.15, resulta que per a cada parella $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ el suport del nombre borrós discret $\mathcal{T}(A, B)$ assoleix tots els valors compresos entre $\min T(A^\alpha, B^\alpha)$ i $\max T(A^\alpha, B^\alpha)$, i així, els seus α-conjunts de nivell podem ser reescrits com*

$$\mathcal{T}(A, B)^\alpha = \{z \in L_n \mid \min T(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max T(A^\alpha, B^\alpha)\}.$$

Cal destacar que aquesta propietat no és certa si T no és suau (veure l'exemple de la nota 4.2.19).

Ara, volem procedir de manera semblant, però en aquest cas a partir de funcions d'agregació binàries F sobre L_n, no necessàriament suaus. D'acord a la nota 4.3.2 serà necessari modificar la definició dels α-conjunts de nivell per a construir la seva extensió $\mathcal{F}$. Així, en lloc d'agafar $z \in F(\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B))$ com es plantejava a la definició 4.2.1, ara necessitarem agafar els valors que satisfan la condició $z \in L_n$. [1]

Definició 4.3.3. *Sigui F una funció d'agregació binària sobre L_n, i considerem $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Per a cada $\alpha \in [0, 1]$ definim els conjunts*

$$C^\alpha_{F,A,B} = \{z \in L_n \mid \ \min F(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max F(A^\alpha, B^\alpha)\}.$$

Noteu que, a partir de la monotonia de l'aplicació binària discreta F, el conjunt $C^\alpha_{F,A,B}$ per a cada $\alpha \in [0, 1]$ pot ser escrit com

$$C^\alpha_{F,A,B} = \{z \in L_n \mid \ F(\min A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant F(\max A^\alpha, \max B^\alpha)\}.$$

Proposició 4.3.4. *Sigui F una funció d'agregació binària sobre L_n i considerem $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Aleshores existeix un únic nombre borrós discret que té per α-conjunts de nivell els conjunts $C^\alpha_{F,A,B}$, i que serà denotat per $\mathcal{F}(A, B)$. A més, $\mathcal{F}(A, B) \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.*

Demostració. Només necessitam provar que els conjunts $C^\alpha_{F,A,B}$ satisfan les quatre condicions del Teorema 3.2.2.

1. Per a cada $\alpha \in [0, 1]$, $C^\alpha_{F,A,B}$ és un conjunt finit no buit, perquè A^α i B^α són finits i no buits.

1 Per suposat, quant F és suau les dues expressions coincideixen també com en el cas de les t-normes suaus.

2. $C^{\beta}_{F,A,B} \subseteq C^{\alpha}_{F,A,B}$ per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.
   Suposem que $A^{\alpha}, A^{\beta}, B^{\alpha}, B^{\beta}$ són els següents subconjunt de nombres naturals consecutius

   $$A^{\alpha} = [x^{\alpha}_1, x^{\alpha}_p], \quad A^{\beta} = [x^{\beta}_1, x^{\beta}_r],$$
   $$B^{\alpha} = [y^{\alpha}_1, y^{\alpha}_k], \quad B^{\beta} = [y^{\beta}_1, y^{\beta}_l].$$

   Aleshores

   $$A^{\beta} \subseteq A^{\alpha} \text{ implica que } x^{\alpha}_1 \leqslant x^{\beta}_1 \text{ i } x^{\beta}_r \leqslant x^{\alpha}_p \tag{4.8}$$
   $$B^{\beta} \subseteq B^{\alpha} \text{ implica que } y^{\alpha}_1 \leqslant y^{\beta}_1 \text{ i } y^{\beta}_l \leqslant y^{\alpha}_k \tag{4.9}$$

   A més, d'acord amb la monotonia de la funció d'agregació F i de les relacions (4.8) i (4.9) obtenim:
   $$F(x^{\alpha}_1, y^{\alpha}_1) \leqslant F(x^{\beta}_1, y^{\beta}_1) \leqslant F(x^{\beta}_r, y^{\beta}_l) \leqslant F(x^{\alpha}_p, y^{\alpha}_k)$$

   Per tant, $C^{\beta}_{F,A,B} \subseteq C^{\alpha}_{F,A,B}$.

3. Emprant la mateixa notació que abans, si $x \in C^{\alpha}_{F,A,B} - C^{\beta}_{F,A,B}$ aleshores $x \in L$ i x no pertany a $C^{\beta}_{F,A,B}$. Així o $x < F(x^{\beta}_1, y^{\beta}_1)$, que és el mínim de $C^{\beta}_{F,A,B}$, o $x > F(x^{\beta}_r, y^{\beta}_l)$, que és el màxim de $C^{\beta}_{F,A,B}$.

4. Com $A, B \in \mathcal{A}^{L_n}_1$, segons el teorema 3.2.2, per a cada $\alpha \in (0,1]$ existeixen nombres reals α'_1 i α'_2 amb $0 < \alpha'_1 < \alpha$ i $0 < \alpha'_2 < \alpha$ tals que per a cada $r \in [\alpha'_1, \alpha]$, $A^{\alpha} = A^{r}$. A més $B^{\alpha} = B^{r}$, per a cada $r \in [\alpha'_2, \alpha]$. Per tant, si $\alpha' = \alpha'_1 \vee \alpha'_2$, obtenim:

   $$\min(A^r) = \min(A^{\alpha}) \text{ i } \max(A^r) = \max(A^{\alpha})$$
   $$\min(B^r) = \min(B^{\alpha}) \text{ i } \max(B^r) = \max(B^{\alpha})$$

   per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$. Aleshores,

   $$F(\min(A^r), \min(B^r)) = F(\min(A^{\alpha}), \min(B^{\alpha}))$$
   $$F(\max(A^r), \max(B^r)) = F(\max(A^{\alpha}), \max(B^{\alpha}))$$

   Així,

   $$\begin{aligned} C^{\alpha}_{F,A,B} &= \{z \in L_n \mid F(\min(A^{\alpha}), \min(B^{\alpha})) \leqslant z \leqslant F(\max(A^{\alpha}), \max(B^{\alpha}))\} \\ &= \{z \in L_n \mid F(\min(A^{r}), \min(B^{r})) \leqslant z \leqslant F(\max(A^{r}), \max(B^{r}))\} \\ &= C^{r}_{F,A,B} \end{aligned}$$

   per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$.

Com els conjunts $C^{\alpha}_{F,A,B}$ verifiquen, per a cada $\alpha \in [0,1]$, les condicions establertes en el teorema 3.2.2, existeix un únic nombre borrós discret, que serà denotat per $\mathcal{F}(A,B)$, tal que els tindrà per α-conjunts de nivell.

A més, és evident que els conjunts $C^{\alpha}_{F,A,B}$ són conjunts de nombres naturals consecutius. Per tant, $\mathcal{F}(A,B) \in \mathcal{A}^{L_n}_1$. □

La proposició anterior ens permet definir una operació binària $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{A}^{L_n}_1$ a partir d'una funció d'agregació binària F definida sobre la cadena finita L_n.

Definició 4.3.5. *Sigui* F *una funció d'agregació binària definida sobre la cadena finita* L_n*. L'operació binària sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *definida com*

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A, B) &\longmapsto \mathcal{F}(A, B)\end{aligned}$$

serà anomenada extensió de la funció d'agregació discreta F sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$, *on* $\mathcal{F}(A, B)$ *és el nombre borrós discret que té per* α*-conjunts de nivell els conjunts*

$$\{z \in L_n \mid \min F(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max F(A^\alpha, B^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

Ara volem provar que la funció $\mathcal{F}$ definida abans és de fet, una funció d'agregació sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Proposició 4.3.6. *Sigui* $\mathcal{F} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} \to \mathcal{A}_1^{L_n}$ *l'extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *de la funció d'agregació discreta* F *definida* L_n*. Siguin* 1_0 *i* 1_n *el mínim i el màxim del reticle* $\mathcal{A}_1^{L_n}$*, respectivament. Aleshores, es verifiquen les següents propietats:*

1. $\mathcal{F}$ *és creixent en cada component*
2. $\mathcal{F}(1_0, 1_0) = 1_0$
3. $\mathcal{F}(1_n, 1_n) = 1_n$.

Demostració. Només demostrarem la primera i segona propietat, perquè la darrera és totalment similar a la segona.

1. Volem provar que $\mathcal{F}$ és una aplicació creixent, i.e., per a cada $A, B, C \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ tals que $B \preceq C$ (on $\preceq$ és l'ordre parcial considerat en la nota 3.2.25) aleshores $\mathcal{F}(A, B) \preceq \mathcal{F}(A, C)$. És a dir,

$$\min(\mathcal{F}(A, B), \mathcal{F}(A, C)) = \mathcal{F}(A, B). \tag{4.10}$$

Suposem ara que els α-conjunts de nivell $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$ venen donats per

$$A^\alpha = [x_1^\alpha, x_p^\alpha], \quad B^\alpha = [y_1^\alpha, y_k^\alpha], \quad C^\alpha = [w_1^\alpha, w_l^\alpha].$$

Llavors demostrar la relació (4.10) és equivalent a veure que

$$\min(\mathcal{F}(A, B), \mathcal{F}(A, C))^\alpha = \mathcal{F}(A, B)^\alpha \text{ per a tot} \alpha \in [0, 1],$$

on

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A, B)^\alpha &= \{z \in L_n \mid F(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant z \leqslant F(x_p^\alpha, y_k^\alpha)\}\\ \mathcal{F}(A, C)^\alpha &= \{z \in L_n \mid F(x_1^\alpha, w_1^\alpha) \leqslant z \leqslant F(x_p^\alpha, w_l^\alpha)\}\end{aligned}$$

Com $B \preceq C$ és cert que

$$\min(B, C)^\alpha = B^\alpha, \text{ és a dir , } y_1^\alpha \leqslant w_1^\alpha \text{ i } y_k^\alpha \leqslant w_l^\alpha$$

per a tot $\alpha \in [0, 1]$. Emprant aquestes darreres relacions i la monotonia d' F, obtenim que

$$F(x_1^\alpha, y_1^\alpha) \leqslant F(x_1^\alpha, w_1^\alpha) \text{ i } F(x_p^\alpha, y_k^\alpha) \leqslant F(x_p^\alpha, w_l^\alpha).$$

A partir d'aquestes desigualtats es deriva immediatament que

$$\min(\mathcal{F}(A, B), \mathcal{F}(A, C))^\alpha = \mathcal{F}(A, B)^\alpha \text{ per a tot } \alpha \in [0, 1].$$

2. És fàcil veure que $\mathcal{F}(1_0, 1_0) = 1_0$ perquè

$$\mathcal{F}(1_0, 1_O)^\alpha = \{z \in L_n \mid F(0,0) \leqslant z \leqslant F(0,0)\} = \{0\} = 1_0^\alpha$$

per a tot $\alpha \in [0,1]$.

□

Per tant, donada una funció d'agregació binària F sobre L_n, la seva extensió $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ també és una funció d'agregació binària sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. A més ara veurem que quan restringim aquesta extensió a nombres crisp de $\mathcal{A}_1^{L_n}$, la funció $\mathcal{F}$ coincideix amb la funció original F i el mateix passa en el subreticle $\mathbb{B}$.

Proposició 4.3.7. *Sigui $F : L_n \times L_n \to L_n$ una funció d'agregació sobre L_n i sigui $\mathcal{F}$ la seva extensió sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Aleshores es verifiquen les següents propietats:*

- $\mathcal{F}(1_a, 1_b) = 1_{F(a,b)}$ *per a tots $a, b \in L_n$.*
- $\mathcal{F}(A, B) \in \mathbb{B}$ *per a tots nombres borrosos discrets $A, B \in \mathbb{B}$.*

Demostració. Totalment anàloga a la demostració de l'apartat segon del teorema 4.2.8. □

Proposició 4.3.8. *Sigui $\mathcal{F} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} \to \mathcal{A}_1^{L_n}$ l'extensió de la funció d'agregació F definida sobre L_n. Aleshores,*

1. *$\mathcal{F}$ és una funció d'agregació commutativa si i només si ho és F.*
2. *$\mathcal{F}$ és una funció d'agregació associativa si i només si ho és F.*

Demostració. Similar a la demostració donada en el teorema 4.2.8. Recordem que els recíprocs són conseqüència immediata de la proposició 4.3.7. □

Teorema 4.3.9. *Sigui $\mathcal{F} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} \to \mathcal{A}_1^{L_n}$ l'extensió de la funció d'agregació F sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Aleshores, es verifiquen les següents propietats:*

1. *e és l'element neutre de F si i només si 1_e és l'element neutre de $\mathcal{F}$. (És a dir, $\mathcal{F}(A, 1_e) = \mathcal{F}(1_e, A) = A$ per a tot $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$).*
2. *k és l'element absorbent de F si i només si 1_k és l'element absorbent de $\mathcal{F}$. (És a dir, $\mathcal{F}(A, 1_k) = \mathcal{F}(1_k, A) = 1_k$ per a tot $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.*
3. *$\mathcal{F}$ és idempotent si i només si ho és F).*

Demostració. Considerem $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$,

1. Si e és l'element neutre de F aleshores $\mathcal{F}(A, 1_e) = A$ perquè

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A, 1_e)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min F(A^\alpha, 1_e^\alpha) \leqslant z \leqslant \max F(A^\alpha, 1_e^\alpha)\}\\ &= \{z \in L_n \mid F(\min A^\alpha, e) \leqslant z \leqslant F(\max A^\alpha, e)\}\\ &= \{z \in L_n \mid \min A^\alpha \leqslant z \leqslant \max A^\alpha\}\\ &= A^\alpha\end{aligned}$$

per a tot $\alpha \in [0,1]$.

Recíprocament, si 1_e és l'element neutre de $\mathcal{F}$, aleshores per a tot $a \in L_n$ tenim que $\mathcal{F}(1_a, 1_e) = 1_a$ i el resultat es deriva de la proposició 4.3.7.

2. Anàlogament a l'ítem anterior.

3. Si F és una funció d'agregació idempotent tenim que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A,A)^{\alpha} &= \{z \in L_n \mid \min F(A^{\alpha},A^{\alpha}) \leqslant z \leqslant \max F(A^{\alpha},A^{\alpha})\}\\ &= \{z \in L_n \mid \min A^{\alpha} \leqslant z \leqslant \max A^{\alpha}\}\\ &= A^{\alpha} \quad \text{per a tot } \alpha \in [0,1] \ \text{ i } A \in \mathcal{A}_1^{L_n}.\end{aligned}$$

   Per tant $\mathcal{F}(A,A) = A$ per a tot $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ i $\mathcal{F}$ és idempotent. El recíproc és també una conseqüència de la proposició 4.3.7.

□

És ben conegut que les uninormes i les nulnormes són dos casos molt importants de funcions d'agregació binàries sobre L_n. Ara utilitzant els resultats obtinguts en aquesta secció proposarem un mètode que permetrà construir uninormes i nulnormes sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

4.3.1 *Agregacions basades en uninormes*

En aquesta secció tractarem un dels casos més rellevants de funcions d'agregació discreta, com són les uninormes.

Definició 4.3.10. *Sigui U una uninorma discreta definida sobre la cadena finita L_n. L'aplicació binària sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ definida com*

$$\begin{aligned}\mathcal{U} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{U}(A,B)\end{aligned}$$

serà anomenada l'extensió de la uninorma discreta U a $\mathcal{A}_1^{L_n}$, *on $\mathcal{U}(A,B)$ representa el nombre borrós discret que té per α-conjunts de nivell els conjunts*

$$\{z \in L_n \mid \ \min U(A^{\alpha},B^{\alpha}) \leqslant z \leqslant \max U(A^{\alpha},B^{\alpha})\}$$

per a cada $\alpha \in [0,1]$.

El següent teorema demostra que l'anterior aplicació binària és una uninorma sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Per tant per a cada uninorma discreta U sobre L_n, la seva extensió $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ satisfà les condicions de ser una uninorma.

Teorema 4.3.11. *Sigui U una uninorma discreta sobre L_n on $e \in L$ representa l'element neutre i sigui*

$$\begin{aligned}\mathcal{U} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{U}(A,B)\end{aligned}$$

l'extensió de U en $\mathcal{A}_1^{L_n}$, construïda d'acord a la definició 4.3.10. Aleshores, $\mathcal{U}$ és una uninorma sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ amb element neutre 1_e. A més, U és una uninorma idempotent si i només si ho és la seva extensió $\mathcal{U}$.

Demostració. Immediata a partir dels resultats anteriors. □

Nota 4.3.12. *En particular, cal destacar que t-normes sobre L_n produeixen t-normes sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ i que t-conormes sobre L_n generen t-conormes sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Per tant, no només t-normes i t-conormes suaus sobre L_n poden ser esteses sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ (tal com hem presentat en el teorema 4.2.15 i nota 4.2.16), sinó també qualsevol t-norma i t-conorma discreta, no necessàriament suau.*

Exemple 4.3.13. *Considerem la uninorma idempotent discreta [55] (veure també l'exemple 2.2.6)*

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{si} \;\; y \leqslant 6-x \\ \max(x,y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

definida sobre la cadena finita $L_6 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ *i* $A = \{0.3/0, 0.5/1, 1/2, 0.3/3\}$, $B = \{0.3/2, 0.5/3, 1/4, 0.8/5\} \in \mathcal{A}_1^{L_6}$.

Aleshores, $\mathcal{U}(A,B) = \{0.3/0, 0.5/1, 1/2, 0.8/3, 0.8/4, 0.8/5\}$.

Cal destacar que, com U *és idempotent, també ho és* $\mathcal{U}$. *Així, per exemple,* $\mathcal{U}(A,A) = A$ *i* $\mathcal{U}(B,B) = B$. *Els nombres borrosos discrets* $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_6}$ *es poden veure a les figures 23 i 24. Per altra banda, la seva agregació es pot veure a la figura 25.*

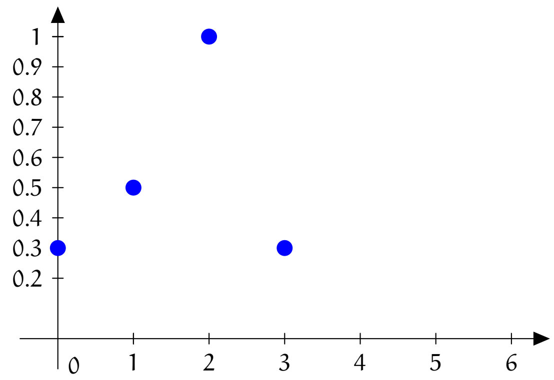

Figura 23: El nombre borrós discret $A \in \mathcal{A}_1^{L_6}$ de l'exemple 4.3.13

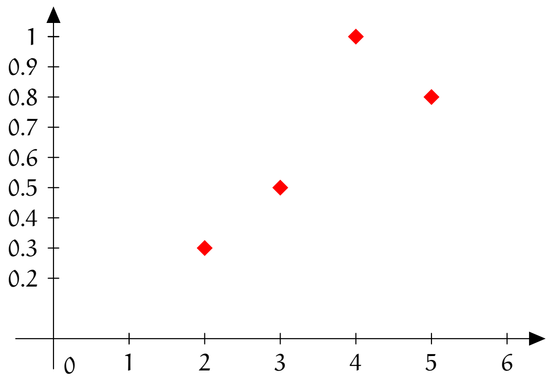

Figura 24: El nombre borrós discret $B \in \mathcal{A}_1^{L_6}$ de l'exemple 4.3.13

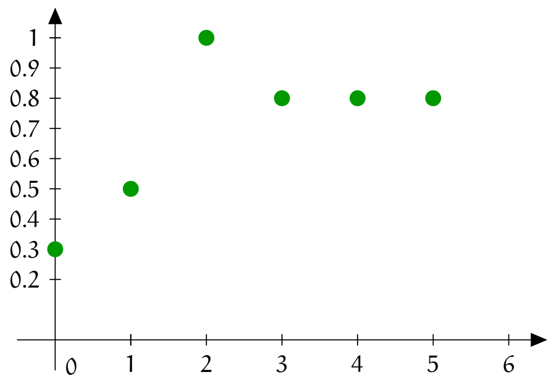

Figura 25: L'agregació $\mathcal{U}(A,B)$ de l'exemple 4.3.13

El que veurem ara és si l'extensió $\mathcal{U}$ conserva les principals propietats de la uninorma U. Per això:

Lema 4.3.14. *Sigui* U *una uninorma sobre la cadena finita* L_n *amb* e *com element neutre. Aleshores,*

(1) *Per a cada* $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ *es verifica* $A \preceq 1_e$ *si i només si* $\operatorname{supp}(A) \subseteq [0,e]$.

(II) *Per a cada* $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ *es verifica* $1_e \preceq A$ *si i només si* $\mathrm{supp}(A) \subseteq [e, n]$.

Demostració. Sigui $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ un nombre borrós discret. D'acord amb la nota 3.2.25 sabem que,

(I) $A \preceq 1_e$ si i només si $\min(A^\alpha, 1_e^\alpha) = A^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0,1]$ si i només si $\min(x, e) = x$ per a tot $x \in \mathrm{supp}(A)$ si i només si $\mathrm{supp}(A) \subseteq [0, e]$.

(II) $1_e \preceq A$ si i només si $\min(A^\alpha, 1_e^\alpha) = 1_e^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0,1]$ si i només si $\min(x, e) = e$ per a tot $x \in \mathrm{supp}(A)$ si i només si $\mathrm{supp}(A) \subseteq [e, n]$.

□

Proposició 4.3.15. *Sigui* U *una uninorma sobre la cadena finita* L_n*. La seva extensió*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A, B) &\longmapsto \mathcal{U}(A, B) \end{aligned}$$

satisfà:

1. $\mathcal{U}(A, 1_n) = 1_n$ *per a tot* $A \succeq 1_e$ *i* $\mathcal{U}(A, 1_0) = 1_0$ *per a tot* $A \preceq 1_e$
2. $\mathcal{U}(1_0, 1_n) \in \{1_0, 1_n\}$*. De fet,* $\mathcal{U}(1_0, 1_n) = 1_{U(0,n)}$

on 1_n *i* 1_0 *denoten el màxim i el mínim del reticle distributiu fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *respectivament.*

Demostració. El primer item és conseqüència del creixement de $\mathcal{U}$ i del fet que $\mathcal{U}(1_e, 1_n) = 1_n$.

El segon item és conseqüència de la proposició 4.3.7 (recordam que el mínim i el màxim element coincideixen amb els elements 1_0 i 1_n, respectivament). □

Ara volem veure com l'estructura de les uninormes de $U_{\min}$ i $U_{\max}$ donades en les definicions 2.2.3 i 2.2.4 és conservada parcialment.

Proposició 4.3.16. *Considerem la uninorma de* $U_{\min}$

$$U(x, y) = \begin{cases} T(x, y) & \text{si } (x, y) \in [0, e]^2 \\ S(x, y) & \text{si } (x, y) \in [e, n]^2 \\ \min(x, y) & \text{altre cas} \end{cases}$$

sobre L_n *amb element neutre* $0 < e < n$*, sent* T *una t-norma sobre l'interval* $[0, e]$ *i* S *una t-conorma sobre l'interval* $[e, n]$ *qualsevol. Sigui* $\mathcal{U}$ *l'extensió de* U *en* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *d'acord a la definició 4.3.10. Aleshores*

(I) *Si* $A, B \preceq 1_e$ *aleshores* $\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{T}(A, B)$ *on* $\mathcal{T}$ *és l'extensió de* T *en* $\mathcal{A}_1^{[0,e]}$.

(II) *Si* $A, B \succeq 1_e$ *aleshores* $\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{S}(A, B)$ *on* $\mathcal{S}$ *és l'extensió de* S *en* $\mathcal{A}_1^{[e,n]}$.

(III) *Si* $A \preceq 1_e \preceq B$ *aleshores* $\mathcal{U}(A, B) = \min(A, B) = A$.

Demostració. Considerem $\mathcal{U}$ l'extensió a $\mathcal{A}_1^{L_n}$ de la uninorma discreta U.

(i) Suposem que $A, B \preceq 1_e$. Per demostrar que $\mathcal{U}(A,B) = \mathcal{T}(A,B)$ basta veure que es verifica que $\mathcal{U}(A,B)^\alpha = \mathcal{T}(A,B)^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0,1]$. D'acord amb la definició 4.3.10,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(A,B)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min U(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max U(A^\alpha, B^\alpha)\}\\ &= \{z \in L_n \mid U(\min A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant U(\max A^\alpha, \max B^\alpha)\}\end{aligned}$$

Com $A, B \preceq 1_e$, aplicant el lema 4.3.14, tenim que $\mathrm{supp}(A), \mathrm{supp}(B) \subseteq [0,e]$ i així

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(A,B)^\alpha &= \{z \in L_n \mid T(\min A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant T(\max A^\alpha, \max B^\alpha)\}\\ &= \{z \in L_n \mid \min T(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max T(A^\alpha, B^\alpha)\}\\ &= \mathcal{T}(A,B)^\alpha \quad \text{per a tot } \alpha \in [0,1] \text{ i } A, B \in \mathcal{A}_1^{[0,e]}.\end{aligned}$$

(ii) Similar a l'ítem anterior.

(iii) Suposem ara que $A \preceq 1_e \preceq B$. Per demostrar que $\mathcal{U}(A,B) = \min(A,B)$ només cal veure que $\mathcal{U}(A,B)^\alpha = \min(A,B)^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0,1]$. D'acord amb la definició 4.3.10,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(A,B)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min U(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max U(A^\alpha, B^\alpha)\}\\ &= \{z \in L_n \mid U(\min A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant U(\max A^\alpha, \max B^\alpha)\}\end{aligned}$$

Aplicant el lema 4.3.14, com $A \preceq 1_e \preceq B$ tenim que $\mathrm{supp}(A) \subseteq [0,e]$ i $\mathrm{supp}(B) \subseteq [e,n]$. Així, la uninorma U ve donada per la funció mínim en tots el punts (x,y) amb $x \in \mathrm{supp}(A)$ i $y \in \mathrm{supp}(B)$. Conseqüentment,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(A,B)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min(\min A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant \min(\max A^\alpha, \max B^\alpha)\}\\ &= \{z \in L_n \mid \min(\min(A,B)^\alpha) \leqslant z \leqslant \max(\min(A,B)^\alpha)\}\\ &= \min(A,B)^\alpha \quad \text{per a tot } \alpha \in [0,1] \; A \in \mathcal{A}_1^{[0,e]} \text{ i } B \in \mathcal{A}_1^{[e,n]}.\end{aligned}$$

□

Anàlogament es té un resultat semblant per a les uninormes en $U_{\max}$,

Proposició 4.3.17. *Considerem una uninorma de* $U_{\max}$

$$U(x,y) = \begin{cases} T(x,y) & si \;\; (x,y) \in [0,e]^2 \\ S(x,y) & si \;\; (x,y) \in [e,n]^2 \\ \max(x,y) & cas\ contrari \end{cases}$$

sobre L_n *amb element neutre* $0 < e < n$*, sent* T *una t-norma sobre l'interval* $[0,e]$ *i* S *una t-conorma sobre l'interval* $[e,n]$ *qualsevol. Sigui* $\mathcal{U}$ *l'extensió de* U *en* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *d'acord a la definició 4.3.10.*

(i) *Si* $A, B \preceq 1_e$ *aleshores* $\mathcal{U}(A,B) = \mathcal{T}(A,B)$ *on* $\mathcal{T}$ *és l'extensió de* T *en* $\mathcal{A}_1^{[0,e]}$.

(ii) *Si* $A, B \succeq 1_e$ *aleshores* $\mathcal{U}(A,B) = \mathcal{S}(A,B)$ *on* $\mathcal{S}$ *és l'extensió de* S *en* $\mathcal{A}_1^{[e,n]}$.

(iii) *Si* $A \preceq 1_e \preceq B$ *aleshores* $\mathcal{U}(A,B) = \max(A,B) = B$.

Nota 4.3.18. *Cal destacar que els dos teoremes previs no donen una estructura completa de les uninormes sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *que són extensions d'uninormes en* $U_{\min}$ *i* $U_{\max}$ *sobre* L_n*. La causa és que l'ordre que es dona en el reticle* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *no és total, és a dir, existeixen elements* $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ *que no són comparables amb* 1_e *(aquells que el seu suport no està contingut ni en l'interval* $[0,e]$ *ni en l'interval* $[e,n]$ *segons el lema 4.3.14). Així, si* A *és un d'aquests elements, només l'expressió general de* $\mathcal{U}(A,B)$ *donada per la definició 4.3.10 funciona.*

Exemple 4.3.19. *Considerem la cadena finita* $L_5 = \{0,1,2,3,4,5\}$, *els nombres borrosos discrets* $A = \{0.2/0, 0.3/1, 0.5/2, 1/3, 0.8/4, 0.8/5\}$, $B = \{0.1/1, 0.7/2, 0.8/3, 1/4, 0.6/5\}$ *i la uninorma discreta*

$$U(x,y) = \begin{cases} \max(0, x+y-3) & \textit{si} \;\; (x,y) \in [0,3]^2 \\ \min(5, x+y-3) & \textit{si} \;\; (x,y) \in [3,5]^2 \\ \min(x,y) & \textit{cas contrari} \end{cases}$$

Aleshores

$$\mathcal{U}(A,B) = \{0.3/0, 0.5/1, 0.7/2, 0.8/3, 1/4, 0.8/5\}.$$

Notau que la t-norma definida com una component de U *és la t-norma de Łukasiewicz* T_L *sobre l'interval* $[0,3]$. *Així, pels nombres borrosos discrets* $A_0 = \{0.2/0, 1/1, 0.8/2\}$ *i* $B_0 = \{0.6/1, 1/2, 0.7/3\}$ *es té d'acord a la proposició 4.3.16 que* $\mathcal{U}(A_0, B_0) = \mathcal{T}_L(A_0, B_0) = \{1/0, 0.8/1, 0.7/2\}$, *on* $\mathcal{T}_L$ *denota l'extensió de la t-norma de Łukasiewicz* T_L *sobre* $[0,3]$ *a* $\mathcal{A}_1^{[0,3]}$.

4.3.2 *Agregacions borroses basades en nulnormes*

En aquesta secció estudiarem el cas de l'extensió sobre el reticle borrós $\mathcal{A}_1^{L_n}$ de nulnormes definides sobre una cadena finita L_n, que com és ben conegut [97] representen un altre important cas de funcions d'agregació.

Definició 4.3.20. *Sigui* F *una nulnorma definida sobre la cadena finita* L_n. *L'operació binària definida sobre el reticle* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *de la següent manera*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{F}(A,B) \end{aligned}$$

serà anomenada l'extensió de la nulnorma discreta F en $\mathcal{A}_1^{L_n}$, *essent* $\mathcal{F}(A,B)$ *el nombre borrós discret que té per* α*-nivells els conjunts*

$$\{z \in L_n \mid \min F(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max F(A^\alpha, B^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0,1]$.

El següent teorema prova que, en efecte, aquesta nova aplicació binària satisfà les condicions de nulnorma sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Teorema 4.3.21. *Sigui* F *una nulnorma discreta sobre* L_n *amb* $k \in L_n$ *com element absorbent i sigui*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{F}(A,B) \end{aligned}$$

l'extensió de F *en* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Aleshores* $\mathcal{F}$ *és una nulnorma sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *que té per element absorbent el nombre borrós discret* 1_k.

Demostració. És immediata a partir dels resultats anteriors. □

Similarment al cas de les uninormes, podem veure fàcilment que l'estructura de les nulnormes discretes [97] és conserva parcialment quan consideram la seva extensió sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Així,

Proposició 4.3.22. *Sigui* F *una nulnorma sobre* L_n *amb element absorbent* k *i* T *i* S *la corresponent t-norma i t-conorma que la representen. Aleshores, la seva extensió* $\mathcal{F}$ *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *verifica les següents propietats:*

(i) *Si* $A, B \preceq 1_k$ *aleshores* $\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{S}(A, B)$ *on* $\mathcal{S}$ *és l'extensió en* $\mathcal{A}_1^{[0,e]}$ *de la t-conorma* S.

(ii) *Si* $A, B \succeq 1_k$ *aleshores* $\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{T}(A, B)$ *on* $\mathcal{T}$ *és l'extensió en* $\mathcal{A}_1^{[e,n]}$ *de la t-norma* T.

(iii) *Si* $A \preceq 1_k \preceq B$ *aleshores* $\mathcal{U}(A, B) = 1_k$.

Demostració. És similar a la demostració donada a la proposició 4.3.16. □

Nota 4.3.23. *Anàlogament com en el cas de les uninormes en* U_{min} *i* U_{max}, *els resultats anteriors no donen una completa caracterització de l'estructura de les nulnormes en* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *que són extensions de nulnormes sobre la cadena finita* L_n. *Els elements* $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ *que no són comparables amb* 1_k *(d'acord al lema 4.3.14, és el cas de qualsevol nombre borrós discret* $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ *que verifiqui que el seu suport no està contingut ni en* $[0, k]$ *ni en* $[k, n]$*), no estan considerats en aquesta proposició, i per això per aquests tipus només l'expressió de* $F(A, B)$ *donada en la definició 4.3.20 funciona.*

Nota 4.3.24. *En el cas de les uninormes sabem que no n'hi ha de suaus a tot* L_n, *llevat de les pròpies t-normes i t-conormes. Per tant, si* $0 < e < n$ *l'extensió d'una uninorma amb neutre* e *és l'extensió d'una agregació no suau. Per contra, en el cas de nulnormes tenim que una nulnorma* F *sobre* L_n *amb element absorbent* k *(amb* $0 < k < n$*) és suau si i només si ho són la t-norma* T *i la t-conorma* S *subjacents.*

Exemple 4.3.25. *Considerem la nulnorma discreta* F *definida sobre la cadena finita* L_6

$$F(x,y) = \begin{cases} \min(x+y, 3) & \text{si } (x,y) \in [0,3]^2 \\ \max(3, x+y-6) & \text{si } (x,y) \in [3,6]^2 \\ 3 & \text{altre cas} \end{cases}$$

Siguin $A = \{0.3/0, 0.5/1, 1/2, 0.3/3\}, B = \{0.3/2, 0.5/3, 1/4, 0.8/5\} \in \mathcal{A}_1^{L_6}$.
Aleshores $\mathcal{F}(A, B) = \{0.3/2, 1/3\}$.

4.4 agregacions definides per parelles de funcions d'agregació

En aquesta secció volem investigar si és possible construir funcions d'agregació sobre el reticle fitat distributiu $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir d'una parella de funcions d'agregació definides sobre la cadena finita L_n. En particular, es desenvoluparan els casos de parelles d'uninormes i nulnormes. Veurem que, considerant parelles de funcions d'agregació F, G sobre L_n amb $F \leqslant G$, podem generar una funció d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que serà compensatòria entre $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$, les extensions de F i G a $\mathcal{A}_1^{L_n}$ respectivament.

Nota 4.4.1. *Recordem que en les seccions anteriors (veure seccions 4.3.1 i 4.3.2) ja s'ha plantejat l'estudi de funcions d'agregació sobre el reticle fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *a partir de funcions d'agregació definides sobre la cadena finita* L_n.

Ara procedirem de manera similar a les seccions 4.3.1 i 4.3.2 abans esmentades, però en aquest cas emprant parelles de funcions binàries F i G definides sobre la cadena finita L_n verificant la condició $F \leqslant G$.

Definició 4.4.2. *Sigui* F *i* G *una parella de funcions d'agregació definides sobre la cadena finita* L_n *verificant* $F \leqslant G$, *i considerem dos nombres borrosos discrets* $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. *Definim per a cada* $\alpha \in [0, 1]$ *els conjunts*

$$C^{\alpha}_{F,G}(A, B) = \{z \in L_n \mid \min F(A^{\alpha}, B^{\alpha}) \leqslant z \leqslant \max G(A^{\alpha}, B^{\alpha})\} \tag{4.11}$$

Cal comentar que per la monotonia de les funcions d'agregació F i G, el conjunt $C^{\alpha}_{F,G}(A,B)$ pot ser escrit, com sempre, com

$$C^{\alpha}_{F,G}(A,B) = \{z \in L_n \mid F(\min A^{\alpha}, \min B^{\alpha}) \leqslant z \leqslant G(\max A^{\alpha}, \max B^{\alpha})\}$$

per a cada $\alpha \in [0,1]$.

Proposició 4.4.3. *Siguin $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$, F i G una parella de funcions d'agregació binàries definides sobre L_n amb $F \leqslant G$. Existeix un únic nombre borrós discret que té per α-conjunts de nivell els conjunts $C^{\alpha}_{F,G}(A,B)$ (definits abans en la definició 4.4.2), que serà denotat per $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)$. A més, $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B) \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.*

Demostració. Només provarem que aquests conjunts $C^{\alpha}_{F,G}(A,B)$ satisfan les 4 condicions del teorema 3.2.2.

1. Per a cada $\alpha \in [0,1]$, el conjunt $C^{\alpha}_{F,G}(A,B)$ és un conjunt finit no buit perquè el nivell A^{α} i B^{α} són ambdós finits i no buits (recordem que els nombres borrosos discrets són subconjunts borrosos normals).

2. $C^{\beta}_{F,G}(A,B) \subseteq C^{\alpha}_{F,G}(A,B)$ per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.
   Suposem que $A^{\alpha}, A^{\beta}, B^{\alpha}, B^{\beta}$ venen donats per els següents conjunts de nombres naturals consecutius:

$$\begin{aligned} A^{\alpha} &= [x_1^{\alpha}, x_p^{\alpha}], \quad & A^{\beta} &= [x_1^{\beta}, x_r^{\beta}], \\ B^{\alpha} &= [y_1^{\alpha}, y_k^{\alpha}], \quad & B^{\beta} &= [y_1^{\beta}, y_l^{\beta}]. \end{aligned}$$

   Aleshores

$$A^{\beta} \subseteq A^{\alpha} \text{ implica } x_1^{\alpha} \leqslant x_1^{\beta} \text{ i } x_r^{\beta} \leqslant x_p^{\alpha} \tag{4.12}$$
$$B^{\beta} \subseteq B^{\alpha} \text{ implica } y_1^{\alpha} \leqslant y_1^{\beta} \text{ i } y_l^{\beta} \leqslant y_k^{\alpha} \tag{4.13}$$

   A més, d'acord a la monotonia de la funcions d'agregació F i G i a les relacions (4.12) i (4.13) obtenim:

$$F(x_1^{\alpha}, y_1^{\alpha}) \leqslant F(x_1^{\beta}, y_1^{\beta}) \leqslant G(x_r^{\beta}, y_l^{\beta}) \leqslant G(x_p^{\alpha}, y_k^{\alpha})$$

   Per tant, $C^{\beta}_{F,G}(A,B) \subseteq C^{\alpha}_{F,G}(A,B)$.

3. Emprant la mateixa notació que abans, si $x \in C^{\alpha}_{F,G}(A,B) - C^{\beta}_{F,G}(A,B)$ aleshores $x \in L$ i x no pertanyen a $C^{\beta}_{F,G}(A,B)$. Així, o bé $x < F(x_1^{\beta}, y_1^{\beta})$, que és el mínim del conjunt $C^{\beta}_{F,G}(A,B)$, o $x > G(x_r^{\beta}, y_l^{\beta})$, que és el màxim element del conjunt $C^{\beta}_{F,G}(A,B)$.

4. Com $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$, d'acord al teorema 3.2.2, per a cada $\alpha \in (0,1]$ existeixen nombres reals α'_1 i α'_2 amb $0 < \alpha'_1 < \alpha$ i $0 < \alpha'_2 < \alpha$ tals que per a cada $r \in [\alpha'_1, \alpha]$, $A^{\alpha} = A^r$. A més, $B^{\alpha} = B^r$, per a cada $r \in [\alpha'_2, \alpha]$. Llavors, si $\alpha' = \alpha'_1 \vee \alpha'_2$, obtenim per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$ les relacions,

$$\begin{aligned} F(\min(A^r), \min(B^r)) &= F(\min(A^{\alpha}), \min(B^{\alpha})) \qquad \text{i} \\ G(\max(A^r), \max(B^r)) &= G(\max(A^{\alpha}), \max(B^{\alpha})) \end{aligned}$$

   Per tant, $C^{\alpha}_{F,G}(A,B) = C^{r}_{F,G}(A,B)$ per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$.

Com el conjunts $C^{\alpha}_{F,G}(A,B)$ verifiquen per a cada $\alpha \in [0,1]$ les condicions proposades en el teorema 3.2.2, existeix un únic nombre borrós discret, que denotarem per $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)$, tal que els seus α-conjunts de nivell són exactament aquests conjunts.

Endemés, és clar que els conjunts $C^{\alpha}_{F,G}(A,B)$ són subconjunts de nombres naturals consecutius. Llavors, $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B) \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. □

La proposició anterior, ens permet definir una operació binària $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, a partir d'una parella de funcions d'agregació binàries F i G definides sobre la cadena finita L satisfent la condició $F \leqslant G$.

Definició 4.4.4. *Siguin* F, G *una parella de funcions d'agregació binàries sobre la cadena finita* L_n *verificant* $F \leqslant G$. *L'aplicació binària sobre el reticle* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *definida com*

$$\begin{aligned}[\mathcal{F},\mathcal{G}] : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A,B) &\longmapsto [\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)\end{aligned}$$

serà anomenada l'extensió en $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *de la parella de funcions d'agregació* F *i* G, *sent* $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)$ *el nombre borrós discret que té per* α*-conjunts de nivell els conjunts*

$$[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)^{\alpha} = \{z \in L_n \mid \min F(A^{\alpha},B^{\alpha}) \leqslant z \leqslant \max G(A^{\alpha},B^{\alpha})\}$$

per a cada $\alpha \in [0,1]$.

Ara demostrarem que la funció binària $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ definida abans, és de fet una funció d'agregació sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Primerament, a partir d'ara denotarem per $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)^{\alpha}$ els conjunts de nivell del nombre borrós discret $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)$ per a cada $\alpha \in [0,1]$.

Proposició 4.4.5. *Sigui* $[\mathcal{F},\mathcal{G}] : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} \to \mathcal{A}_1^{L_n}$ *l'extensió de les funcions d'agregació* F *i* G *definides sobre la cadena finita* L_n *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Siguin* 1_0 *i* 1_n *el nombres borrosos discrets que representen el mínim i el màxim del reticle* $\mathcal{A}_1^{L_n}$, *respectivament. Aleshores, es verifiquen les següents propietats*

1. $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ *és creixent en cada component*
2. $[\mathcal{F},\mathcal{G}](1_0,1_0) = 1_0$
3. $[\mathcal{F},\mathcal{G}](1_n,1_n) = 1_n$.

Demostració. Només demostrarem la primera i segona condició perquè la darrera és similar a la segona.

1. Ara, volem veure que $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ és una funció creixent, és a dir, per a cada $A,B,C \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ tals que $B \preceq C$ aleshores $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B) \preceq [\mathcal{F},\mathcal{G}](A,C)$. D'acord a la nota 3.2.25, bastará provar que

$$\min([\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B),[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,C))^{\alpha} = [\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)^{\alpha} \tag{4.14}$$

per a tot $\alpha \in [0,1]$. Suposem ara que $A^{\alpha}, B^{\alpha}, C^{\alpha}$ venen donats per $A^{\alpha} = [x_1^{\alpha}, x_p^{\alpha}], B^{\alpha} = [y_1^{\alpha}, y_k^{\alpha}], C^{\alpha} = [w_1^{\alpha}, w_l^{\alpha}]$. Com $B \preceq C$, $\min(B^{\alpha},C^{\alpha}) = B^{\alpha}$, és a dir, $y_1^{\alpha} \leqslant w_1^{\alpha}$ i $y_k^{\alpha} \leqslant w_l^{\alpha}$ per a tot $\alpha \in [0,1]$. Emprant aquestes darreres relacions i emprant el fet de que F i G són funcions monòtones, obtenim que

$$\begin{aligned} F(x_1^{\alpha},y_1^{\alpha}) &\leqslant F(x_1^{\alpha},w_1^{\alpha}) \quad \text{i}\\ G(x_p^{\alpha},y_k^{\alpha}) &\leqslant G(x_p^{\alpha},w_l^{\alpha}) \end{aligned}$$

A partir d'aquestes desigualtats la relació (4.14) es deriva directament.

2. És fàcil provar que $[\mathcal{F},\mathcal{G}](1_0,1_0)=1_0$ perquè

$$[\mathcal{F},\mathcal{G}](1_0,1_0)^\alpha=\{z\in L_n \mid F(0,0)\leqslant z\leqslant G(0,0)\}=\{0\}=1_0^\alpha$$

per a tot $\alpha\in[0,1]$.

□

Nota 4.4.6. *D'aquesta forma aplicant la proposició anterior, tenim que donada una parella de funcions d'agregació binàries F i G sobre una cadena finita L_n verificant $F\leqslant G$, la seva extensió $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ definida sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ és també una funció d'agregació en $\mathcal{A}_1^{L_n}$. A més, si $F=G$, és clar a partir de les definicions donades que $[\mathcal{F},\mathcal{F}]=\mathcal{F}$, és a dir, les extensions per parelles de funcions d'agregacions generalitzen l'original extensió de funcions d'agregació donades en les seccions 4.3.1 i 4.3.2.*

Endemés, en el cas general, l'extensió d'una parella de funcions d'agregació (F,G), $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$, sempre produeix una funció d'agregació compresa entre $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$, com es demostrarà en la següent proposició:

Proposició 4.4.7. *Siguin F,G una parella de funcions d'agregació sobre L_n amb $F\leqslant G$ i sigui $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ la seva extensió. Aleshores $\mathcal{F}\preceq[\mathcal{F},\mathcal{G}]\preceq\mathcal{G}$, és a dir, $\mathcal{F}(A,B)\preceq[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)\preceq\mathcal{G}(A,B)$ per a tot $A,B\in\mathcal{A}_1^{L_n}$.*

Demostració. Considerem $A,B\in\mathcal{A}_1^{L_n}$ on els seus α-conjunts de nivell A^α,B^α venen donats respectivament per $A^\alpha=[x_1^\alpha,x_p^\alpha]$ i $B^\alpha=[y_1^\alpha,y_k^\alpha]$. Per tant, d'acord a la nota 3.2.25, demostrar el resultat és equivalent a provar que

$$\mathcal{F}(A,B)^\alpha\leqslant[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)^\alpha\leqslant\mathcal{G}(A,B)^\alpha \tag{4.15}$$

per a tot $\alpha\in[0,1]$, on

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A,B)^\alpha&=\{z\in L_n \mid F(x_1^\alpha,y_1^\alpha)\leqslant z\leqslant F(x_p^\alpha,y_k^\alpha)\}\\ [\mathcal{F},\mathcal{G}](A,B)^\alpha&=\{z\in L_n \mid F(x_1^\alpha,y_1^\alpha)\leqslant z\leqslant G(x_p^\alpha,y_k^\alpha)\}\\ \mathcal{G}(A,B)^\alpha&=\{z\in L_n \mid G(x_1^\alpha,y_1^\alpha)\leqslant z\leqslant G(x_p^\alpha,y_k^\alpha)\}\end{aligned}$$

Ara, com $F\leqslant G$ tenim que $F(x_1^\alpha,y_1^\alpha)\leqslant G(x_1^\alpha,y_1^\alpha)$ i $F(x_p^\alpha,y_k^\alpha)\leqslant G(x_p^\alpha,y_k^\alpha)$ per a tot $\alpha\in[0,1]$. Així, a partir d'aquestes desigualtats la relació (4.15) és deriva immediatament. □

Proposició 4.4.8. *Siguin F i G una parella de funcions d'agregació sobre L_n verificant $F\leqslant G$. Quant es restringeix la funció d'agregació $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ a números crisp de $\mathcal{A}_1^L$, diguem 1_a i 1_b amb $a,b\in L_n$, s'obtenen nombres borrosos discrets que tenen per α-conjunt de nivell l'interval de la cadena finita L_n, $[F(a,b),G(a,b)]$ per a tot $\alpha\in[0,1]$.*

Demostració. En efecte,

$$\begin{aligned}[\mathcal{F},\mathcal{G}](1_a,1_b)^\alpha&=\{z\in L_n \mid F(\min 1_a,\min 1_b)\leqslant z\leqslant G(\max 1_a,\max 1_b)\}\\ &=\{z\in L_n \mid F(a,b)\leqslant z\leqslant G(a,b)\}\\ &=[F(a,b),G(a,b)]\end{aligned}$$

per a tot $\alpha\in[0,1]$. □

Proposició 4.4.9. *Sigui $[\mathcal{F},\mathcal{G}]:\mathcal{A}_1^{L_n}\times\mathcal{A}_1^{L_n}\to\mathcal{A}_1^{L_n}$ l'extensió de la parella de funcions d'agregació F i G definides sobre L_n. Aleshores es verifiquen les següents propietats:*

1. *$[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ és una funció commutativa si i només si ho són F i G.*

2. *$[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ és una funció associativa si i només si ho són F i G.*

Demostració. Suposem que F i G són funcions commutatives (associatives). Aleshores seguint un raonament semblant al teorema 4.2.8 es demostra la propietat.

El recíproc d'aquesta proposició és conseqüència immediata de la proposició 4.4.8. $\square$

Teorema 4.4.10. *Sigui $[\mathcal{F},\mathcal{G}] : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} \to \mathcal{A}_1^{L_n}$ l'extensió a $\mathcal{A}_1^{L_n}$ de la parella de funcions d'agregació F i G amb $F \leqslant G$. Aleshores es verifiquen les següents propietats:*

1. *$[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ té element neutre 1_e si i només si F i G ambdues tenen per element neutre $e \in L_n$.*
2. *$[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ té element absorbent 1_k (és a dir, $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,1_k) = [\mathcal{F},\mathcal{G}](1_k,A) = 1_k$ per a tot $A \in \mathcal{A}_1^{L}$) si i només si F i G ambdues tenen per element absorbent $k \in L_n$.*
3. *$[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ és idempotent si i només si F i G ho són.*

Demostració. Considerem $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$,

1. Si e és l'element comú de la parella F i G aleshores $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,1_e) = A$ perquè
$$\begin{aligned}[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,1_e)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min F(A^\alpha, 1_e^\alpha) \leqslant z \leqslant \max G(A^\alpha, 1_e^\alpha)\}\\ &= \{z \in L_n \mid F(\min A^\alpha, e) \leqslant z \leqslant G(\max A^\alpha, e)\}\\ &= \{z \in L_n \mid \min A^\alpha \leqslant z \leqslant \max A^\alpha\}\\ &= A^\alpha\end{aligned}$$
per a tot $\alpha \in [0,1]$.

   Recíprocament, si 1_e és l'element neutre de $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$, aleshores per a tot $a \in L_n$ tenim que $[\mathcal{F},\mathcal{G}](1_a,1_e) = 1_a$ i el resultat es deriva a partir de la proposició 4.4.8.
2. Anàlogament a l'apartat descrit abans.
3. Si F i G són funcions d'agregació idempotents tenim que
$$\begin{aligned}[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,A)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min F(A^\alpha, A^\alpha) \leqslant z \leqslant \max G(A^\alpha, A^\alpha)\}\\ &= \{z \in L_n \mid \min A^\alpha \leqslant z \leqslant \max A^\alpha\}\\ &= A^\alpha\end{aligned}$$
per a tot $\alpha \in [0,1]$ i $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Per tant $[\mathcal{F},\mathcal{G}](A,A) = A$ per a tot $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ i $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ és idempotent.

   El recíproc és també conseqüència de la proposició 4.4.8.

$\square$

En la següent secció nosaltres volem estudiar la construcció d'uninormes i de nulnormes sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$ construïdes a partir de parelles d'uninormes i de nulnormes definides sobre L_n.

Funcions d'agregació borroses basades en parelles d'uninormes discretes

Definició 4.4.11. *Considerem una parella d'uninormes U i U' sobre la cadena finita L_n que tenen per element neutre comú $e \in L_n$ i verifiquen la condició $U \leqslant U'$. L'aplicació binària $[\mathcal{U},\mathcal{U}']$ definida de la següent manera*
$$\begin{aligned}[\mathcal{U},\mathcal{U}'] : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A,B) &\longmapsto [\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)\end{aligned}$$
serà anomenada l'extensió de la parella d'uninormes discretes U i U' a $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

El següent resultat provarà que aquesta aplicació binària verifica les condicions de ser una uninorma sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Teorema 4.4.12. *Sigui* U *i* U' *una parella de funcions d'agregació sobre* L_n *verificant la condició* $U \leqslant U'$ *i que tenen l'element* $e \in L_n$ *com element neutre comú. Sigui*

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}, \mathcal{U}'] : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A, B) &\longmapsto [\mathcal{U}, \mathcal{U}'](A, B) \end{aligned}$$

l'extensió de la parella U *i* U' *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$*, definida d'acord a la definició 4.4.11. Aleshores,* $[\mathcal{U}, \mathcal{U}']$ *és una uninorma sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *que té per element neutre el nombre borrós discret* 1_e*. Endemés,* U *i* U' *són idempotents si i només si ho és la seva extensió* $[\mathcal{U}, \mathcal{U}']$.

Demostració. És immediata a partir dels resultats anteriors. □

Nota 4.4.13. *Cal destacar que, en particular, una parella de t-normes sobre* L_n *produeix una t-norma sobre* $\mathcal{A}_1^{L}$ *i que una parella de t-conormes sobre* L_n *produeix una t-conorma sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$*, casos corresponents a que* $e = 1$ *i* $e = 0$ *respectivament.*

Exemple 4.4.14. *Considerem les uninormes idempotents [55]*

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & si \;\; y \leqslant 6 - x \\ \max(x,y) & altrament \end{cases} \quad i \quad U'(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & si \;\; (x,y) \in [0,3]^2 \\ \max(x,y) & altrament \end{cases}$$

definides sobre la cadena finita L_6 *(És obvi que* $U \leqslant U'$ *per a tota parella* $(x,y) \in [0,6]^2$ *i que ambdues tenen neutre* $e = 3$*).*

Considerem, $A = \{0.3/0, 0.5/1, 1/2, 0.3/3\}, B = \{0.3/2, 0.5/3, 1/4, 0.8/5\} \in \mathcal{A}_1^{L_6}$*. Aleshores,* $[\mathcal{U}, \mathcal{U}'](A, B) = \{0.3/0, 0.5/1, 1/2, 1/3, 1/4, 0.8/5\}$.

Notem que, com U *i* U' *són uninormes idempotents sobre* L_6*, també ho és* $[\mathcal{U}, \mathcal{U}']$*. Així, per exemple,* $[\mathcal{U}, \mathcal{U}'](A, A) = A$ *i* $[\mathcal{U}, \mathcal{U}'](B, B) = B$.

Una generalització del lema 4.3.14 ens la proporciona el següent resultat:

Proposició 4.4.15. *Siguin* U *i* U' *una parella d'uninormes definides sobre la cadena* L_n *que tenen el mateix element neutre* $e \in L_n$ *i verificant la condició* $U \leqslant U'$*. Aleshores la seva extensió*

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}, \mathcal{U}'] : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A, B) &\longmapsto [\mathcal{U}, \mathcal{U}'](A, B) \end{aligned}$$

satisfà:

1. $[\mathcal{U}, \mathcal{U}'](A, 1_n) = 1_n$ *per a tot* $A \succeq 1_e$ *i* $[\mathcal{U}, \mathcal{U}'](A, 1_0) = 1_0$ *per a tot* $A \preceq 1_e$.
2. $[\mathcal{U}, \mathcal{U}'](1_0, 1_n) \in \{1_0, 1_n, \mathbb{L}\}$

on 1_n *i* 1_0 *denoten respectivament el màxim i el mínim element del reticle distributiu fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *i* $\mathbb{L}$ *és el nombre borrós discret tal que té per* α*-conjunts de nivell l'interval* $L = [0, n]$ *per a tot* $\alpha \in [0, 1]$.

Demostració. El primer item és clar a partir de la propietat de creixement de la uninorma $[\mathcal{U}, \mathcal{U}']$ i el segon item és conseqüència de la proposició 4.4.8.

Finalment, el cas $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](1_0,1_n)=\mathbb{L}$ és satisfà quan U,U' són uninormes conjuntives i disjuntives respectivament sobre la cadena L_n, ja que llavors, per a tot $\alpha\in[0,1]$, tendríem

$$\begin{aligned}[\mathcal{U},\mathcal{U}'](1_0,1_n) &= \{z\in L_n \mid \min\mathcal{U}(1_0^\alpha,1_n^\alpha)\leqslant z\leqslant \max\mathcal{U}'(1_0^\alpha,1_n^\alpha)\}\\ &= \{z\in L_n \mid U(0,n)\leqslant z\leqslant U'(0,n)\}\\ &= \mathbb{L}\end{aligned}$$

□

En les dues següents proposicions ens plantejam com és l'estructura de les uninormes sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$ construïdes d'acord a la definició 4.4.11, de manera semblant a l'estructura que tenen les uninormes discretes de U_{min} i de U_{max} (veure definicions 2.2.3 i 2.2.4).

Proposició 4.4.16. *Considerem les uninormes*

$$U(x,y)=\begin{cases}T(x,y) & si\ \ (x,y)\in[0,e]^2\\ S(x,y) & si\ \ (x,y)\in[e,n]^2\\ \min(x,y) & altrament\end{cases}\quad i\quad U'(x,y)=\begin{cases}T'(x,y) & si\ \ (x,y)\in[0,e]^2\\ S'(x,y) & si\ \ (x,y)\in[e,n]^2\\ \min(x,y) & altrament\end{cases}$$

sobre L_n amb element neutre $0<e<n$, sent $T\leqslant T'$ una parella de t-normes sobre $[0,e]$ i $S\leqslant S'$ una parella de t-conormes sobre $[e,n]$. Sigui $[\mathcal{U},\mathcal{U}']$ l'extensió de la parella de uninormes U i U' a $\mathcal{A}_1^{L_n}$ d'acord a la definició 4.4.11. Aleshores

(i) *Si $A,B\preceq 1_e$ llavors $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)=[\mathcal{T},\mathcal{T}'](A,B)$ on $[\mathcal{T},\mathcal{T}']$ és l'extensió de la parella de t-normes T i T' en $\mathcal{A}_1^{[0,e]}$ construïdes d'acord a la definició 4.4.11.*

(ii) *Si $A,B\succeq 1_e$ llavors $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)=[\mathcal{S},\mathcal{S}'](A,B)$ on $[\mathcal{S},\mathcal{S}']$ és l'extensió de la parella de t-conormes S i S' en $\mathcal{A}_1^{[e,n]}$ construïdes d'acord a la definició 4.4.11.*

(iii) *Si $A\preceq 1_e\preceq B$ llavors $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)=\min(A,B)=A$.*

Demostració. Considerem $[\mathcal{U},\mathcal{U}']$ l'extensió en $\mathcal{A}_1^{L_n}$ de la parella d'uninormes U i U'.

(i) Suposem que $A,B\preceq 1_e$. Per demostrar que $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)=[\mathcal{T},\mathcal{T}'](A,B)$ bastarà comprovar que $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)^\alpha=[\mathcal{T},\mathcal{T}'](A,B)^\alpha$ per a tot $\alpha\in[0,1]$. D'acord a la definició 4.4.11,

$$\begin{aligned}[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)^\alpha &= \{z\in L_n \mid \min U(A^\alpha,B^\alpha)\leqslant z\leqslant \max U'(A^\alpha,B^\alpha)\}\\ &= \{z\in L_n \mid U(\min A^\alpha,\min B^\alpha)\leqslant z\leqslant U'(\max A^\alpha,\max B^\alpha)\}\end{aligned}$$

(Com que $A,B\preceq 1_e$, d'acord al lema 4.3.14, tenim que $\operatorname{supp}(A),\operatorname{supp}(B)\subseteq[0,e]$ i així:

$$\begin{aligned}[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)^\alpha &= \{z\in L_n \mid T(\min A^\alpha,\min B^\alpha)\leqslant z\leqslant T'(\max A^\alpha,\max B^\alpha)\}\\ &= \{z\in L_n \mid \min T(A^\alpha,B^\alpha)\leqslant z\leqslant \max T'(A^\alpha,B^\alpha)\}\\ &= [\mathcal{T},\mathcal{T}'](A,B)^\alpha\end{aligned}$$

per a tot $\alpha\in[0,1]$ i $A,B\in\mathcal{A}_1^{[0,e]}$.

(II) Similar a l'ítem anterior.

(III) Suposem que $A \preceq 1_e \preceq B$. Demostrar $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B) = A$ és equivalent a veure que $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)^\alpha = A^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0,1]$. D'acord a la definició 4.4.11,

$$\begin{aligned}[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min U(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max U'(A^\alpha, B^\alpha)\} \\ &= \{z \in L_n \mid U(\min A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant U'(\max A^\alpha, \max B^\alpha)\}\end{aligned}$$

D'acord al lema 4.3.14, com $A \preceq 1_e \preceq B$ tenim que $\operatorname{supp}(A) \subseteq [0,e]$ i $\operatorname{supp}(B) \subseteq [e,n]$. Per tant, les uninormes U i U' venen donades per el mínim en tots el punts (x,y) amb $x \in \operatorname{supp}(A)$ i $y \in \operatorname{supp}(B)$. Conseqüentment,

$$\begin{aligned}[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min(\min A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant \min(\max A^\alpha, \max B^\alpha)\} \\ &= \{z \in L_n \mid \min A^\alpha \leqslant z \leqslant \max A^\alpha\} \\ &= A^\alpha\end{aligned}$$

per a tot $\alpha \in [0,1]$, $A \in \mathcal{A}_1^{[0,e]}$ i $B \in \mathcal{A}_1^{[e,n]}$.

□

Anàlogament,

Proposició 4.4.17. *Considerem les uninormes*

$$U(x,y) = \begin{cases} T(x,y) & si \ (x,y) \in [0,e]^2 \\ S(x,y) & si \ (x,y) \in [e,n]^2 \\ \max(x,y) & altrament \end{cases} \quad i \quad U'(x,y) = \begin{cases} T'(x,y) & si \ (x,y) \in [0,e]^2 \\ S'(x,y) & si \ (x,y) \in [e,n]^2 \\ \max(x,y) & altrament \end{cases}$$

sobre L_n amb element neutre $0 < e < n$, sent $T \leqslant T'$ t-normes sobre $[0,e]$ i $S \leqslant S'$ t-conormes sobre $[e,n]$. Sigui $[\mathcal{U},\mathcal{U}']$ l'extensió de la parella U i U' en $\mathcal{A}_1^{L_n}$ d'acord a la definició 4.4.11. Llavors

(I) *Si $A, B \preceq 1_e$ aleshores $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B) = [\mathcal{T},\mathcal{T}'](A,B)$ on $[\mathcal{T},\mathcal{T}']$ és l'extensió de la parella de t-normes T i T' en $\mathcal{A}_1^{[0,e]}$.*

(II) *Si $A, B \succeq 1_e$ aleshores $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B) = [\mathcal{S},\mathcal{S}'](A,B)$ on $[\mathcal{S},\mathcal{S}']$ és l'extensió de la parella de t-conormes S i S' en $\mathcal{A}_1^{[e,n]}$.*

(III) *Si $A \preceq 1_e \preceq B$ aleshores $\mathcal{U}(A,B) = \mathrm{MAX}(A,B) = B$.*

Nota 4.4.18. *Cal destacar que les proposicions anteriors no donen una completa estructura de les uninormes sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que són extensions de uninormes en U_{min} i U_{max} sobre L_n. Com l'ordre definit sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ no és total, existeixen elements $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ que no són comparables amb 1_e (aquells que el seu suport no està contingut ni en $[0,e]$ ni en $[e,n]$ d'acord al lema 4.3.14). Per tant, si A o B és un d'aquests elements només l'expressió general $\mathcal{U}(A,B)$ donada en la definició 4.4.11 funciona.*

Exemple 4.4.19. *Considerem la cadena finita L_5, el nombres borrosos discrets*

$$\begin{aligned} A &= \{0.2/0, 0.3/1, 0.5/2, 1/3, 0.8/4, 0.8/5\} \\ B &= \{0.1/1, 0.7/2, 0.8/3, 1/4, 0.6/5\} \end{aligned}$$

i les uninormes discretes

$$U(x,y)=\begin{cases}\max(0,x+y-3) & \textit{si}\ \ (x,y)\in[0,3]^2\\ \min(5,x+y-3) & \textit{si}\ \ (x,y)\in[3,5]^2\\ \min(x,y) & \textit{altrament}\end{cases}\quad i \quad U'(x,y)=\begin{cases}\min(x,y) & \textit{si}\ \ (x,y)\in[0,3]^2\\ \max(x,y) & \textit{altrament}\end{cases}$$

Aleshores $[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A,B)=\{0.3/0,0.5/1,0.7/2,0.7/3,1/4,0.8/5\}$.

Notem que la corresponent t-norma de U *és la t-norma de Łukasiewicz* T_L *sobre* $[0,3]$ *i la correspo-nent t-conorma sobre* $[0,3]$ *de* U' *és la t-norma mínim ,*$\min(x,y)$*. Així, per* $A_0=\{0.2/0,1/1,0.8/2\}$ *i* $B_0=\{0.6/1,1/2,0.7/3\}$ *tenim d'acord a la proposició 4.4.16 que*

$$[\mathcal{U},\mathcal{U}'](A_0,B_0)=[\mathcal{T}_{\mathcal{L}},\min](A_0,B_0)=\{1/0,1/1,0.8/2\}$$

on $[\mathcal{T}_{\mathcal{L}},\min]$ *denota l'extensió de la parella formada per la t-norma de Łukasiewicz i la t-norma mínim, definides sobre* $[0,3]$ *a* $\mathcal{A}_1^{[0,3]}$.

Funcions d'agregació borroses basades en parelles de nulnormes discretes

Definició 4.4.20. *Considerem la parella de nulnormes* F *i* F' *definides sobre la cadena finita* L_n*, verificant que* $F\leqslant F'$ *i que ambdós tenen el mateix element absorbent. L'operació binària sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *definida de la següent manera*

$$\begin{aligned}[\mathcal{F},\mathcal{F}']:\mathcal{A}_1^{L_n}\times\mathcal{A}_1^{L_n}&\longrightarrow\mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A,B)&\longmapsto[\mathcal{F},\mathcal{F}'](A,B)\end{aligned}$$

serà anomenada l'extensió de la parella de nulnormes discretes F i F' en $\mathcal{A}_1^{L_n}$*, sent* $[\mathcal{F},\mathcal{F}'](A,B)$ *el nombre borrós discret que té per* α*-conjunts de nivell el conjunts*

$$\{z\in L_n\mid\ \min F(A^\alpha,B^\alpha)\leqslant z\leqslant\max F'(A^\alpha,B^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha\in[0,1]$.

Teorema 4.4.21. *Siguin* F *i* F' *una parella de nulnormes definides sobre la cadena finita* L_n*, que tenen ambdues per element absorbent* $k\in L_n$ *i verifiquen que* $F\leqslant F'$*. I, sigui*

$$\begin{aligned}[\mathcal{F},\mathcal{F}']:\mathcal{A}_1^{L_n}\times\mathcal{A}_1^{L_n}&\longrightarrow\mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A,B)&\longmapsto[\mathcal{F},\mathcal{F}'](A,B)\end{aligned}$$

l'extensió de la parella F *i* F' *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$*. Aleshores* $[\mathcal{F},\mathcal{F}']$ *és una nulnorma sobre el reticle* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *amb element absorbent* 1_k.

Demostració. És evident a partir dels resultats anteriors. □

Similarment al cas de les uninormes, podem veure que es preserva part de l'estructura de les extensions de les nulnormes.

Proposició 4.4.22. *Siguin* F *i* F *una parella de nulnormes sobre la cadena* L_n *que tenen per element absorbent el valor* k*, i que verifiquen a més, la condició* $F\leqslant F'$*. Aleshores, la seva extensió* $[\mathcal{F},\mathcal{F}']$ *en* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *satisfà les següents propietats:*

(1) *Si* $A,B\preceq 1_k$ *aleshores* $[\mathcal{F},\mathcal{F}'](A,B)=[\mathcal{S},\mathcal{S}'](A,B)$ *on* $[\mathcal{S},\mathcal{S}']$ *és l'extensió en* $\mathcal{A}_1^{[0,e]}$ *de la parella de t-conormes* S *i* S'.

(II) *Si* $A, B \succeq 1_k$ *aleshores* $[\mathcal{F}, \mathcal{F}'](A, B) = [\mathcal{T}, \mathcal{T}'](A, B)$ *on* $[\mathcal{T}, \mathcal{T}']$ *és l'extensió en* $\mathcal{A}_1^{[e,n]}$ *de la parella de t-normes* T *i* T'.

(III) *Si* $A \preceq 1_k \preceq B$ *aleshores* $[\mathcal{F}, \mathcal{F}'](A, B) = 1_k$.

Demostració. Similar a la demostració de la proposició 4.4.16. □

Exemple 4.4.23. *Considerem les nulnormes discretes definides sobre la cadena* L_6

$$F(x,y) = \begin{cases} \min(x+y,3) & si\ \ (x,y) \in [0,3]^2 \\ \max(3, x+y-6) & si\ \ (x,y) \in [3,6]^2 \\ 3 & altrament \end{cases}$$

$$F'(x,y) = \begin{cases} \min(x+y,3) & si\ \ (x,y) \in [0,3]^2 \\ \min(x,y) & si\ \ (x,y) \in [3,6]^2 \\ 3 & altrament \end{cases}$$

Considerem els nombres borrosos discrets de $\mathcal{A}_1^{L_6}$ *donats per* $A = \{0.3/0, 0.5/1, 1/2, 0.3/3\}$ *i* $B = \{0.3/2, 0.5/3, 1/4, 0.8/5\}$.

Aleshores un senzill càlcul prova que $[\mathcal{F}, \mathcal{F}'](A, B) = \{1/3\}$.

4.5 EXTENSIÓ DE FUNCIONS D'AGREGACIÓ N-DIMENSIONALS

Fins ara hem estudiat només funcions d'agregació binàries associatives sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, que desprès es poden estendre a un caràcter multidimensional via l'associativitat. Ara bé, amb la propietat associativa assumida, les possibles funcions d'agregació difícilment són compensatòries, és a dir, prenen valors entre el mínim i el màxim dels valors agregats. De fet, de totes les estudiades només les uninormes i nulnormes idempotents ho són. Recordem que, per a funcions monòtones, la propietat compensatòria i la propietat idempotent són equivalents.

Així, en aquest apartat ens interessa trobar funcions d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ de tipus compensatori i, en aquest cas, ho farem diredctament per a funcions n-dimensionals. Començarem però pel cas general de funcions d'agregació sobre el conjunt de nombres borrosos discrets DFN.

4.5.1 *Funcions d'agregació n-dimensionals sobre* DFN

No existeixen molts de treballs en els que s'estudien possibles funcions d'agregació sobre el conjunt de nombres borrosos. Podríem destacar simplement el treball de Mayor et al. [104] on es proposa utilitzar el principi d'extensió de Zadeh a tal efecte. La idea és construir, a partir d'una funció d'agregació n-dimensional, F, una altra $\mathcal{F}$ definida sobre el conjunt de nombres borrosos, que conservi, en particular, les propietats de monotonia i que s'exigeixen a la funció numèrica de partida.

Concretament, els resultats obtinguts són els següents:

Definició 4.5.1. *[104] Sigui* $(L, \leqslant)$ *un reticle i* $f : L^n \to L$ *una funció. Direm que* f *és una funció d'agregació n-dimensional és idempotent o compensativa si verifica:*

i. f *és idempotent:* $f(a, \overset{n}{\ldots}, a) = a$ *per a tot* $a \in L$

ii. f *és creixent respecte a l'ordre producte de* L^n*, és a dir, si* $x_i \leqslant y_i$*, per a tot* $i = 1, \ldots, n$*, aleshores* $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(y_1, \ldots, y_n)$

La següent proposició demostra que el principi d'extensió de Zadeh transforma funcions d'agregació n-dimensionals continues sobre $\mathbb{R}$ en funcions d'agregació n-dimensionals sobre el reticle dels nombres borrosos.

Proposició 4.5.2. *[104] Siguin* $A_1, \ldots, A_n \in FN$ *números borrosos amb paràmetres* (a_1, b_1, c_1, d_1) $, \cdots, (a_n, b_n, c_n, d_n)$*, respectivament, i* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funció contínua i estrictament creixent. Sigui* F *la funció induïda per* f *, a partir del principi d'extensió de Zadeh. Llavors* F *verifica que* $F(A_1, \cdots, A_n)$ *és un nombre borrós i, per tant,* $F : FN^n \to FN$*, està ben definida.*

A més,

Proposició 4.5.3. *[104] Siguin* $A_1, \ldots, A_n \in FN$ *números borrosos amb paràmetres* (a_1, b_1, c_1, d_1)*,* $\ldots, (a_n, b_n, c_n, d_n)$*, respectivament, i* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funció contínua i estrictament creixent. Aleshores, els* α*-conjunts de nivell del nombre borrós* $A = F(A_1, \ldots, A_n)$ *venen donats per:*

$$A^\alpha = f(A_1^\alpha, \ldots, A_n^\alpha) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x_1, \ldots, x_n), \text{on } x_i \in A_i^\alpha, i = 1, \ldots, n\}$$

La primera idea per a construir funcions d'agregació n-dimensionals sobre el conjunt de nombres borrosos discrets seria emprar un mètode semblant al proposat en les proposicions 4.5.2-4.5.3 a partir del principi d'extensió. Però, en general, aquest falla com es pot observar en el següent exemple:

Exemple 4.5.4. *Siguin* $A = \{0.3/1, 1/2, 0.5/3\}$ *i* $B = \{0.4/4, 1/5, 0.8/6\}$ *dos nombres borrosos discrets. Sigui* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funció d'agregació donada per l'expressió* $f(x_1, x_2) = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$ *amb* $\omega_1 + \omega_2 = 1$*. Així, si agafam com a pesos* $\omega_1 = \frac{1}{4}$ *i* $\omega_2 = \frac{3}{4}$ *resulta el següent subconjunt borrós* $F(A, B)$ *donat per*

$$\begin{aligned} F(A, B) = \omega_1 A + \omega_2 B = \; & \{0.3/3.25, 0.4/3.5, 0.4/3.75, 0.3/4, 1/4.25, \\ & 0.5/4.5, 0.3/4.75, 0.8/5, 0.5/5.25\} \end{aligned}$$

que no satisfà les condicions imposades en la definició 3.2.1 de nombre borrós discret. Aquest fet es pot observar en el següent gràfic:

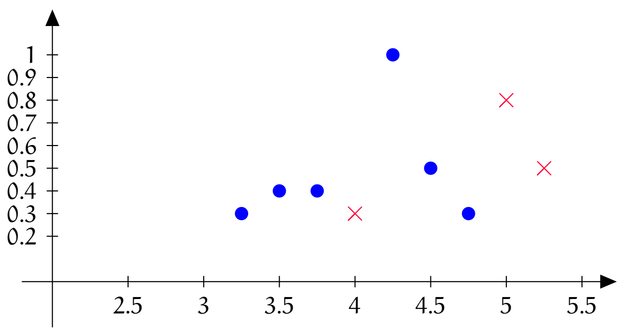

Figura 26: El subconjunt borrós $F(A, B) = \omega_1 A + \omega_2 B$ de l'exemple 4.5.4 no verifica les condicions de nombre borrós discret. Els punts amb una creu vermella mostren que el creixement i el decreixement que s'imposa en la definició 3.2.1 es perd.

Per evitar aquest problema,, intentem construir una funció borrosa en DFN que pugui ser interpretada com una mitjana ponderada borrosa d'un conjunt finit de nombres borrosos discrets. Ho farem seguin la idea introduïda en el capítol 3.

Proposició 4.5.5. *Considerem un vector normal de pesos* $w = (w_1, \cdots, w_n)$ *i una família finita de nombres borrosos discrets* $A_1, \cdots, A_n \in \mathrm{DFN}$. *Existeix un únic nombre borrós discret* W *que té per* α*-conjunts de nivells els conjunts* $[w_1 \cdot A_1 \oplus \cdots \oplus w_n \cdot A_n]^\alpha$ *definits com*

$$\begin{aligned}[w_1 \cdot A_1 \oplus \cdots \oplus w_n \cdot A_n]^\alpha = \; & \{z \in (\mathrm{supp}(w_1 \cdot A_1) + \cdots + \mathrm{supp}(w_n \cdot A_n)) \mid \\ & \min(w_1 \cdot A_1^\alpha + \cdots + w_n \cdot A_n^\alpha) \\ & \leqslant z \leqslant \max(w_1 \cdot A_1^\alpha + \cdots + w_n \cdot A_n^\alpha)\}\end{aligned} \tag{4.16}$$

sent

$$\begin{aligned}\min(w_1 \cdot A_1^\alpha + \cdots + w_n \cdot A_n^\alpha) &= \min\{x_1 + \cdots + x_n \mid x_i \in \mathrm{supp}(w_i \cdot A_i), i = 1, \cdots, n\} \\ \max(w_1 \cdot A_1^\alpha + \cdots + w_n \cdot A_n^\alpha) &= \max\{x_1 + \cdots + x_n \mid x_i \in \mathrm{supp}(w_i \cdot A_i), i = 1, \cdots, n\}\end{aligned}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

Demostració. Senzilla a partir del teorema de representació de nombres borrosos discrets 3.2.2. □

Ara aplicant la proposició 4.5.5 volem veure si és possible definir a partir d'una mitjana aritmètica ponderada sobre $\mathbb{R}^n$, $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i$ (on $(w_1, \cdots, w_n)$ és un vector de pesos normalitzat) una mitjana aritmètica ponderada sobre el conjunt de nombres borrosos discrets. Per això,

Definició 4.5.6. *Considerem la funció d'agregació sobre* $\mathbb{R}^n$, *donada per l'expressió*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i$$

(on $(w_1, \cdots, w_n)$ *és un vector de pesos normalitzat). La funció n-ària definida sobre el conjunt* DFN,

$$\begin{aligned} W : \mathrm{DFN}^n &\longrightarrow \mathrm{DFN} \\ (A_1, \cdots, A_n) &\longmapsto W(A_1, \cdots, A_n)\end{aligned}$$

serà anomenada mitjana ponderada borrosa discreta, *sent* $W(A_1, \cdots, A_n)$ *el nombre borrós discret construït d'acord a la proposició 4.5.5.*

Nota 4.5.7. *Gràcies a la proposició 4.5.5, la funció* W *està ben definida. A més a més, com que* $f(x, \cdots, x) = \sum_{i=1}^n x \cdot w_i = x \cdot \sum_{i=1}^n w_i = x$ *(perquè* $(w_1, \cdots, w_n)$ *és un vector de pesos normalitzat) aleshores* $W(A, \cdots, A) = A$ *per a tot vector de pesos normalitzat sobre* $\mathbb{R}^n$ *i qualsevol* $A \in \mathrm{DFN}$.

Exemple 4.5.8. *Siguin* $A = \{0.3/1, 1/2, 0.5/3\}$ *i* $B = \{0.4/4, 1/5, 0.8/6\}$ *els números borrosos discrets emprats en l'exemple 4.5.4. Sigui* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *la funció d'agregació donada per l'expressió* $f(x_1, x_2) = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$ *amb* $\omega_1 + \omega_2 = 1$. *Aleshores, si* $\omega_1 = \frac{1}{4}$ *i* $\omega_2 = \frac{3}{4}$ *obtenim*

$$W(A, B) = \{0.3/3.25, 0.4/3.5, 0.4/3.75, 0.4/4, 1/4.25, 0.8/4.5, 0.8/4.75, 0.8/5, 0.5/5.25\}$$

El nombre $W(A, B)$ *es pot veure en la figura 27.*

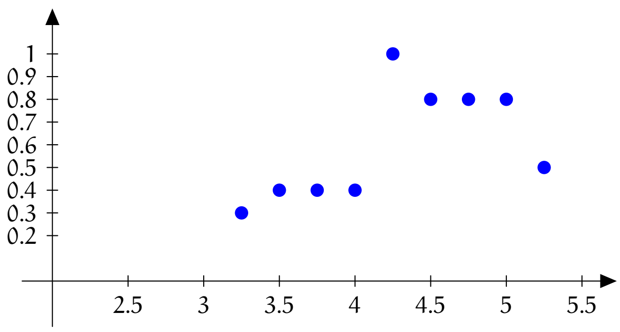

Figura 27: Mitjana ponderada borrosa discreta de A i B corresponent a l'exemple 4.5.8

4.5.2 *Funcions d'agregació r-dimensionals sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$*

Volem tornar ara a nombres borrosos discrets del reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, és a dir, amb suport un subinterval de L_n qualsevol. Recordem primer la següent definició.

Definició 4.5.9. *[91] Una funció creixent $m : L_n^r \to L_n$ tal que verifica la condició $\min(x_1, \cdots, x_r) \leqslant m(x_1, \cdots, x_r) \leqslant \max(x_1, \cdots, x_r)$ per a tot $(x_1, \cdots, x_r) \in L_n^r$ serà anomenada mitjana r-dimensional sobre L_n.*

Nota 4.5.10. *[91] Donada la monotonia de les funcions mitjanes sobre L_n aquestes poden ser caracteritzades per la seva idempotència, és a dir, una funció creixent $m : L_n^r \to L_n$ és una funció mitjana si i només si verifica la propietat $m(x, \cdots, x) = x$ per a tot $x \in L_n$.*

Nota 4.5.11. *Volem fer notar que:*

i. *Si f és una funció mitjana suau aleshores $f(L_n^r) = L_n$, sent*

$$f(L_n^r) = \{x \in L_n \mid x = f(x_1, \cdots, x_r) \text{ amb } x_i \in L, i = 1, \cdots, r\}$$

ii. *Considerem el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$ i sigui $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Denotem per A^α els seus α-conjunts de nivell. Si f és una funció mitjana r-dimensional aleshores $\max f(A^\alpha, \cdots, A^\alpha) = \max A^\alpha$ i $\min f(A^\alpha, \cdots, A^\alpha) = \min A^\alpha$, on $f(A^\alpha, \cdots, A^\alpha) = \{z \in L_n \mid z = f(a_1, \cdots, a_r) \text{ amb } a_i \in A^\alpha, i = 1, \cdots, r\}$.*

Ara volem veure que a partir d'una mitjana r-dimensional definida sobre la cadena finita L_n, és possible construir una funció mitjana r-dimensional sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Teorema 4.5.12. *Sigui $m : L_n^r \to L_n$ una funció mitjana r-dimensional suau. Aleshores, la funció*

$$\begin{aligned} M : [\mathcal{A}_1^{L_n}]^r &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A_1, \cdots, A_r) &\longmapsto M(A_1, \cdots, A_r) \end{aligned}$$

on $M(A_1, \cdots, A_r)$ és el nombre borrós discret que te per α-conjunts de nivells el conjunts

$$M(A_1, \cdots, A_r)^\alpha = \{z \in L \mid \min m(A_1^\alpha, \cdots, A_r^\alpha) \leqslant z \leqslant \max m(A_1^\alpha, \cdots, A_r^\alpha)\}$$

és una funció creixent tal que

$$\min(A_1, \cdots, A_r) \preceq M(A_1, \cdots, A_r) \preceq \max(A_1, \cdots, A_r)$$

Demostració. D'acord a la nota 3.2.25, $A \preceq B$ si i només si $\min(A, B)^\alpha = A^\alpha$ o equivalentment, $A \preceq B$ si i només si $\max(A, B)^\alpha = B^\alpha$. Per tant, si $A_i \preceq B_i$ per a tot $i = 1, \cdots, r$ aleshores $\min A_i^\alpha \leqslant \min B_i^\alpha$ i $\max A_i^\alpha \leqslant \max B_i^\alpha$. Ara, tenint en compte la monotononia de la funció mitjana r-dimensional m es verifiquen les següents relacions

$$\begin{aligned} \min m(A_1^\alpha, \cdots, A_r^\alpha) = & \ m(\min A_1^\alpha, \cdots, \min A_r^\alpha) \\ \leqslant & \ m(\min B_1^\alpha, \cdots, \min B_r^\alpha) \\ = & \ \min m(B_1^\alpha, \cdots, B_r^\alpha) \end{aligned}$$

per a tot $\alpha \in [0, 1]$. Anàlogament podem veure la mateixa desigualtat pels màxims. Així, emprant les darreres desigualtats és evident que $M(A_1, \cdots, A_r) \preceq M(B_1, \cdots, B_r)$, és a dir, M és una funció creixent.

Ara, volem provar que

$$\min(A_1, \cdots, A_r) \preceq M(A_1, \cdots, A_r)$$

Com m és una mitjana r-dimensional, aquestes desigualtats

$$\min(x_1, \cdots, x_r) \leqslant m(x_1, \cdots, x_r) \leqslant \max(x_1, \cdots, x_r)$$

es satisfan per a tot $x_1, \cdots, x_r \in L_n$. Com a conseqüència,

$$\min(\min(A_1^\alpha, \cdots, A_r^\alpha)) \leqslant \min(m(A_1^\alpha, \cdots, A_r^\alpha))$$

$$\max(\min(A_1^\alpha, \cdots, A_r^\alpha)) \leqslant \max(m(A_1^\alpha, \cdots, A_r^\alpha))$$

i llavors

$$\min(A_1, \cdots, A_r)^\alpha \preceq M(A_1, \cdots, A_r)^\alpha$$

per a tot $\alpha \in [0, 1]$, és a dir ,

$$\min(A_1, \cdots, A_r) \preceq M(A_1, \cdots, A_r)$$

La demostració de l'altre desigualtat és similar. □

A partir de la proposició anterior, es pot definir el següent:

Definició 4.5.13. *Sigui m una funció mitjana suau r-dimensional sobre L_n. La funció*

$$\begin{aligned} M : [\mathcal{A}_1^{L_n}]^r & \longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A_1, \cdots, A_r) & \longmapsto M(A_1, \cdots, A_r) \end{aligned}$$

on $M(A_1, \cdots, A_r)$ és el nombre borrós discret que té per α-conjunts de nivell el conjunts

$$M(A_1, \cdots, A_r)^\alpha = \{z \in L \mid \min m(A_1^\alpha, \cdots, A_r^\alpha) \leqslant z \leqslant \max m(A_1^\alpha, \cdots, A_r^\alpha)\}$$

serà anomenada mitjana n-dimensional generada sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ per la funció m.

Tal i com el seu nom indica, gràcies al teorema 4.5.12, M és una mitjana r-dimensional sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$, ja que és creixent i pren valors entre el mínim i el màxim.

Nota 4.5.14. *Pel fet de ser M una funció d'agregació compensatòria, és també idempotent i per tant $M(A, \cdots, A) = A$ per a tot $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.*

D'aquesta manera hem obtingut noves funcions d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ compensatòries que són susceptibles de ser emprades en les diferents aplicacions que exposarem en el proper capítol 6.

5 FUNCIONS D'IMPLICACIONS EN EL CONJUNTS DE NOMBRES BORROSOS DISCRETS

Les funcions d'implicació en la lògica borrosa, han estat estudiades com a extensions de les funcions d'implicacions de la lògica clàssica. Les dues més esteses són les (S,N)-implicacions que neixen de la generalització del condicional clàssic "$p \to q \equiv \neg p \vee q$" i s'escriuen com

$$I_{S,N}(x,y) = S(N(x),y) \qquad \text{per a tots} \quad x,y \in [0,1]$$

on S habitualment és una t-conorma i N és una negació forta, i les R-implicacions o implicacions residuades que provenen de la teoria de reticles residuats i que s'escriuen com

$$I_T(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x,z) \leqslant y\} \qquad \text{per a tots} \quad x,y \in [0,1]$$

on T és habitualment una t-norma contínua per l'esquerra. La caracterització de (S,N)-implicacions generades a partir de negacions fortes i la caracterització d'implicacions residuals generades per t-normes contínues o contínues per l'esquerra, han estat profundament estudiades per molts d'autors [6, 7, 23, 72, 90, 101, 138]. Recentment, sobre una cadena finita L_n aquestes dues classes de funcions d'implicacions, entre d'altres, han estat definides i caracteritzades [99, 100] emprant t-normes i t-conormes discretes que satisfan la condició de suavitat (veure també els preliminars). Altres tipus d'implicacions són les anomenades QL-implicacions que provenen de la lògica quàntica i les D-implicacions que són les seves contraposades respecte d'una negació (forta). Aquests altres tipus definits sobre la cadena L_n han estat estudiades també en [100, 101] (veure també els preliminars). Ara, en aquest capítol tractarem la possibilitat de construir funcions d'implicació sobre el reticle fitat distributiu $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Recordem primer unes quantes definicions generals.

Definició 5.0.15. *[55] Sigui $(\mathcal{P}, \leqslant)$ un conjunt parcialment ordenat, on el símbol 0 denotarà el menor element i 1 denotarà el major element. Una funció d'implicació $\mathcal{I}$ sobre $\mathcal{P}$ és un operador binari que és decreixent en la primera component i creixent en la segona i que satisfà les següents condicions frontera: $\mathcal{I}(0,0) = \mathcal{I}(1,1) = 1$ i $\mathcal{I}(1,0) = 0$.*

Nota 5.0.16. *[55] Recalcar que qualsevol funció d'implicació $\mathfrak{I}$ sobre $(\mathcal{P}, \leqslant)$ verifica*

$$\mathfrak{I}(0,\alpha) = \mathfrak{I}(\alpha,1) = 1, \text{ per a tot} \alpha \in \mathcal{P}$$

propietat anomenada principi d'absorció.

Definició 5.0.17. *[55] Un implicador frontera $\mathfrak{I}$ sobre $(\mathcal{P}, \leqslant)$ és una funció d'implicació que satisfà* el principi de neutralitat per l'esquerra

$$\mathfrak{I}(1,\beta) = \beta, \text{ per a tot } \beta \in \mathcal{P}.$$

5.1 FUNCIONS D'IMPLICACIONS BORROSES GENERADES PER IMPLICACIONS DISCRETES

En aquesta secció volem estudiar la possibilitat de construir funcions d'implicació borroses directament a partir d'extensions de funcions d'implicació definides sobre la cadena finita

L_n. En aquesta secció emprarem com sempre la següent notació. Si

$$\begin{aligned} O : L_n \times L_n &\longrightarrow L_n \\ (x, y) &\longmapsto O(x, y) \end{aligned}$$

és una funció binària discreta sobre L_n (per exemple una t-norma, t-conorma, funció d'implicació, etc.), denotarem també per O, l'operació binària

$$\begin{aligned} O : 2^{L_n} \times 2^{L_n} &\longrightarrow 2^{L_n} \\ (X, Y) &\longmapsto O(X, Y) \end{aligned}$$

on $O(X, Y) = \{O(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. El que farem primer és demostrar un lema tècnic que serà emprat en moltes de les demostracions d'aquesta secció.

Lema 5.1.1. *Siguin $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. I sigui I una implicació discreta definida sobre la cadena finita L_n. Aleshores és verifiquen les següents relacions*

$$\begin{aligned} \min I(A^\alpha, B^\alpha) &= I(\max A^\alpha, \min B^\alpha) \\ \max I(A^\alpha, B^\alpha) &= I(\min A^\alpha, \max B^\alpha) \end{aligned}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$, on A^α, B^α representen els α-conjunts de nivell dels nombres borrosos discrets A i B respectivament.

Demostració. Només provarem la segona relació perquè la demostració de la primera és similar. Notem que la desigualtat

$$I(\min A^\alpha, \max B^\alpha) \leqslant \max I(A^\alpha, B^\alpha)$$

és clara. Per demostrar l'altra desigualtat, donat que la funció d'implicació I és decreixent en la primera variable i creixent en la segona, tenim que

$$I(x, y) \leqslant I(\min A^\alpha, \max B^\alpha)$$

per a tot $x \in A^\alpha$ i per a tot $y \in B^\alpha$. Per tant

$$\max I(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant I(\min A^\alpha, \max B^\alpha)$$

d'on es dedueix el resultat. □

Proposició 5.1.2. *Considerem $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Sigui I una funció d'implicació discreta definida sobre la cadena finita L_n. Aleshores existeix un únic nombre borrós discret tal que té per α-conjunts de nivell els conjunts*

$$C^\alpha = \{z \in L \mid \min I(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max I(A^\alpha, B^\alpha)\}$$

que serà denotat per $\mathcal{I}(A, B)$. A més, $\mathcal{I}(A, B) \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.

Demostració. Demostrarem que el conjunts C^α satisfan les quatre condicions establertes en el teorema 3.2.2:

1. Per a cada $\alpha \in [0, 1]$, els conjunts C^α són finits i no buits perquè cada conjunt de nivell A^α i B^α són també finits i no buits.

2. $C^\beta \subseteq C^\alpha$ per a cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ amb $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.
   Perquè si $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ sabem que

$$A^\beta \subseteq A^\alpha \ \text{ implica que } \min A^\alpha \leqslant \min A^\beta \ \text{ i } \max A^\beta \leqslant \max A^\alpha \tag{5.1}$$

$$B^\beta \subseteq B^\alpha \ \text{ implica que } \min B^\alpha \leqslant \min B^\beta \ \text{ i } \max B^\beta \leqslant \max B^\alpha \tag{5.2}$$

   Endemés, com I és decreixent en la primera variable, emprant la relació (5.1) obtenim

$$I(\max A^\alpha, z) \leqslant I(\max A^\beta, z) \text{ per a tot } z \in L_n.$$

   I, en particular, per la relació (5.2),

$$I(\max A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant I(\max A^\beta, \min B^\beta).$$

   Així, a partir del lema 5.1.1

$$\min I(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant \min I(A^\beta, B^\beta). \tag{5.3}$$

   Similarment, podem veure que

$$\max I(A^\beta, B^\beta) \leqslant \max I(A^\alpha, B^\alpha). \tag{5.4}$$

   Combinant les relacions anteriors (5.3) i (5.4), resulta

$$\begin{aligned} C^\beta &= \{z \in L_n \mid \min I(A^\beta, B^\beta) \leqslant z \leqslant \max I(A^\beta, B^\beta)\} \\ &\subseteq \{z \in L_n \mid \min I(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max I(A^\alpha, B^\alpha)\} \\ &= C^\alpha \end{aligned}$$

   Per tant, $C^\beta \subseteq C^\alpha$.

3. Si $x \in C^\alpha - C^\beta$ aleshores $x \in L_n$ i x no pertany al conjunt C^β. Llavors, o bé $x < I(\max A^\beta, \min B^\beta)$, que es el mínim del conjunt C^β, o $x > I(\min A^\beta, \max B^\beta)$, que és el màxim del conjunt C^β.

4. Com $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$, d'acord al teorema 3.2.2, per a cada $\alpha \in [0,1]$ existeixen nombres reals α_1' i α_2' amb $0 < \alpha_1' < \alpha$ i $0 < \alpha_2' < \alpha$ tals que, per a cada $r \in [\alpha_1', \alpha]$, $A^\alpha = A^r$. A més $B^\alpha = B^r$, per a cada $r \in [\alpha_2', \alpha]$. D'aquesta manera, si $\alpha' = \alpha_1' \vee \alpha_2'$, obtenim:

$$\begin{aligned} \min A^r &= \min A^\alpha \ \text{ i } \ \max A^r = \max A^\alpha \\ \min B^r &= \min B^\alpha \ \text{ i } \ \max B^r = \max B^\alpha \end{aligned}$$

   per a cada $r \in [\alpha', \alpha]$. Per tant, aplicant el lema 5.1.1

$$\begin{aligned} \min I(A^r, B^r) = I(\max A^r, \min B^r) &= I(\max A^\alpha, \min B^\alpha) = \min I(A^\alpha, B^\alpha) \\ \max I(A^r, B^r) = I(\min A^r, \max B^r) &= I(\min A^\alpha, \max B^\alpha) = \max I(A^\alpha, B^\alpha). \end{aligned}$$

   Així,

$$\begin{aligned} C^r &= \{z \in L_n \mid \min I(A^r, B^r) \leqslant z \leqslant \max I(A^r, B^r)\} \\ &= \{z \in L_n \mid \min I(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max I(A^\alpha, B^\alpha)\} \\ &= C^\alpha \text{ per a cada } r \in [\alpha', \alpha]. \end{aligned}$$

Com els conjunts C^α verifiquen per a cada $\alpha \in [0,1]$ les condicions del teorema 3.2.2, existeix un únic nombre borrós discret, que serà denotat per $\mathcal{I}(A,B)$, tal que els seus α-conjunts de nivell són exactament aquests conjunts esmentats.

A més, a partir de la construcció dels conjunts C^α per a cada $\alpha \in [0,1]$, és clar que són subconjunts de nombres naturals consecutius que pertanyen a la cadena finita L_n. Per tant, $\mathcal{I}(A,B) \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. □

La proposició anterior ens permet definir, a partir d'una funció d'implicació discreta I definida sobre la cadena finita L_n, una operació binària $\mathcal{I}$ sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Definició 5.1.3. *Sigui* I *una funció d'implició discreta definida sobre la cadena finita* L_n*. L'operació binària* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *definida de la següent manera*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{I}(A,B) \end{aligned}$$

serà anomenada l'extensió de la funció d'implicació discreta I a $\mathcal{A}_1^{L_n}$, *sent* $\mathcal{I}(A,B)$ *el nombre borrós discret que té per* α*-conjunts els conjunts*

$$\mathcal{I}(A,B)^\alpha = \{z \in L_n \mid \min I(A^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max I(A^\alpha, B^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0,1]$.

Ara volem estudiar si *l'extensió de la funció d'implicació discreta* I *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ definida abans satisfà les condicions de funció d'implicació sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ d'acord al que s'estableix en la definició 5.0.15.

Teorema 5.1.4. *Sigui* I *una funció d'implicació discreta definida sobre la cadena finita* L_n*. Aleshores* l'extensió de la funció d'implicació discreta I, $\mathcal{I}$, *és una funció d'implicació sobre el reticle fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Demostració. Per demostrar el resultat, el que farem es comprovar les condicions imposades en la definició 5.0.15. Considerem $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.

- Volem provar que $\mathcal{I}$ és decreixent en la primera component, és a dir, si $A \preceq B$ aleshores $\mathcal{I}(A,C) \succeq \mathcal{I}(B,C)$ per a tot $C \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. D'acord a la nota 3.2.25 és equivalent a provar que $\min(\mathcal{I}(B,C), \mathcal{I}(A,C))^\alpha = \mathcal{I}(B,C)^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0,1]$. Com $A \preceq B$ aleshores $\min A^\alpha \leqslant \min B^\alpha$ i $\max A^\alpha \leqslant \max B^\alpha$. Així, com que I és una funció d'implicació sobre la cadena finita L_n, és decreixent en la primera component, llavors aplicant el lema 5.1.1

$$\begin{aligned} \min I(A^\alpha, C^\alpha) &= I(\max A^\alpha, \min C^\alpha) \\ &\geqslant I(\max B^\alpha, \min C^\alpha) \\ &= \min I(B^\alpha, C^\alpha) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} \max I(A^\alpha, C^\alpha) &= I(\min A^\alpha, \max C^\alpha) \\ &\geqslant I(\min B^\alpha, \max C^\alpha) \\ &= \max I(B^\alpha, C^\alpha) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Finalment emprant les relacions (5.5) i (5.6) anteriors

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(A,C)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min I(A^\alpha, C^\alpha) \leqslant z \leqslant \max I(A^\alpha, C^\alpha)\} \\ &\geqslant \{z \in L_n \mid \min I(B^\alpha, C^\alpha) \leqslant z \leqslant \max I(B^\alpha, C^\alpha)\} \\ &= \mathcal{I}(B,C)^\alpha \end{aligned}$$

per a cada $\alpha \in [0,1]$.

- El creixement de la segona variable es dedueix de manera similar a l'apartat anterior.

- Respecte a les condicions frontera tenim

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(1_0, 1_0)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min I({1_0}^\alpha, {1_0}^\alpha) \leqslant z \leqslant \max I({1_0}^\alpha, {1_0}^\alpha)\} \\ &= \{n\} \\ &= {1_n}^\alpha\end{aligned}$$

perquè $\min I({1_0}^\alpha, {1_0}^\alpha) = \max I({1_0}^\alpha, {1_0}^\alpha) = n$ per a tot $\alpha \in [0, 1]$. Aleshores hem provat que $\mathcal{I}(1_0, 1_0) = 1_n$.

Les altres dues condicions $\mathcal{I}(1_n, 1_n) = 1_n$ i $\mathcal{I}(1_n, 1_0) = 1_0$ es deriven similarment.

□

Nota 5.1.5. *Notam que, com que $\mathcal{I}$ és una funció d'implicació sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$, també verificarà la propietat d'absorció, és a dir,*

$$\mathcal{I}(1_0, A) = \mathcal{I}(A, 1_n) = 1_n$$

per a tot $a \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.

Exemple 5.1.6. *Considerem la cadena finita L_6 i els nombres borrosos discrets*

$$\begin{aligned}A =& \{0.3/0, 0.5/1, 1/2, 0.8/3, 0.5/4\} \\ B =& \{0.6/2, 0.8/3, 0.9/4, 1/5, 0.8/6\}\end{aligned}$$

que pertanyen a $\mathcal{A}_1^{L_6}$. Si consideram les funcions d'implicació discretes

$$I_R(x, y) = \begin{cases} 6 & \textit{si } \ x \leqslant y \\ 3 + y - x & \textit{si existeixen } \ 0 \leqslant y < x \leqslant 3 \\ 6 + y - x & \textit{si existeixen } \ 3 \leqslant y < x \leqslant 6 \\ y & \textit{altrament} \end{cases}$$

$$I_S(x, y) = \begin{cases} \min(6, 3 + y - x) & \textit{si } \ x \in [0, 3], y \in [3, 6] \\ \min(3, 6 + y - x) & \textit{si } \ x \in [3, 6], y \in [0, 3] \\ \max(6 - x, y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

Aleshores un senzill càlcul prova que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_R(A, B) =& \{0.6/2, 0.6/3, 0.6/4, 0.6/5, 1/6\} \\ \mathcal{I}_S(A, B) =& \{0.8/3, 0.8/4, 0.9/5, 1/6\}.\end{aligned}$$

En les següents dues proposicions volem estudiar altres propietats com ara el principi d'intercanvi o la llei de contraposició, que en molts casos són requerides a les funcions d'implicacions depenent dels contextos on s'emprin. Comencen per un detall tècnic que ens ajudarà en les propietats esmentades.

Proposició 5.1.7. *Sigui I una implicació sobre L_n i sigui $\mathcal{I}$ la seva extensió a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Considerem $a, b \in L_n$ i $1_a, 1_b \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ els nombres borrosos amb suport els subconjunts unitaris $\{a\}$ i $\{b\}$ respectivament. Llavors, $\mathcal{I}(1_a, 1_b) = 1_{I(a,b)}$.*

Demostració. Basta veure que tenen els mateixos α-conjunts de nivell per a cada $\alpha \in [0,1]$. Llavors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(1_a, 1_b)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min I(1_a^\alpha, 1_b^\alpha) \leqslant z \leqslant \max I(1_a^\alpha, 1_b^\alpha)\} \\
&= \{z \in L_n \mid I(\max 1_a^\alpha, \min 1_b^\alpha) \leqslant z \leqslant I(\min 1_a^\alpha, \max 1_b^\alpha)\} \\
&= \{z \in L_n \mid I(a,b) \leqslant z \leqslant I(a,b)\} \\
&= \{I(a,b)\}
\end{aligned}$$

□

Nota 5.1.8. *De manera anàloga es pot veure que la restricció d'una implicació $\mathcal{I}$ sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$, que és extensió d'una funció d'implicació I sobre L_n, al subreticle $\mathbb{B}$ dona una funció d'implicació sobre $\mathbb{B}$.*

Proposició 5.1.9. *Sigui I una funció d'implicació sobre la cadena L_n i sigui $\mathcal{I}$ la seva extensió cap $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Llavors es verifiquen les següents propietats:*

i) I verifica la neutralitat per l'esquerra si i només si $\mathcal{I}$ ho verifica.

ii) I satisfà (EP) si i només si $\mathcal{I}$ satisfà (EP).

iii) I satisfà (CL) si i només si $\mathcal{I}$ satisfà (CL).

Demostració. Ara estudiarem cada apartat.

i) Per demostrar aquesta propietat basta veure que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(1_n, B)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min I(1_n{}^\alpha, B^\alpha) \leqslant z \leqslant \max I(1_n{}^\alpha, B^\alpha)\} \\
&= \{z \in L_n \mid I(n, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant I(n, \max B^\alpha)\} \\
&= \{z \in L_n \mid \min B^\alpha \leqslant z \leqslant \max B^\alpha\} \\
&= B^\alpha \text{ per a cada } \alpha \in [0,1].
\end{aligned}$$

El recíproc és clar a partir de la proposició 5.1 anterior ja que per a tot $b \in L_n$ tenim $\mathcal{I}(1_n, 1_b) = 1_{I(n,b)} = 1_b$.

ii) Suposem que la funció d'implicació I satisfà (EP) i considerem $A, B, C \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Basta demostrar que

$$\mathcal{I}(A, \mathcal{I}(B,C))^\alpha = \mathcal{I}(B, \mathcal{I}(A,C))^\alpha,$$

o equivalentment, que

$$\min I(A^\alpha, \mathcal{I}(B,C)^\alpha) = \min I(B^\alpha, \mathcal{I}(A,C)^\alpha)$$

i

$$\max I(A^\alpha, \mathcal{I}(B,C)^\alpha) = \max I(B^\alpha, \mathcal{I}(A,C)^\alpha).$$

A més, aplicant el lema 5.1.1 els mínims en la condició anterior vindran donats per $I(\max A^\alpha, I(\max B^\alpha, \min C^\alpha))$ i $I(\max B^\alpha, I(\max A^\alpha, \min C^\alpha))$, respectivament, que coincideixen perquè I satisfà (EP).

Recíprocament, suposem que $\mathcal{I}$ verifica (EP) i considerem els elements de la cadena $a, b, c \in L_n$. Siguin $1_a, 1_b$ and 1_c els nombres borrosos discrets que tenen per suport els conjunts unitaris $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, respectivament. Aleshores, clarament

$$\mathcal{I}(1_a, \mathcal{I}(1_b, 1_c)) = \mathcal{I}(1_b, \mathcal{I}(1_a, 1_c))$$

i això implica directament que I verifiqui (EP).

iii) De manera similar com abans, per a tot $\alpha \in [0,1]$ i $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ tenim

$$\begin{aligned} \min I(\mathcal{N}(B)^\alpha, \mathcal{N}(A)^\alpha) &= \min I(A^\alpha, B^\alpha) \\ \max I(\mathcal{N}(B)^\alpha, \mathcal{N}(A)^\alpha) &= \max I(A^\alpha, B^\alpha) \end{aligned}$$

i aleshores

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}(B), \mathcal{N}(A))^\alpha = \mathcal{I}(A, B)^\alpha$$

per a tot $\alpha \in [0,1]$.

El recíproc es similar al pas anterior.

□

En canvi el principi d'ordre no es comporta de la mateixa manera. De fet, l'extensió d'una implicació I sobre L_n a $\mathcal{A}_1^{L_n}$, no satisfà el principi d'ordre,

Proposició 5.1.10. *Sigui* I *una implicació sobre* L_n *que satisfà el principi d'ordre i siguin* $a, b \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. *Llavors:*

I) *Si* $A \preceq B$ *és té que* $n \in \mathcal{I}(A,B)^\alpha$ *per a tot* $\alpha \in [0,1]$.

II) $\mathcal{I}(A,B) = 1_n$ *si i només si* $\max \operatorname{supp}(A) \leqslant \min \operatorname{supp}(B)$.

Demostració. Si $A \preceq B$ aleshores $\min A^\alpha \leqslant \max A^\alpha \leqslant \max B^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0,1]$ i així $I(\min A^\alpha, \max B^\alpha) = n$. Per tant $n \in \mathcal{I}(A,B)^\alpha$ per a tot $\alpha \in [0,1]$.

A més, quan $\max A^\alpha \leqslant \min B^\alpha$ tenim també que $I(\max A^\alpha, \min B^\alpha) = n$ i així, $\mathcal{I}(A,B)^\alpha = \{z \in L_n \mid n \leqslant z \leqslant n\} = \{n\}$ per a tot $\alpha \in [0,1]$, és a dir, $\mathcal{I}(A,B) = 1_n$. □

Exemple 5.1.11. *Sigui* $I(x,y) = \min(6, 6+y-x)$ *la implicació de Łukasiewicz definida sobre la cadena finita* L_6. *Sabem que* I *verifica les propietats* (EP), (CL) *i* (OP) *(veure preliminars). Considerem la seva extensió* $\mathcal{I}$ *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *i els nombres borrosos discrets*

$$\begin{aligned} A &= \{0.6/0, 0.7/1, 1/2, 0.8/3\} \\ B &= \{0.8/3, 1/4, 0.7/5, 0.6/6\} \\ C &= \{0.6/0, 0.7/1, 0.8/2, 1/3, 0.8/4\} \\ D &= \{0.7/1, 0.8/2, 1/3, 1/4, 0.8/5\}. \end{aligned}$$

i) D'acord a l'anterior proposició $\mathcal{I}$ *verifica* (CL). *Així, pot ser verificat trivialment que*

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}(D), \mathcal{N}(C)) = \mathcal{I}(C, D) = \{0.7/3, 0.8/4, 0.8/5, 1/6\}$$

ii) És senzill veure que $C \preceq D$. *Per tant, segons la proposició 5.1.10 anterior,*

$$6 \in \mathcal{I}(C,D)^\alpha \textit{ per a tot } \alpha \in [0,1],$$

però notem que $\mathcal{I}(C,D) \neq 1_n$, *ja que* $\max \operatorname{supp} C = 4 \nleqslant 1 = \min \operatorname{supp} D$. *Per altra part, és immediat demostrar que* $A \preceq B$ *i* $\max \operatorname{supp}(A) \leqslant \min \operatorname{supp}(B)$. *Així, en aquest cas tenim que* $\mathcal{I}(A,B) = \{1/6\} = 1_n$.

És ben conegut que les funcions de negació borroses poden ser construïdes a partir de funcions d'implicació [8]. Similarment és possible obtenir una funció de negació sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir de funcions d'implicació d'aquest mateix reticle.

Proposició 5.1.12. *Sigui $\mathcal{I}$ una funció d'implicació sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Aleshores la funció*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{N}_{\mathcal{I}}: & \mathcal{A}_1^{L_n} & \longrightarrow & \mathcal{A}_1^{L_n} \\ & A & \mapsto & \mathcal{N}_{\mathcal{I}}(A) = \mathcal{I}(A, 1_0), \end{array}$$

és una funció de negació borrosa sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Demostració. Immediata. □

Sabem que la comparació de funcions d'implicació definides sobre la cadena finita L_n es du a terme de la manera usual, és a dir, punt a punt. Seguin la mateixa idea, si es consideren dues funcions d'implicació $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ definides sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ generades per les implicacions discretes I_1, I_2 definides sobre L_n verificant $I_1 \leqslant I_2$, és possible obtenir un ordre entre $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$. Així,

Proposició 5.1.13. *Siguin I_1 i I_2 dues funcions d'implicació definides sobre la cadena finita L_n verificant $I_1 \leqslant I_2$. Considerem les seves corresponents extensions a $\mathcal{A}_1^{L_n}$, $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ per a I_1 i I_2 respectivament. Aleshores $\mathcal{I}_1(A,B) \preceq \mathcal{I}_2(A,B)$ per a tot $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.*

Demostració. Basta demostrar d'acord a la nota 3.2.25 que $\min(\mathcal{I}_1(A,B), \mathcal{I}_2(A,B))^\alpha = \mathcal{I}_1(A,B)^\alpha$ per a cada $\alpha \in [0,1]$. Per fer-ho, notam que

$$\begin{aligned} \min \mathcal{I}_1(A,B)^\alpha &= \min I_1(A^\alpha, B^\alpha) \\ &= I_1(\max A^\alpha, \min B^\alpha) \\ &\leqslant I_2(\max A^\alpha, \min B^\alpha) \\ &= \min I_2(A^\alpha, B^\alpha), \end{aligned}$$

i de manera similar pels màxims. Això implicarà que

$$\min(\mathcal{I}_1(A,B), \mathcal{I}_2(A,B))^\alpha = \mathcal{I}_1(A,B)^\alpha.$$

i per tant es deriva el resultat. □

5.1.1 *S-implicacions borroses discretes*

Com en qualsevol reticle fitat, en $\mathcal{A}_1^{L_n}$ podem fàcilment construir (S,N)-implicacions o S-implicacions (ja que en el nostre cas la negació sempre és la mateixa) a partir d'una t-conorma $\mathcal{S}$ (que és extensió d'una t-conorma suau S definida sobre la cadena finita L_n) i la negació forta $\mathcal{N}$ (que és l'extensió de la negació forta N sobre la cadena finita L_n).

Teorema 5.1.14. *Sigui S t-conorma suau sobre L_n i $\mathcal{S}$ la seva extensió a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. L'aplicació*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}: & \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} & \longrightarrow & \mathcal{A}_1^{L_n} \\ & (A,B) & \mapsto & \mathcal{I}(A,B) = \mathcal{S}(\mathcal{N}(A), B) \end{array}$$

és una funció d'implicació sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$, que serà anomenada $\mathcal{S}$-implicació generada per la t-conorma suau S.

Sabem que aquest tipus d'implicació verifica sempre el principi de neutralitat per l'esquerra, el principi d'intercanvi i la contraposició respecte a la negació $\mathcal{N}$. Ara, volem provar que qualsevol d'aquestes S-implicacions són, de fet, l'extensió d'una S-implicació definida sobre L_n construïda emprant el mètode general presentat abans en la definició 5.1.3. Concretament,

Proposició 5.1.15. *Sigui* S *una t-conorma suau sobre* L_n *i* I *l'implicació discreta sobre* L_n *definida a partir de* S *i* N. *Siguin* $\mathcal{S}$, $\mathcal{N}$ *i* $\mathcal{I}$ *les extensions de* S, N *i* I *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *respectivament. Aleshores* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathcal{N}}$.

Demostració. Considerem $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ i siguin A^α, B^α els seus α-conjunts de nivell per a cada $\alpha \in [0,1]$ respectivament. Així, d'acord a la definició 5.1.3 tenim

$$\mathcal{I}(A,B)^\alpha = \{z \in L \mid I(\max A^\alpha, \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant I(\min A^\alpha, \max B^\alpha)\}.$$

Com $I(a,b) = S(N(a),b)$ per a tot $a, b \in L$ obtenim

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(A,B)^\alpha &= \{z \in L_n \mid S(N(\max A^\alpha), \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant S(N(\min A^\alpha), \max B^\alpha)\} \\
&= \{z \in L_n \mid S(\min N(A^\alpha), \min B^\alpha) \leqslant z \leqslant S(\max N(A^\alpha), \max B^\alpha)\} \\
&= \mathcal{S}(\mathcal{N}(A), B)^\alpha \\
&= \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathcal{N}}(A,B)^\alpha
\end{aligned}$$

per a cada $\alpha \in [0,1]$. □

5.1.2 *QL i D-implicacions borroses*

En aquesta secció volem estudiar el comportament de les QL i D-implicacions, de manera similar al cas de les S-implicacions. Cal tenir en compte que en general QL i D-operadors no verifiquen [100, 101] les condicions imposades a la definició 5.0.15.

Proposició 5.1.16. *Siguin* T *una t-norma suau i* S *una t-conorma suau sobre la cadena finita* L_n, *i considerem* I *el QL-operador obtingut a partir d'ells* $I(x,y) = S(N(x), T(x,y))$ *per a tots* $x, y \in L_n$. *Siguin* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$ *les extensions de* T *i* S *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$, *i sigui* $\mathcal{N}$ *l'extensió de* N *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Podem construir el QL-operador* $\mathcal{I}$ *sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *donat per*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathcal{N},\mathcal{T}}(A,B) = \mathcal{S}(\mathcal{N}(A), \mathcal{T}(A,B)), \text{ per a tot } A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}.$$

Aleshores $\mathcal{I}$ *és una funció d'implicació sobre el reticle fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *si i només si* I *és una funció d'implicació sobre la cadena* L_n.

Demostració. És ben conegut que qualsevol QL-operador sobre L_n satisfà totes les propietats de funció d'implicació excepte en alguns casos la propietat de decreixement respecte de la primera variable (veure nota 2.3.9), i el mateix passa per QL-operadors definits sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Per tant, només necessitam demostrar que I és decreixent en la primera component si i només si ho és $\mathcal{I}$.

Suposem que I és decreixent en la primera variable i siguin $A, B, C \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Llavors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(A,C)^\alpha &= \{z \in L_n \mid \min I(A^\alpha, C^\alpha) \leqslant z \max I(A^\alpha, C^\alpha)\} \\
&= \{z \in L_N \mid I(\max A^\alpha, \min C^\alpha) \leqslant z \leqslant I(\min A^\alpha, \max C^\alpha)\} \\
&\geqslant \{z \in L_n \mid I(\max B^\alpha, \min C^\alpha) \leqslant z \leqslant I(\min B^\alpha, \max C^\alpha)\} \\
&= \mathcal{I}(B,C)^\alpha
\end{aligned}$$

Recíprocament, donats $a, b, c \in L_n$ tals que $a \leqslant b$. tenim que $\mathcal{T}(1_a, 1_c) \succeq \mathcal{T}(1_b, 1_c)$, llavors tenim que $1_{I(a,c)} \succeq 1_{I(b,c)}$ d'on es dedueix que $I(a,c) \geqslant I(b,c)$. □

Anàlogament al cas de les S-implicacions podem veure el següent resultat.

Proposició 5.1.17. *Siguin* T, S *una t-norma i una t-conorma suaus sobre* L_n *i siguin* $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ *les seves extensions a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Sigui* I_{SNT} *la* QL*-operació obtinguda a partir de* S, N *i* T; *i sigui* $\mathcal{I}$ *la seva extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Llavors* $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathcal{N},\mathcal{T}}$.

Demostració. Similar a la demostració de la proposició 5.1.15. □

Uns resultats similars es poden obtenir pel cas dels D-operadors.

Proposició 5.1.18. *Considerem una t-norma suau* T *i una t-conorma suau* S *sobre la cadena finita* L_n, *i sigui* I *el D-operador obtingut a partir d'ells donat per l'expressió* $I(x,y) = S(y, T(N(x), N(y)))$, *per a tots* $x, y \in L_n$. *Siguin* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$ *les extensions de* T *i* S *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Podem construir el D-operador* $\mathcal{I}$ *sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$

$$\mathcal{I}^{SNT}(A,B) = \mathcal{S}(B, \mathcal{T}(\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B))), \text{ per a tot } A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}.$$

Aleshores $\mathcal{I}$ *és una funció d'implicació sobre el reticle* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *si i només si* I *és una funció d'implicació sobre la cadena* L_n.

Demostració. En aquest cas, l'única propietat que pot fallar de la definició de funció d'implicació és la condició de creixement respecte de la segona variable. Ara, de manera similar a la proposició 5.1.16, podem demostrar que I és creixent en la segona variable si i només si també ho és $\mathcal{I}$, provant així la proposició. □

Proposició 5.1.19. *Siguin* T, S *una t-norma i una t-conorma suaus sobre* L_n *i siguin* $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ *les seves extensions a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Sigui* I^{SNT} *la* D*-operació obtinguda a partir de* S, N *i* T; *i sigui* $\mathcal{I}$ *la seva extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Llavors* $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\mathcal{S},\mathcal{N},\mathcal{T}}$.

Demostració. Similar a la demostració de la proposició 5.1.15. □

Nota 5.1.20. *És obvi que les construccions fetes en les seccions 5.1.1 i 5.1.2 corresponent a* S, QL *i* D*-implicacions sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *es poden du a terme a partir de t-normes i t-conormes no suaus. En el nostre estudi ens restringim a les suaus perquè són les que estan caracteritzades.*

Recordem ara, tal com hem mencionat als preliminars, que QL i D-implicacions sobre la cadena L_n han estat estudiades i caracteritzades en [100]. Les dues caracteritzacions es poden trobar en les proposicions 2.3.23 i 2.3.24. Així, emprant les dues proposicions esmentades, és clar que podem construir QL i D-implicacions sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir de corresponents QL i D-implicacions definides sobre la cadena finita L_n, verificant les condicions de la proposició 2.3.23 i de la proposició 2.3.24, respectivament.

Proposició 5.1.21. *Sigui* T *una t-norma suau sobre la cadena finita* L_n, $\mathcal{T}$ *la seva extensió i* $\mathcal{N}$ *l'extensió de la negació forta* N. *Aleshores l'operació binària*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{N},\mathcal{T}} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{I}_{\mathcal{N},\mathcal{T}}(A,B) = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{T}(A,B), \end{aligned}$$

(on el símbol $\oplus$ *denota la suma de nombres borrosos discrets d'acord al principi d'extensió de Zadeh [35, 90]) són les úniques QL implicacions sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *que són extensió d'una QL implicació definida sobre la cadena finita* L_n.

Demostració. És clar a partir de les proposicions 5.1.16 i 2.3.23 que l'única QL funció d'implicació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que és una extensió d'una QL funció d'implicació sobre L_n és l'extensió de la funció d'implicació

$$I(x,y) = N(x) + T(x,y)$$

Ara, un procediment anàleg al donat en la proposició 5.1.15 mostra que en efecte es tal extensió. □

Anàlogament,

Proposició 5.1.22. *Sigui* T *una t-norma suau sobre la cadena finita* L_n*, i sigui* $\mathcal{T}$ *la seva extensió. Sigui* $\mathcal{N}$ *l'extensió d'* N *(negació forta sobre* L_n*). Aleshores l'operació binària*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{N},\mathcal{T}} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n}\\ (A,B) &\longmapsto \mathcal{I}_{\mathcal{N},\mathcal{T}}(A,B) = B \oplus \mathcal{T}(\mathcal{N}(A),\mathcal{N}(B))\end{aligned}$$

és l'única D-implicació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *que és una extensió d'una D-implicació sobre* L_n.

Demostració. Similar a la demostració de la proposició anterior. □

5.2 IMPLICACIONS RESIDUADES SOBRE EL RETICLE BORRÓS DISCRET

En la proposició 5.1.15 de la secció 5.1.1, hem vist que si I és una (S,N)-implicació construïda a partir d'una t-conorma S i la negació N definides sobre la cadena finita L_n, aleshores la seva corresponent extensió $\mathcal{I}$ és també una (S,N)-implicació en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, que ve determinada a partir de la t-conorma $\mathcal{S}$ (extensió de la t-conorma S) i de la negació $\mathcal{N}$ (extensió de la negació N), i el mateix passa en el cas de QL i D-implicacions.

Desafortunadament, aquesta situació no es certa en el cas de R-implicacions. Si consideram una t-norma T sobre L_n i $\mathcal{T}$ és la seva extensió a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. La R-implicació associada a $\mathcal{T}$ ve donada per l'expressió

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,C) = \sup\{B \in \mathcal{A}_1^{L_n} \mid \mathcal{T}(A,B) \preceq C\}. \tag{5.7}$$

Si consideram I_T la implicació residual sobre L_n obtinguda a partir de T, aleshores la seva extensió a $\mathcal{A}_1^{L_n}$ no coincideix en general amb la R-implicació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ donada per l'expressió (5.7), com es mostra en el següent exemple.

Exemple 5.2.1. *Considerem la cadena* L_7*, i sobre aquesta cadena siguin* $T(x,y) = \min(x,y)$ *la t-norma mínim i* $I_{\min}$ *la seva implicació residual que ve donada per l'expressió*

$$I_{\min}(x,y) = \begin{cases} 7 & \textit{si} \;\; x \leqslant y \\ y & \textit{si} \;\; x > y \end{cases}$$

Denotem també per $\min$ *i* $\widetilde{I_{\min}}$ *la extensió de la t-norma mínim i l'extensió de la seva implicació residual a* $\mathcal{A}_1^{L_7}$*. Considerem els nombres borrosos discrets*

$$\begin{aligned} A &= \{0.7/2, 1/3, 0.9/4\} \\ B &= \{0.6/1, 0.6/2, 0.7/3, 1/4, 0.8/5\}. \end{aligned}$$

que pertanyen a $\mathcal{A}_1^{L_7}$*. Un senzill càlcul mostra que* $\min(A,B) = \{0.6/1, 0.7/2, 1/3, 0.9/4\}$*. Ara, sigui* $C = \mathrm{MIN}(A,B)$*. Si calculam els* α*-nivells de* $\widetilde{I_{\min}}(A,C)$*, obtenim:*

$$\begin{aligned} \widetilde{I_{\min}}(A,C)^{0.6} &= [1,7] \quad \widetilde{I_{\min}}(A,C)^{0.7} = [2,7] \\ \widetilde{I_{\min}}(A,C)^{0.8} &= [3,7] \quad \widetilde{I_{\min}}(A,C)^{0.9} = [3,7] \\ \widetilde{I_{\min}}(A,C)^{1} &= [7,7] \end{aligned}$$

i conseqüentment

$$\widetilde{I_{\min}}(A,C) = \{0.6/1, 0.7/2, 0.9/3, 0.9/4, 0.9/5, 0.9/6, 1/7\}.$$

Per tant és clar que $\mathrm{MIN}(A,B) \preceq C$*, però* $B \not\preceq \widetilde{I_{\min}}(A,C)$ *i per tant* $\widetilde{I_{\min}}$ *no satisfà l'equació (5.7).*

D'aquesta forma, una pregunta es planteja de manera natural, com podem obtenir implicacions residuals en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$? Ara resoldrem la qüestió plantejada.

Començarem per donar la notació que utilitzarem en aquesta secció. Primer de tot, destacar que per a qualsevol nombre borrós discret $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ només un nombre finit de nivells són rellevants. Així, donats $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$, podem suposar sense pèrdua de generalitat que els valors $0 = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_m = 1$ representen la unió dels nivells rellevants d'ambdós nombres A i B, i suposarem sempre, a partir d'ara, aquesta hipòtesi.

Proposició 5.2.2. *Sigui T una t-norma discreta sobre L_n i I_T la seva implicació residual. Per a cada parella de nombres borrosos $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ siguin $\alpha_0 = 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_m = 1$ els corresponents nivells per A, B i siguin $A^{\alpha_j} = [a_1^{\alpha_j}, a_2^{\alpha_j}]$ i $B^{\alpha_j} = [b_1^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j}]$ els seus α_j-nivells per a A i B respectivament, per a cada $0 \leqslant j \leqslant m$. Aleshores, existeix un únic nombre borrós discret $R \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ tal que els seus α_j-nivells s'expressen com a intervals de la cadena finita L_n, de la següent manera,*

$$R^{\alpha_j} = [\min_{j \leqslant i \leqslant m} I_T(a_1^{\alpha_j}, b_1^{\alpha_j}) \wedge \min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(a_2^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j}), \min_{0 \leqslant i \leqslant j} I_T(a_2^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j})] \tag{5.8}$$

per a cada $j = 0, \cdots, m$.

Demostració. Només demostrarem la condició (2) del teorema 3.2.2, perquè les altres condicions són senzilles. Així, volem veure que $R^{\alpha_{j+1}} \subseteq R^{\alpha_j}$ per a tot $j = 0, \cdots, m$. Per a simplificar la notació, anomenarem

$$d_1^{\alpha_j} = I_T(a_1^{\alpha_j}, b_1^{\alpha_j}) \quad \text{i} \quad d_2^{\alpha_j} = I_T(a_2^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j})$$

per a cada $j = 0, \cdots, m$ i també

$$r_1^{\alpha_j} = \min_{j \leqslant i \leqslant m} d_1^{\alpha_i} \wedge \min_{0 \leqslant i \leqslant m} d_2^{\alpha_i} \tag{5.9}$$

$$r_2^{\alpha_j} = \min_{0 \leqslant i \leqslant j} d_2^{\alpha_i} \tag{5.10}$$

Llavors, aplicant la propietat associativa de la funció min, es verifiquen les següents desigualtats

$$r_2^{\alpha_{j+1}} = \min_{0 \leqslant i \leqslant j+1} d_2^{\alpha_i} \leqslant \min_{0 \leqslant i \leqslant j} d_2^{\alpha_i} = r_2^{\alpha_j}$$
$$r_1^{\alpha_{j+1}} = \min_{j+1 \leqslant i \leqslant m} d_1^{\alpha_i} \wedge \min_{0 \leqslant i \leqslant m} d_2^{\alpha_i} \geqslant \min_{j \leqslant i \leqslant m} d_1^{\alpha_i} \wedge \min_{0 \leqslant i \leqslant m} d_2^{\alpha_i} = r_1^{\alpha_j}$$

□

Proposició 5.2.3. *Sigui T una t-norma discreta sobre L_n i I_T la seva implicació residuada. Siguin $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ i suposem que $\alpha_0 = 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_m = 1$ representen els nivells d'aquests nombres. Considerem l'aplicació binària*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{T}} : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\to \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A, B) &\to \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, B) \end{aligned}$$

on $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, B)$ és el nombre borrós discret que té per α_j-nivells els intervals de la cadena L_n donats per

$$R^{\alpha_j} = [r_1^{\alpha_j}, r_2^{\alpha_j}] \tag{5.11}$$

per a cada $j = 0, \cdots, m$, sent els valors $r_1^{\alpha_j}$ i $r_2^{\alpha_j}$ definits d'acord a les expressions (5.9) i (5.10) respectivament. Aleshores, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ és una funció d'implicació en el reticle fitat $(\mathcal{A}_1^{L_n}, 1_0, 1_n)$.

Demostració. Volem demostrar que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ verifica les condicions de la definició 5.0.15:

- $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_0, 1_0) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_n, 1_n) = 1_n$ i $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_n, 1_0) = 1_0$.

  Per veure que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_0, 1_0) = 1_n$ notem que els α_j-nivells de 1_0 venen donats per $[a_1^{\alpha_j}, a_2^{\alpha_j}] = [b_1^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j}] = [0, 0]$ i, per tant, com I_T és una funció d'implicació sobre L_n, per a cada nivell α_j es verifiquen les següents condicions:

  $$r_1^{\alpha_j} = I_T(0, 0) = n$$
  $$r_2^{\alpha_j} = I_T(0, 0) = n$$

  Per tant, $R^{\alpha_j} = [n, n]$, és a dir, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_0, 1_0) = 1_n$.

  Per altra part, per a calcular $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_n, 1_0)$, notem que els α_j-nivells de 1_n són $[a_1^{\alpha_j}, a_2^{\alpha_j}] = [n, n]$ i llavors

  $$r_1^{\alpha_j} = I_T(n, 0) = n$$
  $$r_2^{\alpha_j} = I_T(n, 0) = n$$

  Per tant, $R^{\alpha_j} = [n, n]$, això és, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_n, 1_0) = 1_n$.

- $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ és decreixent en la primera component.

  Suposem que $A \preceq B$, volem provar que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, C) \succeq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B, C)$ per a tot $C \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Equivalentment, basta demostrar que

  $$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, C)^{\alpha} \geqslant \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B, C)^{\alpha} \quad \text{per a tot} \quad \alpha \in [0, 1]$$

  Com $A \preceq B$, aleshores es satisfan les següents desigualtats $a_1^{\alpha_j} \leqslant b_1^{\alpha_j}$ i $a_2^{\alpha_j} \leqslant b_2^{\alpha_j}$ per a tot α_j amb $j = 0, \cdots, m$. Per tant, com I_T és una funció d'implicació sobre L_n, és decreixent en la primera variable i, si $[c_1^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i}]$ representa el α_i-nivell de C, tenim que

  $$\min_{j \leqslant i \leqslant m} I_T(a_1^{\alpha_i}, c_1^{\alpha_i}) \geqslant \min_{j \leqslant i \leqslant m} I_T(b_1^{\alpha_i}, c_1^{\alpha_i})$$
  $$\min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(a_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i}) \geqslant \min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(b_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i})$$

  Com la funció $\wedge = \min$ és creixent, obtenim la següent desigualtat:

  $$\begin{aligned} &\min_{j \leqslant i \leqslant m} I_T(a_1^{\alpha_i}, c_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(a_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i}) \geqslant \\ &\min_{j \leqslant i \leqslant m} I_T(b_1^{\alpha_i}, c_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(b_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i}) \end{aligned} \tag{5.12}$$

  Un procediment anàleg demostra que

  $$\min_{0 \leqslant i \leqslant j} I_T(a_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i}) \geqslant \min_{0 \leqslant i \leqslant j} I_T(b_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i}) \tag{5.13}$$

  Finalment, d'acord a les expressions (5.12) i (5.13) el resultat es deriva perquè

  $$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, C)^{\alpha_j} &= [\min_{j \leqslant i \leqslant m} I(a_1^{\alpha_i}, c_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(a_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i}), \min_{0 \leqslant i \leqslant j} I_T(a_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i})] \\ &\geqslant [\min_{j \leqslant i \leqslant m} I_T(b_1^{\alpha_i}, c_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(b_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i}), \min_{0 \leqslant i \leqslant j} I_T(b_2^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i})] \\ &= \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B, C)^{\alpha_j} \end{aligned}$$

- $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ és creixent en la segona variable. Emprant les mateixes condicions de l'apartat anterior, com I_T és una funció d'implicació sobre L_n, és creixent en la segona variable. Aleshores, si $[c_1^{\alpha_i}, c_2^{\alpha_i}]$ representa el α_i-nivell de C, es dedueix que

$$\min_{j\leqslant i\leqslant m} I_T(c_1^{\alpha_i}, a_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0\leqslant i\leqslant m} I_T(c_2^{\alpha_i}, a_2^{\alpha_i}) \leqslant \tag{5.14}$$

$$\min_{j\leqslant i\leqslant m} I_T(c_1^{\alpha_i}, b_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0\leqslant i\leqslant m} I_T(c_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i}) \text{ i també que}$$

$$\min_{0\leqslant i\leqslant j} I_T(c_2^{\alpha_i}, a_2^{\alpha_i}) \leqslant \min_{0\leqslant i\leqslant j} I_T(c_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i}) \tag{5.15}$$

Ara, tenint en compte les expressions (5.14) i (5.15) el resultat es dedueix, perquè

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(C,A)^{\alpha_j} &= [\min_{j\leqslant i\leqslant m} I_T(c_1^{\alpha_i}, a_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0\leqslant i\leqslant m} I_T(c_2^{\alpha_i}, a_2^{\alpha_i}), \min_{0\leqslant i\leqslant j} I_T(c_2^{\alpha_i}, a_2^{\alpha_i})]\\ &\leqslant [\min_{j\leqslant i\leqslant m} I_T(c_1^{\alpha_i}, b_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0\leqslant i\leqslant m} I_T(c_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i}), \min_{0\leqslant i\leqslant j} I_T(c_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i})]\\ &= \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B,C)^{\alpha_j}\end{aligned}$$

□

Teorema 5.2.4. *Sigui* T *una t-norma discreta sobre* L_n *i* I_T *la seva implicació residuada. Sigui* $\mathcal{T}$ *l'extensió de* T *a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Aleshores la implicació residuada sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *derivada de* $\mathcal{T}$ *és la funció d'implicació* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ *obtinguda en la proposició 5.2.3.*

Demostració. Volem provar que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B) = \sup\{C \in \mathcal{A}_1^{L_n} \mid \mathcal{T}(A,C) \preceq B\}$. Per això, considerem el conjunt $\mathbf{M} = \{C \in \mathcal{A}_1^{L_n} \mid \mathcal{T}(A,C) \preceq B\}$ i sigui $H \in \mathbf{M}$ un element d'aquest conjunt. Suposem que $0 = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_m = 1$ representen els nivells de variació de $H, A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.

- Primerament, volem veure que per a cada nivell α_j es verifica la desigualtat $H^{\alpha_j} \leqslant \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha_j}$. Per a cada $j = 0, \cdots, m$, sigui $H^{\alpha_j} = [h_1^{\alpha_j}, h_2^{\alpha_j}]$ el α_j-nivell de $H \in \mathbf{M}$ i sigui $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha_j} = [r_1^{\alpha_j}, r_2^{\alpha_j}]$ el α_j-nivell de $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha_j}$, on els valors $r_1^{\alpha_j}$ i $r_2^{\alpha_j}$ estan definits d'acord a les expressions (5.9) i (5.10) respectivament.

  Com $H \in \mathbf{M}$, es dedueix que $\mathcal{T}(A,H) \preceq B$, i equivalentment $\mathcal{T}(A,H)^{\alpha_j} \preceq B^{\alpha_j}$ per a tot $j \in \{0,1,\cdots,m\}$. D'acord al teorema 4.2.15, aquesta darrera expressió pot ser escrita com

$$T(a_1^{\alpha_j}, h_1^{\alpha_j}) \leqslant b_1^{\alpha_j} \tag{5.16}$$

$$T(a_2^{\alpha_j}, h_2^{\alpha_j}) \leqslant b_2^{\alpha_j}. \tag{5.17}$$

  Com I_T és la implicació residual de la t-norma T, les desigualtats (5.16) i (5.17) son equivalents a les expressions:

$$I_T(a_1^{\alpha_j}, b_1^{\alpha_j}) \geqslant h_1^{\alpha_j} \tag{5.18}$$

$$I_T(a_2^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j}) \geqslant h_2^{\alpha_j}. \tag{5.19}$$

  Ara, emprant el fet de que $H \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ i les relacions (5.18) i (5.19), obtenim que

  i. Tots els valors $h_1^{\alpha_i} \leqslant \min_{0\leqslant j\leqslant m} h_2^{\alpha_j} \leqslant \min_{0\leqslant j\leqslant m} I_T(a_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i})$ per a cada $i \in \{0,1,\cdots,m\}$.

  ii. Es verifiquen les desigualtats:

$$\begin{aligned} h_1^{\alpha_j} &\leqslant h_1^{\alpha_k} && \text{per a tot } j \leqslant k \leqslant m\\ h_1^{\alpha_k} &\leqslant I_T(a_1^{\alpha_k}, b_1^{\alpha_k}) && \text{per a tot } j \leqslant k \leqslant m\\ h_1^{\alpha_j} &\leqslant \min_{0\leqslant j\leqslant m} I_T(a_1^{\alpha_k}, b_1^{\alpha_k}) && \text{per a tot } j \leqslant k \leqslant m\end{aligned}$$

En aquests sentit, tenint en compte els dos ítems anteriors, deduïm que

$$h_1^{\alpha_j} \leqslant r_1^{\alpha_j} \tag{5.20}$$

Similarment, com que $H \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ es verifica

$$h_2^{\alpha_j} \leqslant h_2^{\alpha_k} \qquad \text{per a tot } 0 \leqslant k \leqslant j \tag{5.21}$$

i, per tant, es té que

$$h_2^{\alpha_j} \leqslant \min_{0\leqslant k\leqslant j} I_T(a_2^{\alpha_k}, b_2^{\alpha_k}) = r_2^{\alpha_j}.$$

- Ara, veurem que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B) \in \mathbf{M}$. Per això, volem demostrar que $\mathcal{T}(A, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)) \preceq B$, que és equivalent a comprovar que per a cada nivell α_j $(j = 0, \cdots, m)$ es verifica la desigualtat $\mathcal{T}(A, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B))^{\alpha_j} \leqslant B^{\alpha_j}$, és a dir,

$$[T(a_1^{\alpha_j}, \min_{j\leqslant i\leqslant m} I_T(a_1^{\alpha_i}, b_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0\leqslant i\leqslant m} I_T(a_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i})), T(a_2^{\alpha_j}, \min_{0\leqslant i\leqslant j} I_T(a_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i}))] \leqslant [b_1^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j}]. \tag{5.22}$$

Per altra part, tenim que

$$T(a_1^{\alpha_j}, \min_{j\leqslant i\leqslant m} I_T(a_1^{\alpha_i}, b_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0\leqslant i\leqslant m} I_T(a_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i})) \leqslant T(a_1^{\alpha_j}, I_T(a_1^{\alpha_j}, b_1^{\alpha_j})) \leqslant b_1^{\alpha_j} \tag{5.23}$$

on la darrera desigualtat és certa perquè I_T és la implicació residuada obtinguda a partir de la t-norma T de L_n i aleshores aquesta satisfà la propietat de Modus Ponens (veure secció 2.3.2). Anàlogament,

$$T(a_2^{\alpha_j}, \min_{0\leqslant i\leqslant j} I_T(a_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i})) \leqslant T(a_2^{\alpha_j}, I_T(a_2^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j})) \leqslant b_2^{\alpha_j}. \tag{5.24}$$

Ara, aplicant les relacions (5.23) i (5.24) anteriors és dedueix l'equació (5.22) i així $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)$ és un element del conjunt $\mathbf{M}$.

Finalment, com a conseqüència dels dos ítmes anteriors, hem demostrat que el nombre borrós discret $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)$ és una fita superior del conjunt $\mathbf{M}$ i a més, que pertany a $\mathbf{M}$, és a dir, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)$ és l'element màxim del conjunt $\mathbf{M}$. □

Nota 5.2.5. *Volem destacar que en la demostració del teorema anterior es dedueix, en particular, que el suprem de l'equació 5.7 pot ser substituït per un màxim. Això és, per a qualsevol t-norma $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$, que és extensió d'una t-norma T de L_n, és té que*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B) = \max\{C \in \mathcal{A}_1^{L_n} \mid \mathcal{T}(A,C) \preceq B\}. \tag{5.25}$$

per a tot $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.

Exemple 5.2.6. *Considerem $T(x,y) = \min(x,y)$ la t-norma mínim definida a L_n i sigui*

$$I_{\min}(x,y) = \begin{cases} n & si \quad x \leqslant y \\ y & si \quad x > y \end{cases}$$

la seva implicació residuada. Volem emprar la fórmula 5.8 per calcular $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$. Siguin $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ on $A^{\alpha_j} = [a_1^{\alpha_j}, a_2^{\alpha_j}]$ i $B^{\alpha_j} = [b_1^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j}]$ denoten els seus α_j-nivells per A i B respectivament, per a qualsevol $0 \leqslant j \leqslant m$. Per obtenir els α_j-nivells $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha_j}$ procedirem per passos.

i. *Suposem que*

$$a_1^{\alpha_k} \leqslant b_1^{\alpha_k} \text{ per a tot } j \leqslant k \leqslant m$$
$$a_2^{\alpha_k} \leqslant b_2^{\alpha_k} \text{ per a tot } 0 \leqslant k \leqslant m$$

En aquest cas, obtenim que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha_j} = [n,n]$.

ii. *Suposem que*

$$a_1^{\alpha_k} \leqslant b_1^{\alpha_k} \text{ per a tot } j \leqslant k \leqslant m$$
$$a_2^{\alpha_k} > b_2^{\alpha_k} \text{ per algun } 0 \leqslant k \leqslant j$$

Denotem per $k_0 = \max\{0 \leqslant k \leqslant j,\ \text{tal que } a_2^{\alpha_k} > b_2^{\alpha_k}\}$. *En aquest cas, es té que* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha_j} = [b_2^{\alpha_{k_0}}, b_2^{\alpha_{k_0}}]$.

iii. *Suposem que*

$$a_1^{\alpha_k} \leqslant b_1^{\alpha_k} \text{ per a tot } j \leqslant k \leqslant m$$
$$a_2^{\alpha_k} \leqslant b_2^{\alpha_k} \text{ per a tot } 0 \leqslant k \leqslant j$$
$$a_2^{\alpha_k} > b_2^{\alpha_k} \text{ per algun } j < k \leqslant m$$

Denotem per $k_0 = \max\{j < k \leqslant m,\ \text{tal que } a_2^{\alpha_k} > b_2^{\alpha_k}\}$. *En aquest cas, resulta* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha_j} = [b_2^{\alpha_{k_0}}, n]$.

iv. *Sigui ara* $a_1^{\alpha_k} > b_1^{\alpha_k}$ *per algun* $j \leqslant k \leqslant m$. *Ara, denotem per* $k_0 = \min\{j \leqslant k \leqslant m \text{ tal que } a_1^{\alpha_k} > b_1^{\alpha_k}\}$. *En aquest cas, consideram dos casos:*

   a) *Si* $a_2^{\alpha_k} \leqslant b_2^{\alpha_k}$ *per a tot* $0 \leqslant k \leqslant j$ *aleshores* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha_j} = [b_1^{\alpha_{k_0}}, n]$.

   b) *Si* $a_2^{\alpha_k} > b_2^{\alpha_k}$ *per algun* $0 \leqslant k \leqslant j$ *llavors* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha_j} = [b_1^{\alpha_{k_0}}, b_2^{\alpha_{k_1}}]$ *on* $k_1 = \max\{0 \leqslant k \leqslant j \text{ tal que } a_2^{\alpha_k} > b_2^{\alpha_k}\}$.

Volem fer notar que els casos estudiats abans, cobreixen totes les possibilitats i així el α_j*-nivell de* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)$ *s'expressa sempre per uns dels intervals donats en aquests casos. En particular, notem que:*

1. *Si* $A \preceq B$, *estam en les condicions del primer cas per a tot* α_j *amb* $0 \leqslant j \leqslant m$ *i aleshores* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B) = 1_n$ *(veure la següent proposició 5.2.8 més endavant).*

2. *Si* $A \succ B$, *estem en el segon cas del 4t pas on* $k_0 = k_1 = j$ *per a tot* α_j *amb* $0 \leqslant j \leqslant m$. *És a dir,* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B) = B$.

3. *Si* A *i* B *no són comparables, s'aplica algun dels altres casos proposats per a calcular* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)$.

Nota 5.2.7. *R. Alcalde et al. [1], proposen un mètode constructiu que permet obtenir un operador d'implicació interval-valorat a partir d'un operador d'implicació borrós definit a l'interval* $[0,1]$. *En particular, aquest procediment és emprat per calcular R-implicacions interval-valorades. Així, si* I_T *es la implicació residual obtinguda a partir de la t-norma* T *definida en* $[0,1]$, *la R-implicació interval-valorada* $\mathbf{I_T}$ *(que serà anomenada extensió de la implicació residuada* I_T, *a* $I([0,1]) = \{[a,b], a, b \in [0,1], a \leqslant b\}$*) ve donada per la següent expressió:*

$$\mathbf{I_T}([a,b],[c,d]) = [I_T(a,c) \wedge I_T(b,d), I_T(b,d)] \tag{5.26}$$

Notem que, si consideram una cadena finita L_n *en comptes de l'interval unitat , és possible obtenir una fórmula semblant a l'expressada en (5.26), en el conjunt d'intervals tancats de* L_n, $I(L_n)$, *emprant en aquest cas operadors discrets (t-normes i funcions d'implicació definides en* L_n*) en* *comptes d'operadors definits en l'interval unitat. També, volem destacar que si consideram el subreticle*

$$\mathbb{B} = \{A \in \mathcal{A}_1^{L_n} \mid \mathrm{supp}(A) = \mathrm{core}(A)\} \subseteq \mathcal{A}_1^{L_n}, \tag{5.27}$$

té per elements els nombres borrosos discrets tals que els seus α-nivells són sempre iguals per a qualsevol $\alpha \in [0,1]$ i òbviament continguts en L_n. Per tant, si A, B són nombres borrosos discrets del conjunt $\mathbb{B}$ que tenen per α-nivells els intervals $[a,b]$ i $[c,d]$ respectivament, aleshores un simple càlcul mostra que

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)^{\alpha} = [I(a,c) \wedge I(b,d), I(b,d)]$$

per a tot $\alpha \in [0,1]$. És a dir, la fórmula (5.26) pot ser vista com un cas particular de la funció d'implicació residuada definida en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

En la següent proposició volem estudiar algunes propietats ben conegudes que són comuns a qualsevol funció d'implicació residuada.

Proposició 5.2.8. *Per a cada $A, B, C \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ la funció d'implicació $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ satisfà les següents propietats:*

P1. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_n, A) = A$. *(Neutralitat de la veritat).*

P2. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B) = 1_n$ *si i només si* $A \preceq B$. *(Propietat d'ordenació).*

P3. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,A) = 1_n$. *(Principi d'identitat).*

P4. $\mathcal{T}(A,B) \preceq C$ *si i només si* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,C) \succeq B$. *(Principi de residuació).*

P5. $\mathcal{T}(A, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B)) \preceq B$. *(Modus ponens).*

P6. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,B) \succeq B$.

P7. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B,C)) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(A,B),C)$. *(LLei d'importació per a $\mathcal{T}$).*

P8. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B,C)) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A,C))$. *(Principi d'intercanvi).*

Demostració. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que els nombres borrosos discrets $A, B, C \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ tenen per α_j-nivells els intervals definits de L_n $[a_1^{\alpha_j}, a_2^{\alpha_j}]$, $[b_1^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j}]$ i $[c_1^{\alpha_j}, c_2^{\alpha_j}]$ respectivament, on $0 \leqslant j \leqslant m$.

P1. En aquest cas, els valors per a cada component del α_j-nivell són $a_1^{\alpha_j} = a_2^{\alpha_j} = n$. Per altra part, d'acord a la condició d'anidament dels α_j-nivells (com A és un nombre borrós discret, i donat el fet de que I_T és la implicació residuada derivada de T definida a L_n),

$$\begin{aligned}
\min_{j \leqslant i \leqslant m} I_T(n, a_1^{\alpha_i}) &= \min_{j \leqslant i \leqslant m} a_1^{\alpha_i} = a_1^{\alpha_j} \\
\min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(n, a_2^{\alpha_i}) &= \min_{0 \leqslant i \leqslant m} a_2^{\alpha_i} = a_2^{\alpha_m} \\
\min_{0 \leqslant i \leqslant j} I_T(n, a_2^{\alpha_i}) &= \min_{0 \leqslant i \leqslant j} a_2^{\alpha_i} = a_2^{\alpha_j}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Ara, a partir de l'expressió (5.28) anterior, deduïm que els α_j-nivells de $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_n, A)$ seran:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1_n, A)^{\alpha_j} &= [\min_{j \leqslant i \leqslant m} I_T(n, a_1^{\alpha_i}) \wedge \min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(n, a_2^{\alpha_i}), \min_{0 \leqslant i \leqslant j} I_T(n, a_2^{\alpha_i})] \\
&= [a_1^{\alpha_j} \wedge a_2^{\alpha_m}, a_2^{\alpha_j}] = [a_1^{\alpha_j}, a_2^{\alpha_j}] = A^{\alpha_j}
\end{aligned}$$

P2. $\Leftarrow$ Suposem que $A \preceq B$, aleshores per a cada nivell α_j amb $j \in \{0, 1, \cdots, m\}$ tenim $A^{\alpha_j} \leqslant B^{\alpha_j}$, és a dir, $a_1^{\alpha_j} \leqslant b_1^{\alpha_j}$ i $a_2^{\alpha_j} \leqslant b_2^{\alpha_j}$.

Ara, com I_T és la implicació residuada obtinguda a partir de la t-norma T es verifiquen les següents relacions

$$\begin{aligned} I_T(a_1^{\alpha_j}, b_1^{\alpha_j}) &= n \\ I_T(a_2^{\alpha_j}, b_2^{\alpha_j}) &= n \end{aligned}$$

per a tot α_j. Per tant $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, B)^{\alpha_j} = [1, 1]$ per a tot α_j amb $j \in \{0, 1, \cdots, m\}$. Aleshores, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, B) = 1_n$.

$\Rightarrow$ En aquest cas, notam que

$$\begin{aligned} \min_{j \leqslant i \leqslant m} I_T(a_1^{\alpha_i}, b_1^{\alpha_i}) &= n \\ \min_{0 \leqslant i \leqslant m} I_T(a_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i}) &= n \\ \min_{0 \leqslant i \leqslant j} I_T(a_2^{\alpha_i}, b_2^{\alpha_i}) &= n \end{aligned} \tag{5.29}$$

Per tant, a partir d'aquestes darreres expressions (5.29) i donat el fet de que I_T és la implicació residuada, obtenim per a cada α_j que

$$a_1^{\alpha_j} \leqslant b_1^{\alpha_j} \quad \text{i} \quad a_2^{\alpha_j} \leqslant b_2^{\alpha_j}.$$

És a dir, $A \preceq B$.

P3. Immediata a partir de l'apartat anterior.

P4. Si $\mathcal{T}(A, B) \preceq C$ és clar per definició que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, C) \succeq B$. Recíprocament, sabem d'acord a la nota 5.2.5 que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, C)$ ve donat, de fet, pel màximum, és a dir, per l'equació 5.25 i així obtenim

$$\mathcal{T}(A, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, C)) \preceq C.$$

P5. S'ha provat en la demostració del teorema 5.2.4.

P6. És òbvia a partir de l'ítem P1 i del fet que $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ és decreixent en la primera variable.

P7. Volem veure que

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B, C)) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(A, B), C)$$

Per això, volem provar que els conjunts **A** i **B** donats per

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{D \in \mathcal{A}_1^{L_n} / \mathcal{T}(A, D) \preceq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B, C)\} \\ \mathbf{B} &= \{D \in \mathcal{A}_1^{L_n} / \mathcal{T}(\mathcal{T}(A, B), D) \preceq C\} \end{aligned}$$

són iguals. D'acord a la definició de $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$, del teorema 5.2.4 i pel fet de que $\mathcal{T}$ és una funció associativa, tenim

$$\begin{aligned} D \in \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathcal{T}(A, D) \preceq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B, C) &\Leftrightarrow \mathcal{T}(A, D) \preceq \max\{D \in \mathcal{A}_1^{L_n} / \mathcal{T}(B, D) \preceq C\} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{T}(B, \mathcal{T}(A, D)) \preceq C \Leftrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{T}(B, A), D) \preceq C \Leftrightarrow D \in \mathbf{B} \end{aligned}$$

És a dir, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Per tant,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B, C)) &= \max\{D \in \mathcal{A}_1^{L_n} / \mathcal{T}(A, D) \preceq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(B, C)\} \\ &= \max\{D \in \mathcal{A}_1^{L_n} / \mathcal{T}(\mathcal{T}(A, B), D) \preceq C\} \\ &= \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(A, B), C) \end{aligned}$$

P8. És deriva de l'apartat anterior i del fet de que $\mathcal{T}$ és commutativa.

$\square$

Corol·lari 5.2.9. *Sigui* T *una t-norma discreta sobre* L_n *i* $\mathcal{T}$ *la seva extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Sigui* $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ *la seva implicació residual definida en* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *i derivada a partir de* $\mathcal{T}$. *Aleshores* $(\mathcal{A}_1^{L_n}, 1_0, 1_n, \min, \max, \mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}})$ *és un reticle residuat fitat.*

Demostració. Sabem segons el teorema 3.2.32 $(\mathcal{A}_1^{L}, 1_0, 1_n, \min, \max)$ és una reticle afitat. I la residuació es deriva del les propietats de $\mathcal{T}$ i $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ demostrades en la proposició anterior. $\square$

Exemple 5.2.10. *Sigui* L_7 *una cadena finita i considerem* $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_7}$ *donats per*

$$A = \{0.7/2, 1/3, 0.9/4\}$$
$$B = \{0.6/1, 0.6/2, 0.7/3, 1/4, 0.8/5\}$$

Els seus conjunts de nivells vindran dotats per:

$$\begin{array}{lllll} A^{0.6} = [2,4] & A^{0.7} = [2,4] & A^{0.8} = [3,4] & A^{0.9} = [3,4] & A^{1} = [3,3] \\ B^{0.6} = [1,5] & B^{0.7} = [3,5] & B^{0.8} = [4,5] & B^{0.9} = [4,4] & B^{1} = [4,4] \end{array}$$

Calcularem $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, B)$ *en els següents dos casos:*

- *Sigui* $T_L(x, y) = \max\{0, x + y - 7\}$ *la t-norma de Łukasiewicz i* $I_T(x, y) = \min\{7, 7 + y - x\}$ *la seva implicació residuada. Aplicant la fórmula (5.8) obtenim*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, B) = \{0.6/6, 1/7\}$$

- *Ara sigui* $T(x, y) = \min(x, y)$ *la t-norma mínim i*

$$I_{\min}(x, y) = \begin{cases} 7 & \textit{if } x \leqslant y \\ y & \textit{si } x > y \end{cases}$$

la seva implicació residuada. De nou aplicant la fórmula (5.8) obtenim

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, B) = \{0.6/1, 0.6/2, 0.6/3, 0.6/4, 0.6/5, 0.6/6, 1/7\}$$

El teorema 5.2.4 demostra que per a cada t-norma $\mathcal{T}$ (que és extensió d'una t-norma T definida sobre L_n) és possible construir la seva implicació residuada $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$. Per altra banda, sabem que si consideram la implicació residuada sobre L_n, I_T, obtinguda a partir de la t-norma T, podem estendre-la obtenint una funció d'implicació en $\mathcal{A}_1^{L_n}$, que denotam per $\widetilde{I_T}$. Notem que l'exemple 5.2.1 prova que, en general, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} \neq \widetilde{I_T}$. Ara veurem en el següent exemple que la situació és la mateixa pel cas de la t-norma de Łukasiewicz.

Exemple 5.2.11. *Considerem la cadena* L_7 *i siguin* A, B *els nombres borrosos discrets de l'exemple anterior. Sigui* T *la t-norma de Łukasiewicz i* I_T *la seva implicación residual. Per una part, recordem que els* α*-nivells de* $\widetilde{I_T}$, *venen expressats per*

$$\widetilde{I_T}(A, B)^{\alpha} = [I_T(\max A^{\alpha}, \min B^{\alpha}), I_T(\min A^{\alpha}, \max B^{\alpha})].$$

Per tant,un senzill càlcul demostra que

$$\widetilde{I_T}(A, B) = \{0.6/4, 0.6/5, 0.7/6, 1/7\}.$$

Per altra part, hem vist en l'anterior exemple que

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A, B) = \{0.6/6, 1/7\}.$$

Denotem per I_S la (S,N)-implicació de L_n obtinguda a partir de la t-conorma S i la única negació forta $N(x) = n - x$. Notem que, quan T és la t-norma de Łukasiewicz i S la t-conorma de Łukasiewicz definides en L_n, és verifica que $I_T = I_S$ (veure proposició 2.3.19 dels preliminars). Però, en el nostre entorn aquesta propietat no és certa. Efectivament, és clar que $\widetilde{I_T} = \widetilde{I_S}$ i, com l'extensió d'una (S,N)-implicació de L_n produeix una (S,N)-implicació $\mathcal{A}_1^{L_n}$, també és verifica que $\widetilde{I_S} = \mathcal{I}_\mathcal{S}$. És a dir, en general,

$$\mathcal{I}_\mathcal{S} = \widetilde{I_T} \neq \mathcal{I}_\mathcal{T}.$$

5.3 EL RETICLE DE LES FUNCIÓ D'IMPLICACIÓ BORROSES

Es ben conegut [8] que en la família de totes les implicacions borroses, FI, definides sobre l'interval unitat és possible considerar un ordre parcial que ve induït per l'ordre natural que es defineix en el propi $[0, 1]$. Endemés, parelles de funcions d'implicacions no comparables, generen noves funcions d'implicacions a partir de les operacions $\min(\inf)$ i $\max(\sup)$. Per altra part, es possible considerar en aquest conjunt una estructura de reticle distributiu complet de la següent manera.

Teorema 5.3.1. *[8] La família* $(FI, \leqslant)$ *és un reticle distributiu complet amb les operacions reticulars següents:*

$$\begin{aligned} (I \vee J))(x, y) &= \max(I(x, y), J(x, y)) \ \textit{per a tot } x, y \in [0, 1] \\ (I \wedge J)(x, y) &= \min(I(x, y), J(x, y)) \ \textit{per a tot } x, y \in [0, 1] \end{aligned}$$

on $I, J \in FI$.

Seguint una idea semblant, en aquesta secció volem estudiar la possibilitat de construir noves funcions d'implicació en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, a partir de parelles de funcions d'implicació $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ que són extensions d'una parella (I, J) de funcions d'implicació definides sobre la cadena finita L_n. A més, provarem que en el conjunt de funcions d'implicació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$, $\mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$, que són extensions de funcions d'implicacions definides sobre L_n, és possible construir una estructura de reticle distributiu. Per fer això necessitam unes definicions prèvies.

Definició 5.3.2. *Siguin* $\mathcal{I}, \mathcal{I}' \in \mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$. *Considerem l'aplicació binària*

$$\begin{aligned} \max(\mathcal{I}, \mathcal{I}') : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\to \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A, B) &\to \max(\mathcal{I}, \mathcal{I}')(A, B) = \max(\mathcal{I}(A, B), \mathcal{I}'(A, B)) \end{aligned}$$

on max *és l'extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *de la t-conorma màxim sobre* L_n.

Proposició 5.3.3. *L'operació binària* $\max(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ *considerada abans és una funció d'implicació en el reticle fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Demostració. Similar a la demostració en el cas de l'interval unitat [8]. □

Anàlogament podem definir,

Definició 5.3.4. *Siguin* $\mathcal{I}, \mathcal{I}' \in \mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$. *Considerem l'aplicació binària*

$$\begin{aligned} \min(\mathcal{I}, \mathcal{I}') : \mathcal{A}_1^{L_n} \times \mathcal{A}_1^{L_n} &\to \mathcal{A}_1^{L_n} \\ (A, B) &\to \min(\mathcal{I}, \mathcal{I}')(A, B) = \min(\mathcal{I}(A, B), \mathcal{I}'(A, B)) \end{aligned}$$

on min *és l'extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *de la t-norma mínim sobre* L_n.

I de manera semblant tenim la següent proposició,

Proposició 5.3.5. *L'operació binària* $\min(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ *considerada abans és una funció d'implicació en el reticle fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

A partir del resultat anterior, és fàcil veure que $\mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$ té estructura de reticle amb les operacions definides en les proposicions 5.3.3 i 5.3.5 interpretades com a unió i intersecció respectivament.

Teorema 5.3.6. *El conjunt* $\mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$ *és un reticle distributiu amb les operacions:*

$$(\mathcal{I} \vee \mathcal{J})(A, B) = \max(\mathcal{I}, \mathcal{J})(A, B) \tag{5.30}$$

$$(\mathcal{I} \wedge \mathcal{J})(A, B) = \min(\mathcal{I}, \mathcal{J})(A, B) \tag{5.31}$$

on $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$ *representen les extensions de les funcions d'implicació definides sobre la cadena* L_n, I *i* J *respectivament.*

Demostració. El teorema 3.2.32 afirma que $(\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max)$ és un reticle fitat distributiu. Ara, d'acord a les propietats que verifiquen les operacions max i min el resultat es dedueix immediatament, ja que les propietats commutativa, associativa, idempotència, absorció i distributivitat de les operacions $\vee$ i $\wedge$ definides en 5.3.2 i en 5.3.4 respectivament, es dedueixen immediatament de les propietats anàlogues de les operacions max i min en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. □

Ara bé, tant $\max(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ com $\min(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ són en realitat extensions d'implicacions sobre L_n i, per tant pertanyen a $\mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$, com es veu en la següent proposició.

Proposició 5.3.7. *Siguin* I, I' *funcions d'implicació sobre* L_n *i siguin* $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ *les seves extensions a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Llavors es verifica que*

I) $\max(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ *és l'extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *de la funció d'implicació* $\max(I, I')$ *definida sobre* L_n.

II) $\min(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ *és l'extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *de la funció d'implicació* $\min(I, I')$ *definida sobre* L_n.

Al llarg d'aquest capítol hem vist que si les funcions d'implicació I, I' definides sobre L_n satisfan certes propietats, com ara, el principi d'intercanvi o la llei de contraposició aleshores les seves extensions $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ a $\mathcal{A}_1^{L_n}$ també les verifiquen. Emprant aquest fet tenim,

Proposició 5.3.8. *Siguin* I, I' *una parella de funcions d'implicació en* L_n *i siguin* $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ *les seves extensions a* $\mathcal{A}_1^{L}$.

i) Si les funcions d'implicació I *i* I' *són implicacions frontera a* L_n *aleshores* $\max(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ *i* $\min(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ *també ho són en el reticle* $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

ii) Si I, I' *verifiquen* (CL) *llavors* $\max(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ *i* $\min(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ *satisfan* (CL)

Demostració. Només demostrarem el cas de la funció $\max(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ perquè l'altre cas $\min(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ és semblant.

i) D'acord a la proposició 5.1.9 sabem que si I és una implicació frontera llavors la seva extensió $\mathcal{I}$ també ho és a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Aleshores per a tot $B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$

$$\begin{aligned} \max(\mathcal{I}, \mathcal{I}')(1_n, B) &= \max(\mathcal{I}(1_n, B), \mathcal{I}'(1_n, B)) \\ &= \max(B, B) \\ &= B \end{aligned}$$

Similarment pel mínim.

ii) Volem provar que

$$\max(\mathcal{I},\mathcal{I}')(A,B)=\max(\mathcal{I},\mathcal{I}')(\mathcal{N}(B),\mathcal{N}(A))$$

Per tant,

$$\max(\mathcal{I},\mathcal{I}')(A,B)=\max(\mathcal{I}(A,B),\mathcal{I}'(A,B))$$

Com $\mathcal{I},\mathcal{I}'$ verifiquen la propietat (CL)

$$=\max(\mathcal{I}(\mathcal{N}(B),\mathcal{N}(A)),\mathcal{I}'(\mathcal{N}(B),\mathcal{N}(A)))$$
$$=\max(\mathcal{I},\mathcal{I}')(\mathcal{N}(B),\mathcal{N}(A))$$

□

Baczyński i Jayaram [8], estudiem funcions d'implicació que no satisfan la llei de contraposició (CL) respecte de certes funcions de negació definides en l'interval unitat $[0,1]$. En aquest cas, aquests autors consideren un tipus de funcions d'implicació anomenades implicacions recíproques. Endemés, investiguen l'estructura de reticle que presenten.

Motivat per aquestes idees, volem investigar la possibilitat de construir funcions d'implicació recíproques definides en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Definició 5.3.9. *Sigui* N *la negació forta definida en* L_n*,* $\mathcal{N}$ *la seva extensió a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *i* $\mathcal{I}\in\mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$*. L´aplicació*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{N}}:\mathcal{A}_1^{L_n}\times\mathcal{A}_1^{L_n}&\to\mathcal{A}_1^{L_n}\\(A,B)&\to\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(A,B)\end{aligned}$$

on $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(A,B)=\mathcal{I}(\mathcal{N}(\mathcal{B}),\mathcal{N}(\mathcal{A}))$ *s'anomenarà* $\mathcal{N}$*-recíproca de* $\mathcal{I}$*.*

Teorema 5.3.10. *Per a cada* $\mathcal{I}\in\mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$*, es verifica que* $\mathcal{I}_{\mathcal{N}}$ *pertany al conjunt* $\mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$*.*

Demostració. Considerem $A,B,C\in\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Decreixent en la primera variable:

Com $\mathcal{N}$ és una negació forta en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$,es té que si $A\preceq B$ aleshores $\mathcal{N}(B)\preceq\mathcal{N}(A)$. Per altra part, com $\mathcal{I}$ creixent en la segona variable,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(A,C)=\mathcal{I}(\mathcal{N}(C),\mathcal{N}(A))\succeq\mathcal{I}(\mathcal{N}(C),\mathcal{N}(B))=\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(B,C)$$

Creixent en la segona variable:

Com $\mathcal{N}$ és una funció de negació forta en el reticle $\mathcal{A}_1^{L}$, tenim que si $B\preceq C$ aleshores $\mathcal{N}(B)\succeq\mathcal{N}(C)$. Però, com $\mathcal{I}$ és decreixent en la primera variable,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(A,B)=\mathcal{I}(\mathcal{N}(B),\mathcal{N}(A))\preceq\mathcal{I}(\mathcal{N}(C),\mathcal{N}(A))=\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(A,C)$$

Condicions frontera:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(1_0,1_0)&=\mathcal{I}(\mathcal{N}(1_0),\mathcal{N}(1_0))=\mathcal{I}(1_n,1_n)=1_n\\\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(1_n,1_n)&=\mathcal{I}(\mathcal{N}(1_n),\mathcal{N}(1_n))=\mathcal{I}(1_0,1_0)=1_n\\\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(1_0,1_0)&=\mathcal{I}(\mathcal{N}(1_0),\mathcal{N}(1_n))=\mathcal{I}(1_n,1_0)=1_0\end{aligned}$$

□

Proposició 5.3.11. *Sigui $\mathcal{N}$ la negació forta en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Si $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$ alehores l'operació considerada en la definició 5.3.9 preserva l'ordre, és a dir,*

$$\mathcal{I} \preceq \mathcal{J} \text{ implica que } \mathcal{I}_{\mathcal{N}} \preceq \mathcal{J}_{\mathcal{N}} \tag{5.32}$$

i endemés, també preserva les operacions reticulars, això és,

$$(\mathcal{I} \vee \mathcal{J})_{\mathcal{N}} = \mathcal{I}_{\mathcal{N}} \vee \mathcal{J}_{\mathcal{N}} \tag{5.33}$$

$$(\mathcal{I} \wedge \mathcal{J})_{\mathcal{N}} = \mathcal{I}_{\mathcal{N}} \wedge \mathcal{J}_{\mathcal{N}} \tag{5.34}$$

Demostració. Com $\mathcal{I} \preceq \mathcal{J}$ llavors per a tota parella $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ es verifica la relació $\mathcal{I}(A, B) \preceq \mathcal{J}(A, B)$. En particular, si consideram $\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B) \in \mathcal{A}_1^{L_n}$,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(A, B) = \mathcal{I}(\mathcal{N}(B), \mathcal{N}(A)) \preceq \mathcal{J}(\mathcal{N}(B), \mathcal{N}(A)) = \mathcal{J}_{\mathcal{N}}(A, B)$$

Per tant la relació (5.32) queda provada.

Ara, només demostrarem la relació (5.33) perquè l'altre cas (5.34) és similar. Per a cada $A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n}$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I} \vee \mathcal{J})_{\mathcal{N}}(A, B) &= (\mathcal{I} \vee \mathcal{J})(\mathcal{N}(B), \mathcal{N}(A)) \\
&= \max(\mathcal{I}, \mathcal{J})(\mathcal{N}(B), \mathcal{N}(A)) \\
&= \max(\mathcal{I}(\mathcal{N}(B), \mathcal{N}(A)), \mathcal{J}(\mathcal{N}(B), \mathcal{N}(A))) \\
&= \max(\mathcal{I}_{\mathcal{N}}(A, B), \mathcal{J}_{\mathcal{N}}(A, B)) \\
&= \max(\mathcal{I}_{N}, \mathcal{J}_{N})(A, B) \\
&= (\mathcal{I}_{\mathcal{N}} \vee \mathcal{J}_{\mathcal{N}})(A, B)
\end{aligned}$$

□

Aquesta proposició implica que l'operació donada en la definició 5.3.9 preserva l'estructura de reticle en $\mathcal{FI}(\mathcal{A}_1^{L_n})$. Finalment, a partir del teorema 5.3.6 i de la proposició 5.3.11, tenim

Teorema 5.3.12. *El conjunt de totes les funcions d'implicació recíproques és un reticle distributiu.*

6 PROCESSOS D'AGREGACIÓ EN EL CONJUNT DE NOMBRES BORROSOS DISCRETS

6.1 introducció

És ben conegut el problema d'agregar una col·lecció de dades (numèriques, borroses, etc) per tal d'obtenir un valor promig que pugui representar aquesta informació. Tal problema de fusió, està present en un nombre creixent d'àrees que no només inclouen les de matemàtiques i física, sinó també branques tan diverses del coneixement com l'enginyeria, l'economia, les ciències socials, etc [12, 94, 134, 147, 148, 156, 157, 158]. Habitualment, quan s'utilitzen dades borroses per realitzar una descripció de la informació, per exemple emprant nombres borrosos [148, 147], no es sol emprar un mètode que agregui directament la informació borrosa (per exemple, obtenint també un nombre borrós que faci una descripció el més acurada possible de les dades borroses agregades) sinó que generalment solen emprar un procés de defusificació previ, i finalment amb aquestes noves dades obtingudes, és usual considerar una mitjana ponderada o un altre operador d'agregació per obtenir un valor representatiu. Un objectiu d'aquest capítol, ha estat construir operadors que agreguin directament nombres borrosos discrets, i com a resultat d'aquesta operació, obtenir un nombre borrós discret que representi el més adientment possible les dades descrites per aquests conjunts borrosos. D'aquesta forma, pensam que s'evitarà una pèrdua d'informació en els processos de defusificació tradicionalment considerats a l'hora d'agregar informació expressada com a conjunts borrosos.

Per aquesta raó, s'han proposat diferents possibilitat d'estendre funcions d'agregació definides en una cadena finita L_n sobre el reticle fitat distributiu $\mathcal{A}_1^{L_n}$. S'ha demostrat que aquestes extensions produeixen funcions d'agregació sobre aquest reticle i que a més conserven moltes de les propietats de la funció d'agregació inicial. Així, hem vist que extensions de t-normes, t-conormes, uninormes, nulnormes i, en general, funcions d'agregació sobre L_n produeixen anàlogues funcions sobre el reticle borrós discret. El que ens plantejam ara, és la possibilitat d'emprar aquestes noves funcions d'agregació, en diferents problemes de presa de decisions. En aquest sentit, cal tenir present que aquesta proposta inclou dues idees noves. Per una part, l'utilització d'aquests nous operadors d'agregació borrosos en la presa de decisions, i per una altra part, la possibilitat d'emprar directament informació borrosa produint també, una decisió expressada com un nombre borrós discret resultat de l'agregació efectuada.

6.2 presa de decisions basades t-normes i t-conormes borroses discretes

Considerem una situació on hi ha un grup d'experts, i cadascun d'ells avalua una alternativa basada en un únic criteri. A més, per a realitzar aquesta valoració, es suposa que els especialistes utilitzen una escala ordinal finita $\mathfrak{L}$ (per exemple, $\mathfrak{L} = \{N, MB, B, M, A, MA, E\}$ on les etiquetes es refereixen als termes lingüístics nul, molt baix, baix, mitja, alt, molt alt i excel·lent). Es ben conegut, que aquesta pot ser interpretada com una cadena finita de nombres naturals consecutius L_n (en el cas anterior, L_6). Suposem endemés, que cadascun dels avaluadors té assignat un grau de credibilitat que ponderarà l'avaluació que realitzi i que dita ponderació s'expressarà amb un valor de l'escala ordinal elegida. En aquesta situació, el que tindrem és una col·lecció finita de parelles (w_i, a_i) (tantes com experts) on $w_i, a_i \in L_n$, i on w_i indicarà el pes associat a la valoració a_i efectuada per l'i-èssim expert (generalment basada en la credibilitat o importància que s'atribueix a dit expert). Un objectiu ben conegut és trobar funcions d'agregació adients per aquest tipus de problema.

Yager [158] suggereix un marc general per avaluar t-normes i t-conormes ponderades definides sobre una escala ordinal L_n, que resolen perfectament aquest problema inicialment plantejat. Per fer això, desenvolupa un marc teòric, i construeix operadors basats en t-conormes o t-normes, per a realitzar l'agregació d'una col·lecció d'arguments de la forma $(w_1, a_1), \cdots, (w_k, a_k)$, i on, en aquestes expressions, els valors a_j representen els valors argumentals (és a dir, la valoració efectuada per l'expert "j") i els valors w_j representen el pes que mesura la importància associada a cada argument a_j (interpretat com un grau de credibilitat atorgat a cada expert "j") sent $a_j, w_j \in L_n$ per a tot $j = 1, \cdots, k$.

Els dos mètodes que proposa són els següents:

A) Per a obtenir l'agregació dels valors $(w_1, a_1), (w_2, a_2), \cdots, (w_k, a_k)$:

1. En primer lloc transformam cada parella (w_i, a_i) en un únic valor $b_i = T(w_i, a_i)$ on T és una t-norma sobre la cadena L_n.
2. A partir dels valors obtinguts anteriorment, calculam $S(b_1, \cdots, b_n)$.

B) Per a obtenir l'agregació dels valors $(w_1, a_1), (w_2, a_2), \cdots, (w_k, a_k)$:

1. En primer lloc, transformam cada parella (w_i, a_i) en un únic valor $d_i = S(\overline{w}_i, a_i)$ on S és una t-conorma sobre la cadena L_n i $\overline{w}_i = N(w_i)$, on N representa la única negació forta existent en la cadena finita L_n.
2. A partir dels resultats obtinguts anteriorment, calculam $T(d_1, \cdots, d_n)$.

Nota 6.2.1. *En cadascuns dels dos mètodes proposats per Yager, quan es consideren graus de credibilitat als experts, es transforma cada parella (w_i, a_i) amb $i = 1, \cdots, k$, en un únic valor de la cadena finita L_n que s'obté emprant una funció (en el primer cas, una t-norma que s'aplica directament sobre la parella; i en el segon cas, una t-conorma que s'aplica al transformat de w_i per la negació forta sobre L_n, N, amb el valor a_i) que anomena funció d'importància. L'obtenció d'aquestes depèn de l'operador d'agregació que s'empri, i a més, de les propietats que se li exigeix: monotonia, consistència, etc. (Veure [156, 157, 158])*

Si ens basam en aquesta idea, i d'acord amb el que hem desenvolupat en els capítols anteriors, és possible considerar dues generalitzacions de cadascun d'aquests mètodes. En el nostre cas, els valors a_i seran considerats nombres borrosos discrets que pertanyent al reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. A més dels valors a_i, també considerarem els pesos associats a cadascun d'aquests elements, com a nombres borrosos discrets del reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Per tant el que farem a continuació, i en la pròxima secció 6.2.2, és proposar dues possibles extensions d'aquests procediments d'agregació que es basaran en la teoria exposada en aquest capítol.

Vegem en la següent secció una generalització del primer mètode, mètode A) de Yager i després en veurem una altra del segon mètode.

6.2.1 *t-conormes ponderades borroses discretes*

Siguin T i S una t-norma suau i una t-conorma suau respectivament sobre L_n. Endemés, siguin $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ les seves respectives extensions, d'acord al teorema 4.2.15 i a la nota 4.2.16. I finalment considerem $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathcal{A}_1^{L_n}$.

El problema és agregar $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathcal{A}_1^{L_n}$, possiblement ponderats, amb pesos $\{w_i\}_{\{i=1\cdots k\}}$ que pertanyen a la cadena finita L_n. Per a poder operar, cada pes $\omega_i \in L_n$ el considerarem com el nombre borrós discret $1_{\omega_i} \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ i llavors el procediment serà com segueix:

Primer pas: Transformam cada parella $(1_{w_i}, A_i)$ en un nombre borrós discret que pertany a $\mathcal{A}_1^{L_n}$, $B_i = \mathcal{T}(1_{w_i}, A_i)$, on el seus α-conjunts de nivell vindran donats per

$$\mathcal{T}(1_{w_i}, A_i)^\alpha = \{z \in L_n \mid T(w_i, \min A_i^\alpha) \leqslant z \leqslant T(w_i, \max A_i^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

Segon pas: Obtenim l'agregació de tots els $B_i = \mathcal{T}(1_{w_i}, A_i)$ amb $i = 1, \cdots, k$, donada per $\mathcal{S}(B_1, \cdots, B_k)$. Anomenarem a aquesta operació *t-conorma ponderada borrosa discreta*.

El valor $\mathcal{S}(B_1, \cdots, B_k)$ és un nombre borrós discret que pertany al reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que té per α-conjunts de nivell els conjunts:

$$\{z \in L_n \mid S(\min B_1^\alpha, \cdots, \min B_n^\alpha) \leqslant z \leqslant S(\max B_1^\alpha, \cdots, \max B_n^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

Nota 6.2.2. *Si* $w_i = n$ *per a cada* $i = 1, \cdots, k$ *aleshores* $B_i = \mathcal{T}(1_n, A_i) = A_i$ *per a tot* $i = 1, \cdots, k$. *Per tant, l'agregació resultant seria*

$$S((1_n, A_1), (1_n, A_2), \cdots, (1_n, A_k)) = S(A_1, \cdots, A_k)$$

Una altra possibilitat seria considerar els pesos ω_i també com a nombres borrosos discrets de $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Llavors,

El problema és agregar valors que pertanyen al reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, possiblement ponderats, amb pesos $\{W_i\}_{\{i=1\cdots k\}}$ que també pertanyen a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Per tant:

Primer pas: Transformam cada parella (W_i, A_i) en un nombre borrós discret que pertany al reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, $B_i = \mathcal{T}(W_i, A_i)$, que té per α-conjunts de nivell, els conjunts

$$\mathcal{T}(W_i, A_i)^\alpha = \{z \in L_n \mid \min T(\min W_i^\alpha, \min A_i^\alpha) \leqslant z \leqslant T(\max W_i^\alpha, \max A_i^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

Segon pas: Calculam el valor $\mathcal{S}(B_1, \cdots, B_n)$ que serà el nombre borrós discret del reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que té per α-conjunts de nivell, el conjunts

$$\{z \in L_n \mid S(\min B_1^\alpha, \cdots, \min B_k^\alpha) \leqslant z \leqslant S(\max B_1^\alpha, \cdots, \max B_n^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

A continuació proposam un exemple de presa de decisions on s'aplica el mètode exposat abans.

Exemple 6.2.3. *Considerem l'escala ordinal* $\mathfrak{L} = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$ *on les lletres es refereixen als termes lingüístic nul, molt baix, baix, mitja, alt, molt alt i perfecte. Endemés, aquests termes estan llistats en ordre creixent:* $N \prec MB \prec B \prec M \prec A \prec MA \prec P$. *És obvi que es possible considerar una aplicació bijectiva entre aquesta escala lingüística* $\mathfrak{L}$ *i la cadena finita* $L_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *amb l'ordre usual. A més, cada subconjunt borrós normal convex definit sobre l'escala* $\mathfrak{L}$ *pot ser considerat com un nombre borrós discret del reticle* $\mathcal{A}_1^{L_6}$, *i viceversa.*

Suposem que tres experts donen la seva opinió sobre una determinada decisió comercial i que aquestes opinions estan expressades per tres nombres borrosos discrets $O_1, O_2, O_3 \in \mathcal{A}_1^{L_6}$. *Endemés, cada expert té un grau de coneixement que vindrà determinat pels valors* $w_1, w_2, w_3 \in L_6$

respectivament. L'objectiu serà combinar cadascuna d'aquestes valoracions individuals per obtenir una decisió que pugui ser representativa de les opinions efectuades per aquest grup d'experts.

Considerem els nombres borrosos discrets

$$O_1 = \{0.3/1, 0.4/2, 0.7/3, 1/4, 0.8/5, 0.6/6\}$$
$$O_2 = \{0.2/0, 0.4/1, 1/2, 0.4/3, 0.2/4\}$$
$$O_3 = \{0.5/2, 0.6/3, 0.7/4, 1/5, 0.7/6\}$$

que pertanyent al reticle $\mathcal{A}_1^{L_6}$ *(representats a la figura 28). A més, considerem* $T_Ł(x, y) = \max(0, x+$

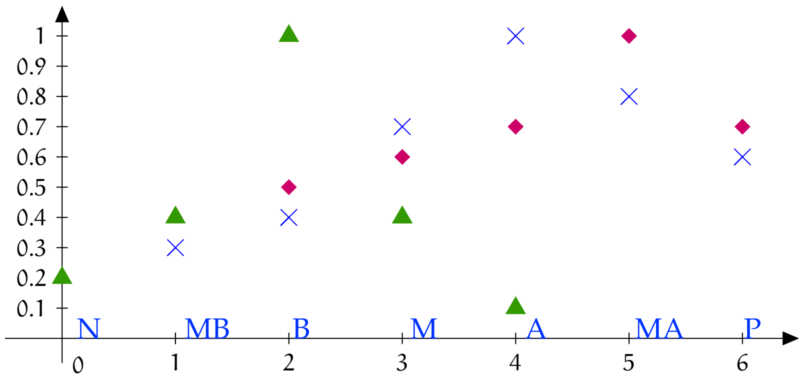

Figura 28: Opinions dels 3 experts corresponent a l'exemple 6.2.3. Les creus blaves representen l'avaluació del primer expert expressada amb el nombre borrós discret $O_1 \in \mathcal{A}_1^{L_6}$, els rombes vermells representen l'avaluació del segon expert $O_2 \in \mathcal{A}_1^{L_6}$, i els triangles verds representen l'avaluació del tercer expert $O_3 \in \mathcal{A}_1^{L_6}$.

$y - 6)$ *i* $S_Ł(x, y) = \min(6, x + y)$ *la t-norma i la t-conorma de Łukasiewicz, respectivament.*

Primer cas:

En aquest, els pesos venen donats pels valors $w_1 = 2, w_2 = 3$ *i* $w_3 = 2$*, que pertanyen a la cadena* L_6 *per a* O_1, O_2 *i* O_3 *respectivament. Si nosaltres aplicam el mètode proposat:*

1. *Transformam cada parella* (w_i, O_i) *en un nombre borrós discret que pertany al reticle* $\mathcal{A}_1^{L_6}$*, d'acord al valor* $B_i = \mathcal{T}(1_{w_i}, A_i)$ *on* $i = 1, 2, 3$*. Així, obtenim*

$$B_1 = \{1/0, 0.8/1, 0.6/2\}$$
$$B_2 = \{1/0, 0.2/1\}$$
$$B_3 = \{0.7/0, 1/1, 0.7/2\}$$

Aquests nombres borrosos discrets es poden veure representats en la figura 29.

2. *Calculam ara l'agregació* $\mathcal{S}(B_1, B_2, B_3)$*. Finalment resulta*

$$\mathcal{S}(B_1, B_2, B_3) = \{0.7/0, 1/1, 0.8/2, 0.7/3, 0.6/4, 0.2/5\}$$

representat en la figura 30. Ara, expressam aquest nombre borrós discret com un subconjunt borrós discret de la cadena ordinal $\mathfrak{L} = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$*. Finalment l'agregació obtinguda que representarà la decisió final serà el subconjunt borrós*

$$GCO = \{0.7/N, 1/MB, 0.8/B, 0.7/M, 0.6/A, 0.2/MA\}$$

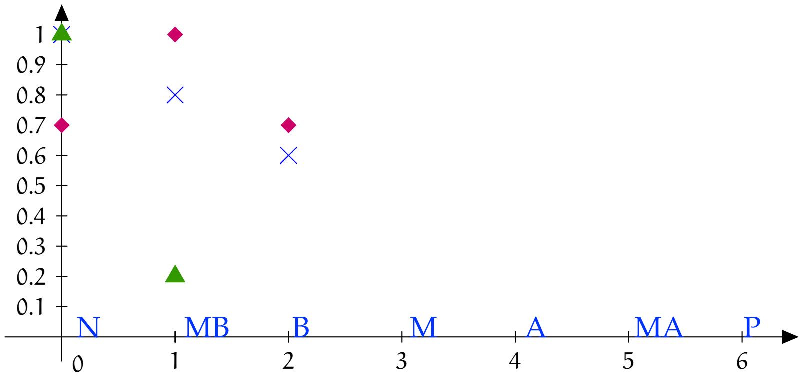

Figura 29: En la figura es representen els transformats $B_i = \mathcal{T}(1_{\omega_i}, O_i)$ per a $i = 1, 2, 3$ del primer cas de l'exemple 6.2.3. El nombre borrós discret B_1 està representat per creus blaves, el nombre borrós discret B_2 per triangules verds i B_3 està representat rombes vermells.

Per tant, la decisió comercial serà molt baixa. Per exemple, si la decisió comercial es tractàs de la venta d'una partida d'accions d'una determinada empresa, la decisió que es prendria, en aquest cas, seria de no vendre aquest paquet d'accions.

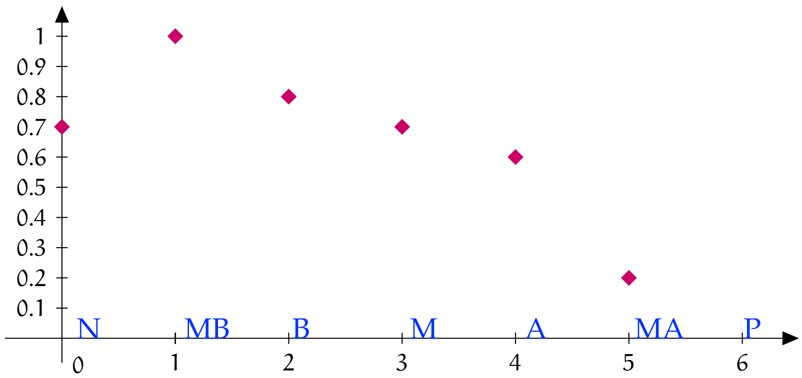

Figura 30: El nombre $\mathcal{S}(B_1, B_2, B_3) = \{0.7/0, 1/1, 0.8/2, 0.7/3, 0.6/4, 0.2/5\}$ determinarà la decisió final sobre la proposta comercial avaluada.

Segon cas:

En aquest cas, els pesos considerats són els nombres borrosos discrets

$$W_1 = \{0.6/1, 0.8/2, 1/3, 0.7/4\}$$
$$W_2 = \{0.4/2, 0.6/3, 1/4, 0.8/5\}$$
$$W_3 = \{0.4/3, 0.6/4, 1/5, 0.8/6\}$$

que pertanyen al reticle $\mathcal{A}_1^{L_6}$*, per a* O_1, O_2 *i* O_3 *respectivament. Si aplicam el procediment abans esmentat:*

1. *Transformam cada parella* (W_i, O_i) *en un nombre borrós discret del reticle* $\mathcal{A}_1^{L_6}$, $B_i =$

$\mathcal{T}(W_i, A_i)$ *on* $i = 1, 2, 3$. *Així, obtenim*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{0.8/0, 1/1, 0.8/2, 0.7/3, 0.6/4\} \\ B_2 &= \{1/0, 0.8/1, 0.4/2, 0.2/3\} \\ B_3 &= \{0.5/0, 0.6/1, 0.6/2, 0.7/3, 1/4, 0.8/5, 0.7/6\} \end{aligned}$$

Aquests nombres borrosos discrets estan representats en la figura 31.

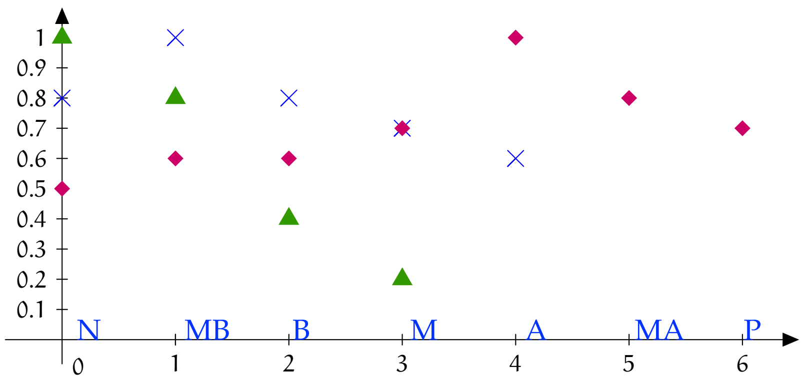

Figura 31: En la figura es representen els transformats $B_i = \mathcal{T}(W_i, O_i)$ per a $i = 1, 2, 3$ del segon cas de l'exemple 6.2.3. El nombre borrós discret B_1 està representat per creus blaves, el nombre borrós discret B_2 per triangules verds i B_3 està representat rombes vermells.

2. *Calculam l'agregació* $\mathcal{S}(B_1, B_2, B_3)$. *Finalment, resulta*

$$\mathcal{S}(B_1, B_2, B_3) = \{0.5/0, 0.6/1, 0.6/2, 0.7/3, 0.8/4, 1/5, 0.8/6\}$$

representat en la figura 32. Ara, si expressam aquest nombre borrós discret com un subconjunt borrós de la cadena ordinal $\mathfrak{L} = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$ *resulta*

$$GCO = \{0.5/N, 0.6/MB, 0.6/B, 0.7/M, 0.8/A, 1/MA, 0.8/P\}$$

Per tant, en aquest cas la decisió comercial és molt favorable. Per exemple, si la decisió comercial és vendre un paquet d'accions d'una companyia, la decisió final serà vendre aquestes accions.

En la següent secció proposam una altra generalització del mètode B) proposat per Yager on, en aquest cas, es considerem com a operadors extensions de t-normes n-dimensionals i les aplicarem a l'avaluació subjectiva.

6.2.2 *t-normes ponderades borroses discretes: Agregacions d'avaluacions subjectives*

En els darrers anys, un gran nombre d'investigadors han aplicat conceptes propis de la teoria de conjunts borrosos amb l'objectiu d'obtenir mètodes més eficients per a realitzar avaluacions d'estudiants. En aquesta direcció, destacar els treballs de R. Biswas [15] on proposa l'ús d'una escala lingüística borrosa i una funció de similaritat que utilitzarà, juntament amb una funció d'agregació (mitjana ponderada), per obtenir la nota final d'un determinat tipus de qüestionaris. Aquest mètode mostra una bona aplicació de la teoria de conjunts borrosos [161] en l'educació. Amb aquesta idea, Chen i Lee [53],

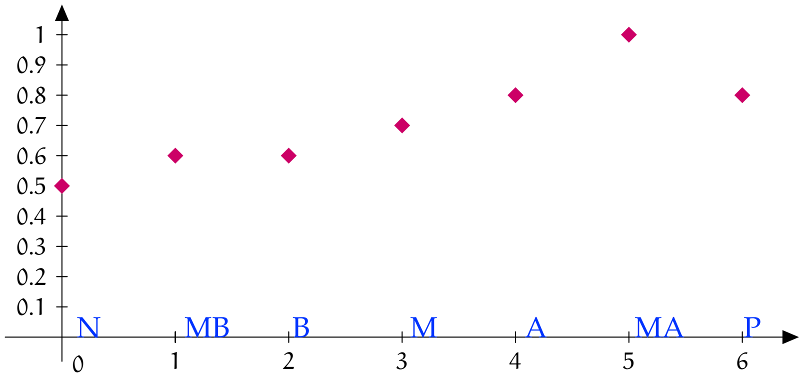

Figura 32: El nombre $\mathcal{S}(B_1, B_2, B_3) = \{0.5/0, 0.6/1, 0.6/2, 0.7/3, 0.8/4, 1/5, 0.8/6\}$ determinarà la decisió final sobre la proposta comercial avaluada.

presenten un primer mètode que intenta millorar el proposat per Biswas. El procediment presentat per aquests autors, resol els principals problemes que presentava el mètode de Biswas (gran quantitat de temps per a la realització dels càlculs i certes ambigüitats en l'assignació de les notes borroses), i a més, resulta més senzill d'aplicar a l'hora d'obtenir el resultat de l'avaluació dels estudiants. Seguint l'idea de modelitzar avaluacions mitjançant subconjunts borrosos, Wang i Chen (veure [147] i [148]), presenten una altre algorisme per l'avaluació de qüestionaris d'estudiants emprant nombres borrosos. Així, cadascun dels valors avaluats venen associats amb un grau de confidència entre 0 i 1, i un grau d'optimisme de l'avaluador, que permetrà calcular finalment un valor que representarà la nota final aconseguida en aquest procés d'avaluació.

De fet, una característica que s'observa en tots aquests mètodes d'avaluació, és que, en aquests processos es planteja el problema d'agregar una col·lecció d'entrades per obtenir un valor mitjà representatiu. El que passa en els mètodes exposats abans [15, 147, 148], és que els nombres borrosos o etiquetes lingüístiques borroses emprades per cada avaluador, no són directament agregades, sinó que prèviament són defusificades, i desprès una mitjana aritmètica ponderada dels valors defusificats, és habitualment emprada per obtenir la valoració final. El nostre objectiu serà aplicar t-normes ponderades borroses per agregar directament les avaluacions subjectives (expressades com a nombres borrosos discrets amb suport un subconjunt de nombres naturals consecutius de L_n), perquè d'aquesta forma pensam que es perdrà menys informació donat que en el procés d'agregació sempre utilitzam informació borrosa que produirà també un subconjunt borrós del mateix tipus.

Abans de començar repassarem un dels principals mètodes que es troben en la literatura.

Mètode de Wang i Chen

En el mètode de Wang i Chen, és proposen 9 nivells de satisfacció per avaluar als estudiants, a partir de les respostes que s'han donat a les preguntes plantejades en els qüestionaris. Els nivells de satisfacció atorgats a cada resposta per aquests autors són: Extremadament Dolenta, Molt Dolenta, Dolenta, Més o manco Dolenta, Normal, Més o manco Bona, Bona, Molt Bona i Extremadament bona.

Aquests nou nivells de satisfacció estan representats per nombres borrosos triangulars (veure la taula 1). Cada nivell de satisfacció F_i, és associat amb el grau de confidència α_i de l'avaluador. El concepte de grau de confidència associat a cada nivell de satisfacció, que s'ha atorgat a cada pregunta puntuada, és entès com el grau de certesa de l'avaluador. Per tant, aquests autors interpreten que, el major grau de confidència que s'associa amb el nivell de puntuació assignat a la resposta de cada pregunta, és el major grau de certesa que un avaluador puntua d'acord al nivell de significació assignat a la resposta de la qüestió.

En concret el procés que utilitzen aquests autors és:

- Pas 1: Calculam el α_i-conjunt de nivell $(F_i)_{\alpha_i}$ del nombre borrós F_i, amb $0 \leqslant i \leqslant k$, aleshores $(F_i)_{\alpha_i} = [a_i, b_i]$, per a cada $0 \leqslant i \leqslant k$.

- Pas 2: Calculam la mitjana aritmètica ponderada dels intervals $(F_i)_{\alpha_i}$, amb $0 \leqslant i \leqslant k$, és a dir, l'interval:

$$[m_1, m_2] = \frac{\sum_{i=1}^{k} s_i (F_i)_{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{k} s_i} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} s_i a_i}{\sum_{i=1}^{k} s_i}, \frac{\sum_{i=1}^{k} s_i b_i}{\sum_{i=1}^{k} s_i} \right]$$

- Pas 3: La nota total de l'estudiant és determinada de la següent manera:

$$(1 - \lambda) \times m_1 + \lambda \times m_2$$

  on λ denota l'índex d'optimisme determinat per l'avaluador i on el paràmetre $\lambda \in [0, 1]$. Finalment aquesta nota té associat un grau de confidència que es calcula a partir de l'expressió $\min(\alpha_i)$, on $0 \leqslant i \leqslant k$.

Els nombres borrosos triangulars emprats per Wang i Chen com a nivells de satisfacció estan representats en la següent taula:

Nivells de satisfacció	Nombre borrós triangular
Extremadament Bona	(100,100,100)
Molt Bona	(90,100,100)
Bona	(70,90,100)
Més o manco Bona	(50,70,90)
Normal	(30,50,70)
Més o manco Dolenta	(10,30,50)
Dolenta	(0,10,30)
Molt Dolenta	(0,0,10)
Extremadament Dolenta	(0,0,0)

Taula 1: Nivells de satisfacció

Vegem un exemple senzill d'aplicació d'aquest mètode:

Exemple 6.2.4. *Suposem que el qüestionari inclou 4 qüestions i que l'avaluador puntua cadascuna d'elles emprant els nombres borrosos que podem veure en la taula 2 respectivament.*

Els intervals de confidència associats als corresponents nivells de significació de les preguntes Q_1, Q_2, Q_3 *i* Q_4 *són* $[65, 75], [90, 90], [25, 35]$ *i* $[99.5, 100]$ *respectivament (Es poden veure representats en la figura 33.)*

Ara, si consideram $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 25$*, aleshores la mitjana aritmètica dels intervals és* $[69.875, 75]$*. Finalment, si agafam* $\lambda = 0.75$ *com a índex d'optimisme, obtenim que la nota total serà*

Qüestion No.	Nivell de Satisfacció	Grau de confidència dels Nivells de significació
Q1	Més o manco Bona	0.75
Q2	Bona	1
Q3	Més o manco Dolenta	0.75
Q4	Molt Bona	0.95

Taula 2: Mètode de Wang i Chen segons l'exemple 6.2.4

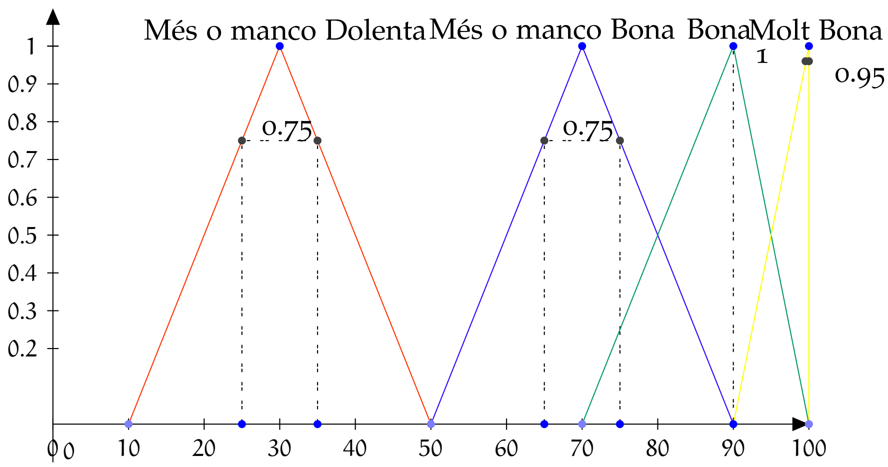

Figura 33: Interval de confidència

73.71875. Sent el grau de confidència de la nota total de l'estudiant igual a $\min(0.75, 0.75, 1, 0.95) = 0.75$.

A la vista de l'exemple 6.2.4, Wang i Chen agregen intervals que han estat obtinguts a partir d'un procés de defusificació dels nombres borrosos emprats en el procés de puntuació de les preguntes avaluades. A partir d'aquesta assignació, s'obté un nou interval que serà defusificat emprant l'index d'optimisme. D'aquesta forma, es veu que els nombres borrosos inicialment considerats, no són agregats directament, ni el resultat final del procés avaluador s'expressa com un nombre borrós. Aquests autors el que fan és calcular una mitjana aritmètica ponderada dels intervals obtinguts a través del procés de defusificació, i finalment, amb aquest nou interval obtenen un valor numèric final (que serà el resultat de l'avaluació) emprant una funció que depèn de l'index d'optimisme elegit.

En conclusió, en el mètode anterior, així com els procediments establerts en [15, 53, 147, 148] els nombres borrosos no són agregats directament. Per tant, en el procés de defusificació una gran quantitat d'informació i de característiques es perden. Per aquesta raó, pensam que la possibilitat de construir funcions d'agregació que agreguin directament subconjunts borrosos i que produeixin com a resultat un subconjunt borrós de la mateixa família, implicaria una minimització de la pèrdua d'informació a l'hora de realitzar un procés d'avaluació borrosa.

El següent mètode proposa un possible camí per obtenir una avaluació subjectiva basantnos en operadors ponderats discrets borrosos.

Primer cas:

El problema que ens plantejam és agregar valors del conjunt $\mathcal{A}_1^{L_n}$, possiblement ponderats, amb pesos $\{w_i\}_{\{i=1\cdots k\}}$ que pertanyen a la cadena finita L_n. Per tant,

Primer pas:

Transformam cada parella $(1_{w_i}, A_i)$ en un nombre borrós discret que pertany al reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, $B_i = \mathcal{S}(\mathcal{N}(1_{w_i}), A_i)$, on els seus α-conjunts de nivells,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathcal{N}(1_{w_i}), A_i)^\alpha &= \{z \in L_n \mid S(N(w_i), \min A_i^\alpha) \leqslant z \leqslant S(N(w_i), \max A_i^\alpha)\} \\ &= \{z \in L_n \mid S(n - w_i, \min A_i^\alpha) \leqslant z \leqslant S(n - w_i, \max A_i^\alpha)\}\end{aligned}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

Segon pas:

Calculam l'agregació $\mathcal{T}(B_1, \cdots, B_k)$.

El valor $\mathcal{T}(B_1, \cdots, B_k)$ és un nombre borrós discret que té per α-conjunts de nivells els conjunts $\mathcal{T}(B_1, \cdots, B_k)^\alpha$, definits com

$$\{z \in L_n \mid T(\min B_1^\alpha, \cdots, \min B_k^\alpha) \leqslant z \leqslant T(\max B_1^\alpha, \cdots, \max B_k^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

Nota 6.2.5. *Podem observar que si* $w_j = n$ *per a tot* $j = 1, \cdots, k$ *aleshores* $\mathcal{N}(1_{w_j}) = 1_0$ *i* $B_i = \mathcal{S}(\mathcal{N}(1_n), A_i) = A_i$ *per a tot* $j = 1, \cdots, k$. *Llavors, l'agregació resultant seria:*

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}(\mathcal{N}(1_n), A_1), \cdots, \mathcal{S}(\mathcal{N}(1_n), A_k)) = \mathcal{T}(A_1, \cdots, A_k).$$

Segon cas:

Podríem igualment considerar els pesos com a nombres borrosos discrets de $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Llavors, el problema és agregar valors del reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, possiblement ponderats, amb pesos $\{W_i\}_{\{i=1\cdots k\}}$ que també pertanyen al reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. D'aquesta forma,

Primer pas:

Transformar cada parella (W_i, A_i) en un nombre borrós discret que pertany al reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, $B_i = \mathcal{S}(\mathcal{N}(W_i), A_i)$, que té per α-conjunts de nivell, $\mathcal{S}(\mathcal{N}(W_i), A_i)^\alpha$, els següents conjunts

$$\{z \in L_n \mid S(\min \mathcal{N}(W_i)^\alpha, \min A_i^\alpha) \leqslant z \leqslant S(\max \mathcal{N}(W_i)^\alpha, \max A_i^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$, i $\mathcal{N}(W_i)$ construïts d'acord a la proposició 4.2.27.

Segon pas:

Calculam el valor $\mathcal{T}(B_1, \cdots, B_k)$, que serà el nombre borrós discret que té per α-conjunts de nivells, $\mathcal{T}(B_1, \cdots, B_k)^\alpha$, els conjunts

$$\{z \in L_n \mid T(\min B_1^\alpha, \cdots, \min B_k^\alpha) \leqslant z \leqslant T(\max B_1^\alpha, \cdots, \max B_k^\alpha)\}$$

per a cada $\alpha \in [0, 1]$.

Exemple 6.2.6. *Considerarem la mateixa escala lingüística proposada per Wang i Shen [148]* $\mathfrak{L} = \{EB, VB, B, MB, F, MG, G, VH, EG\}$ *identificada amb* L_8*, on aquests termes estan expressats en ordre creixent:*

$$EB \prec VB \prec B \prec MB \prec F \prec MG \prec G \prec VH \prec EG.$$

Suposem també que tres experts donen la seva opinió sobre un aspecte d'una determinada aptitud educativa d'un alumne (per exemple, necessitat d'ajuda psicològica, aptituds envers a ciències o lletres, avaluar la maduresa personal, etc.) i que aquestes opinions estan expressades per tres nombres borrosos discrets $O_1, O_2, O_3 \in \mathcal{A}_1^{L_8}$*. Endemés, cada expert té un grau de coneixement* $w_1, w_2, w_3 \in L_8$ *respectivament. El propòsit es combinar les opinions individuals per aconseguir una opinió final basada en t-normes i t-conormes borroses discretes ponderades.*

Suposem que les opinions atorgades per cada expert són

$$\begin{aligned} O_1 =& \{0.3/3, 0.4/4, 0.7/5, 1/6, 0.8/7, 0.6/8\} \\ O_2 =& \{0.2/2, 0.4/3, 1/4, 0.4/5, 0.2/6\} \\ O_3 =& \{0.5/4, 0.6/5, 0.7/6, 1/7, 0.7/8\} \end{aligned}$$

que òbviament pertanyen al reticle $\mathcal{A}_1^{L_8}$ *(representats a la figura 34). A més, considerem la t-norma de* Łukasiewicz $T_Ł(x,y) = \max(0, x+y-8)$ *i la t-conorma de* Łukasiewicz $S_Ł(x,y) = \min(8, x+y)$.

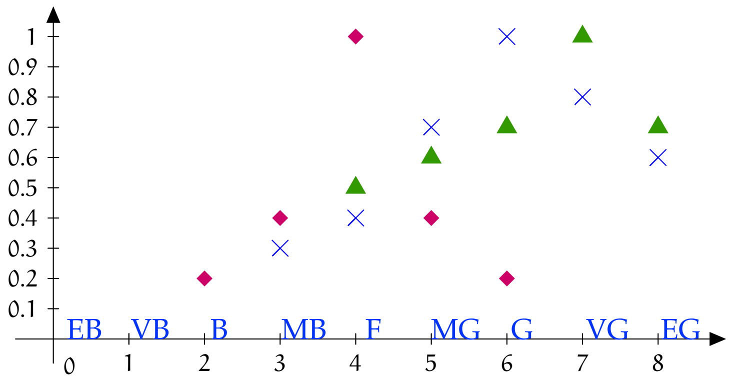

Figura 34: Opinions dels 3 experts corresponent a l'exemple 6.2.6. Les creus blaves representen l'opinió del primer expert O_1, els rombes vermells representen l'opinió del segon expert O_2, i els triangles verds representen la del tercer expert O_3.

Primer cas:

En aquest cas els pesos considerats són $w_1 = 5, w_2 = 4$ *i* $w_3 = 3$ *que pertanyen a la cadena* L_6 *per a* O_1, O_2 *i* O_3 *respectivament. Si aplicam el procediment proposat:*

1. *Transformam cada parella* (w_i, O_i) *en un nombre borrós discret del reticle* $\mathcal{A}_1^{L_8}$, $B_i = \mathcal{S}(\mathcal{N}(1_{w_i}), A_i)$ *on* $i = 1, 2, 3$*. Així, obtenim*

$$\begin{aligned} B_1 =& \{0.3/6, 0.4/7, 1/8\} \\ B_2 =& \{0.2/6, 0.4/7, 1/8\} \\ B_3 =& \{1/8\} \end{aligned}$$

2. *Calculam l'agregació* $\mathcal{T}(B_1, B_2, B_3)$. *Finalment resulta*

$$\mathcal{T}(B_1, B_2, B_3) = \{0.2/4, 0.3/5, 0.4/6, 0.4/7, 1/8\}$$

Ara, expressam aquest nombre borrós discret com un subconjunt normal de l'escala ordinal $\mathfrak{L} = \{EB, VB, B, MB, F, MG, G, VH, EG\}$. *Finalment la decisió final serà*

$$DF = \{0.2/F, 0.3/MG, 0.4/G, 0.4/VH, 1/EG\}$$

Per tant, l'opinió de consens sobre l'aspecte educatiu tractat és molt favorable (veure figura 35). Per exemple, en el cas de considerar com aspecte la possibilitat d'ajuda psicològica a l'alumne avaluat, la decisió final serà favorable a la mateixa.

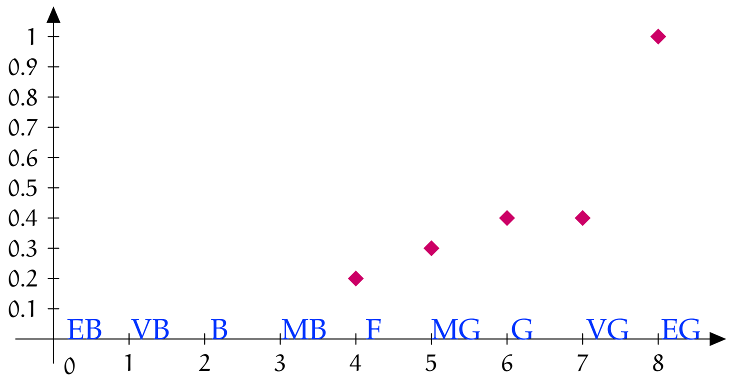

Figura 35: Representació del nombre borrós discret que representa la decisió final obtinguda aplicant el procés descrit al primer cas de l'exemple 6.2.6.

Segon cas:

En aquest cas els pesos considerats seran

$$\begin{aligned} W_1 &= \{0.6/1, 0.8/2, 1/3, 0.7/4\} \\ W_2 &= \{0.4/2, 0.6/3, 1/4, 0.8/5\} \\ W_3 &= \{0.4/3, 0.6/4, 1/5, 0.8/6\} \end{aligned}$$

per a O_1, O_2 *i* O_3 *respectivament, que pertanyen al reticle* $\mathcal{A}_1^{L_8}$. *Si aplicam el procediment proposat:*

1. *Transformam cada parella* (W_i, O_i) *en un nombre borrós discret de* $\mathcal{A}_1^{L_8}$, $B_i = \mathcal{S}(\mathcal{N}(W_i), A_i)$ *on* $i = 1, 2, 3$. *Així,*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{0.3/7, 1/8\} \\ B_2 &= \{0.2/5, 0.4/6, 0.8/7, 1/8\} \\ B_3 &= \{0.5/6, 0.6/7, 1/8\} \end{aligned}$$

2. *Calculam l'agregació* $\mathcal{T}(B_1, B_2, B_3)$. *Finalment resulta*

$$\mathcal{T}(B_1, B_2, B_3) = \{0.2/2, 0.3/3, 0.4/4, 0.5/5, 0.6/6, 0.8/7, 1/8\}$$

expressam aquest nombre borrós discret com un subconjunt normal de l'escala ordinal $\mathfrak{L} = \{EB, VB, B, MB, F, MG, G, VH, EG\}$. *Finalment la decisió final serà*

$$DF = \{0.2/B, 0.3/MB, 0.4/F, 0.5/MG, 0.6/G, 0.8/VH, 1/EG\}$$

Per tant, l'opinió de consens sobre l'aspecte educacional tractat és molt favorable (veure figura 36) . Per exemple, en el cas de considerar com aspecte educacional la valoració d'aptituds respecte de posteriors estudis relacionats en ciències, la decisió final serà favorable a la mateixa.

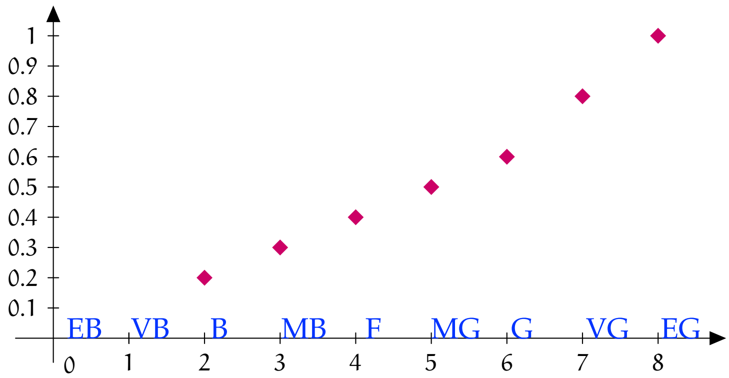

Figura 36: Representació del nombre borrós discret que representa la decisió final obtinguda aplicant el procés descrit del segon cas de l'exemple 6.2.6.

6.3 evaluacions subjectives basades en extensions d'uninormes discretes

Com s'ha comentat en la secció anterior, un gran nombre d'investigadors [15, 53, 148, 147] han proposats mètodes d'avaluació emprant conceptes propis de conjunts borrosos. El que proposam ara en la subsecció 6.3.1 és emprar extensions d'uninormes idempotents per a agregar avaluacions subjectives efectuades per un conjunt d'experts[1].

Finalment, en la secció 6.3.2 es proposa una possible aplicació de les funcions d'agregació basades en extensions de parelles d'uninormes discretes en un problema de presa de decisions[2].

6.3.1 *Processos d'avaluació basats en extensions d'uninormes idempotents discretes*

En qualsevol sistema educatiu, l'avaluació és una part fonamental en el procés d'ensenyança-aprenentatge. Aquest procés d'avaluació depèn de diferents paràmetres. Per exemple, és interessant conèixer les motivacions i aptituds d'un estudiant, l'esforç realitzat per un estudiant o la determinació d'aptituds en aspectes científics o humanístics, entre d'altres. Molts d'aquests paràmetres podran ser modelats emprant conceptes de teoria de conjunts borrosos. En la secció 6.2.2 hem recordat alguns mètodes ben coneguts d'avaluació subjectiva d'estudiants. Amb aquesta direcció, volem proposar un altre possibilitat de realitzar avaluacions subjectives emprant extensions d'uninormes idempotents discretes. Amb aquest tipus de funcions d'agregació borroses proporcionam un mètode que permet agregar directament avaluacions subjectives realitzades per un grup de professors per obtenir una decisió final sobre un determinat aspecte educatiu d'estudiant en un determinat període educatiu (trimestre, semestre, etc).

1 En comptes d'uninormes discretes podríem emprar evidentment, qualsevol altre tipus de funció d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ segons els casos.

2 Prodríem emprar anàlogament parelles de funcions d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ de qualsevol tipus.

Suposem que r professors avaluen un conjunt de paràmetres $\mathbf{P} = \{P_1, \cdots, P_s\}$ del procés d'avaluació (per exemple P_1= l'esforç realitzat per un estudiant i P_2= la seva motivació i aptituds). Endemés, les avaluacions corresponents als paràmetres $P_i \in \mathbf{P}$ estan expressades per r nombres borrosos discrets que pertanyen al reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Suposem que $O_1^{P_i}, \cdots, O_r^{P_i} \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ denoten les avaluacions efectuades per cada expert corresponent al paràmetre P elegit [3].

Suposem que l'avaluador utilitza la taula 3 per indicar la seva satisfacció de cada paràmetre $P_i \in \mathbf{P}$ expressat com un nombre borrós discret del reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. En aquesta taula, la primera columna indica el nombre de l'avaluador, les columnes compreses entre la segona i la penúltima indiquen les notes borroses assignades a cada P_i des del primer paràmetre P_1 fins al darrer paràmetre P_s respectivament. La darrera columna (anomenada Nivell de Satisfacció) indica l'agregació de les notes borroses que un avaluador ha proporcionat. Aquesta agregació ha estat obtinguda emprant l'extensió d'una uninorma idempotent, U_j, definida sobre la cadena L_n. Finalment, la darrera fila indica l'agregació dels graus de satisfacció dels avaluadors.

El mètode proposat per realitzar l'avaluació d'estudiants es presenta a continuació:

PAS 1: Cada professor O_j realitza una avaluació $O_j^{P_i} \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ de tots el paràmetres $P_i \in \mathbf{P}$ elegits per a l'avaluació del estudiant.

PAS 2: Cada professor d'acord a la seva experiència utilitza una uninorma $\mathcal{U}_j$ (obtinguda a partir de l'extensió d'una uninorma idempotent discreta U_j definida sobre la cadena L_n) per a calcular l'agregació de totes les seves valoracions $\mathcal{U}_j(O_j^{P_1}, \cdots, O_j^{P_s})$.

PAS 3: Finalment, es calcula una agregació de totes les avaluacions $\mathcal{U}_j(O_j^{P_1}, \cdots, O_j^{P_s})$ efectuades pels professors (emprant una uninorma $\mathcal{U}$ obtinguda a partir de l'extensió d'una uninorma idempotent discreta U, definida sobre la cadena L_n) d'acord a l'expressió $\mathcal{U}(\mathcal{U}_1(O_1^{P_1}, \cdots, O_1^{P_s}), \cdots, \mathcal{U}_r(O_r^{P_1}, \cdots, O_r^{P_s}))$.

Nom del professor	P_1	P_2	$\cdots$		P_s	Nivell de satisfacció
O_1	$O_1^{P_1}$	$O_1^{P_2}$	$\cdots$	$\cdots$	$O_1^{P_s}$	$\mathcal{U}_1(O_1^{P_1}, \cdots, O_1^{P_s})$
O_2	$O_2^{P_1}$	$O_2^{P_2}$	$\cdots$	$\cdots$	$O_2^{P_s}$	$\mathcal{U}_2(O_2^{P_1}, \cdots, O_2^{P_s})$
O_3	$O_3^{P_1}$	$O_3^{P_2}$	$\cdots$	$\cdots$	$O_3^{P_s}$	$\mathcal{U}_3(O_3^{P_1}, \cdots, O_3^{P_s})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
O_r	$O_r^{P_1}$	$O_r^{P_2}$	$\cdots$	$\cdots$	$O_r^{P_s}$	$\mathcal{U}_r(O_r^{P_1}, \cdots, O_r^{P_s})$
Agregació de les notes borroses= $\mathcal{U}(\mathcal{U}_1(O_1^{P_1}, \cdots, O_1^{P_s}), \cdots, \mathcal{U}_r(O_r^{P_1}, \cdots, O_r^{P_s}))$						

Taula 3: Taula d'avaluacions de r experts

Exemple 6.3.1. *Considerarem la mateixa escala lingüística proposada per Wang i Shen [148]* $\mathfrak{L} = \{EB, VB, B, MB, F, MG, G, VH, EG\}$ *identificada amb* L_8, *on aquests termes estan expressats en ordre creixent:*

$$EB \prec VB \prec B \prec MB \prec F \prec MG \prec G \prec VH \prec EG$$

3 Per suposat, els paràmetres P_i poden representar diferents qüestions en un text, com es dona en el mètode de Wang i Chen, i aleshores $O_j^{P_i}$ denotarà l'avaluació donada pel professor "j" a la qüestió P_i.

Suposem que 3 professors avaluen el conjunt de paràmetres $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ *on* P_1= L'esforç fet per un estudiant, P_2= Motivació i coneixement en l'àrea específica *i* P_3= L'estudiant empra els coneixements de l'àrea per interpretar i comprendre la realitat. *Suposem que*

$$\begin{aligned}
O_1^{P_1} &= \{0.6/2, 1/3, 0.8/4, 0.7/5\}\\
O_1^{P_2} &= \{0.3/3, 0.6/4, 1/5, 0.7/6\}\\
O_1^{P_3} &= \{0.7/2, 0.8/3, 1/4, 0.5/5\}\\
O_2^{P_1} &= \{0.8/6, 0.9/7, 1/8\}\\
O_2^{P_2} &= \{0.6/5, 0.7/6, 1/7, 0.7/8\}\\
O_2^{P_3} &= \{0.5/4, 0.7/5, 1/6, 0.7/7, 0.4/8\}\\
O_3^{P_1} &= \{0.1/0, 0.6/1, 1/2, 0.4/3\}\\
O_3^{P_2} &= \{0.5/3, 0.7/4, 1/5\}\\
O_3^{P_3} &= \{0.6/2, 0.7/3, 1/4, 0.8/5\}
\end{aligned}$$

representen les avaluacions de cada professor corresponent a cada paràmetre elegit P_i. *Suposem que tots el professors empren l'extensió de la uninorma idempotent discreta*

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{si} \;\; y \leqslant 8-x \\ \max(x,y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

definida sobre la cadena finita L_8 *per obtenir els nivells de satisfacció. Finalment, suposem que l'institució educativa empra aquesta uninorma idempotent discreta*

$$U(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \textit{si} \;\; (x,y) \in [4,8]^2 \\ \min(x,y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

definida sobre la cadena L_8 *per obtenir la nota mitjana borrosa, que representarà l'avaluació final corresponent al procés d'ensenyança aprenentatge de l'alumne avaluat. Amb aquestes condicions, les avaluacions de cada expert són:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1(O_1^{P_1}, O_1^{P_2}, O_1^{P_3}) &= \{0.7/2, 1/3, 0.8/4, 0.8/5, 0.7/6\}\\
\mathcal{U}_2(O_2^{P_1}, O_2^{P_2}, O_2^{P_3}) &= \{0.7/6, 0.9/7, 1/8\}\\
\mathcal{U}_3(O_3^{P_1}, O_3^{P_2}, O_3^{P_3}) &= \{0.1/0, 0.6/1, 1/2, 0.4/3\}
\end{aligned}$$

Llavors, l'avaluació de l'institució educativa per avaluar el procés d'ensenyança aprenentatge de l'estudiant és:

$$\mathcal{U}(\mathcal{U}_1(O_1^{P_1}, O_1^{P_2}, O_1^{P_3}), \mathcal{U}_2(O_2^{P_1}, O_2^{P_2}, O_2^{P_3}), \mathcal{U}_3(O_3^{P_1}, O_3^{P_2}, O_3^{P_3})) = \\ \{0.1/0, 0.6/1, 1/2, 0.4/3\}$$

Concretament, la figura 37 mostra les avaluacions dels tres experts en un mateix gràfic i la figura 38 mostra l'avaluació de l'institució educativa corresponent al procés d'ensenyança aprenentatge del estudiant. Destacar també que a l'eix d'abscisses tenim també representades les lletres corresponent als termes lingüístics.

Una altra possible aproximació per part de la institució educativa, per a realitzar l'agregació de les notes borroses, seria emprar l'extensió d'una nulnorma discreta. Destacar que d'acord a la nota 4.3.12 el mateix algorisme proposat abans també seria possible emprar-ho per aquesta classe d'agregacions. El següent exemple mostra l'efecte de tal implementació en les mateixes condicions de l'exemple 6.3.5.

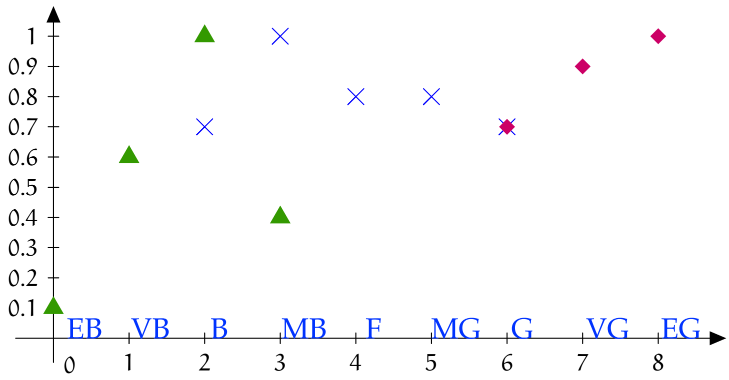

Figura 37: Avaluació dels 3 experts corresponent a l'exemple 6.3.5. Les creus blaves representen l'avaluació del primer expert $\mathcal{U}_1(O_1^{P_1}, O_1^{P_2}, O_1^{P_3})$, els rombes vermells representen la del segon expert $\mathcal{U}_2(O_2^{P_1}, O_2^{P_2}, O_2^{P_3})$, i els triangles verds representen la del tercer expert $\mathcal{U}_3(O_3^{P_1}, O_3^{P_2}, O_3^{P_3})$.

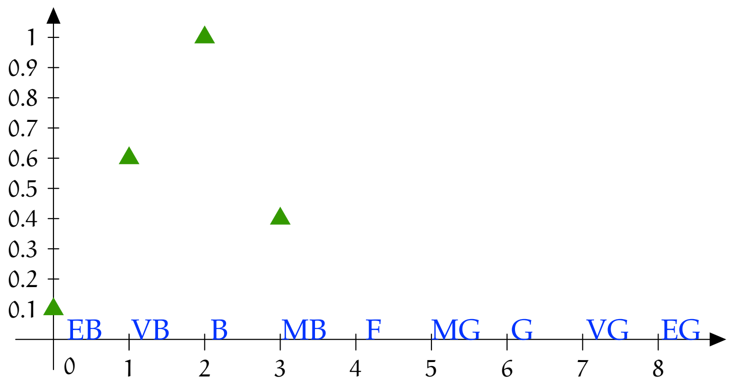

Figura 38: L'avaluació final efectuada per l'institució educativa corresponent a l'exemple 6.3.5

Exemple 6.3.2. *En les mateixes condicions de l'exemple 6.3.5 anterior, si utilitzam l'extensió de la nulnorma*

$$G(x,y) = \begin{cases} \min(x+y,4) & si \quad (x,y) \in [0,4]^2 \\ \max(4, x+y-8) & si \quad (x,y) \in [4,8]^2 \\ 4 & altrament \end{cases}$$

en lloc de l'extensió de la uninorma

$$U(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & si \quad (x,y) \in [4,8]^2 \\ \min(x,y) & altrament \end{cases}$$

definida sobre la cadena L_8 *per a calcular l'avaluació de l'institució educativa, obtenim:*

$$\mathcal{G}(\mathcal{U}_1(O_1^{P_1}, O_1^{P_2}, O_1^{P_3}), \mathcal{U}_2(O_2^{P_1}, O_2^{P_2}, O_2^{P_3}), \mathcal{U}_3(O_3^{P_1}, O_3^{P_2}, O_3^{P_3})) = \{1/4\}$$

Aquest darrer resultat emfatitza la divergència de punts de vista entre les valoracions de les agregacions de cada paràmetre P_i*,* $C(\mathcal{O}, P_i)$ *amb* $i = 1, 2, 3$*. Basta adonar-se'n que el paràmetre* P_2 *té una avaluació positiva (el seu suport és el conjunt* $\{6, 7, 8\}$*), mentre que el tercer és bastant fluix (el seu suport és el conjunt* $\{0, 1, 2, 3\}$*).*

6.3.2 *Processos de decisió basats en parelles d'uninormes sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$

En els darrers anys, els operadors d'agregació han estat emprats en les ciències socials (per exemple, en processos de decisió [85, 156, 157]), en ciències de l'educació, etc. En particular, es ben conegut que, les uninormes definides sobre l'interval unitat o sobre una cadena finita són un eina molt útil en problemes de presa de decisió [103, 156, 157]. Abans hem tractat la possibilitat de construir uninormes sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$, a partir de parelles d'uninormes definides sobre la cadena finita L_n. Per tant, ara proposam l'utilització d'aquests operadors, obtinguts a partir de parelles d'uninormes sobre L_n, en un cas de presa de decisions en grups.

Suposem que una empresa hotelera contracte els serveis de dos grups d'experts per avaluar una possible inversió en un país estranger. El primer grup, NEG, és usualment contractat per la companyia per aquest tipus de decisions. El segon grup, FEG, és específicament contractat en aquest país estranger només per avaluar la viabilitat d'aquesta inversió. El mètode proposat és presentat ara:

PAS 1: Establim el grup d'experts:

$NEG = \{O_1, \cdots, O_r\}$ i $FEG = \{(FO)_1, \cdots, (FO)_k\}$ que duran a terme el procés d'avaluació dels paràmetres $\mathbf{P} = \{P_1, \cdots, P_s\}$.

PAS 2: Elegim l'escala lingüística L_n que serà emprada per realitzar el procés d'avaluació.

PAS 3: Cada expert $O_j \in NEG$ (amb $j = 1 \cdots r$) realitza una avaluació $O_j^{P_i} \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ de tots els paràmetres $P_i \in \mathbf{P}$ elegits. Anàlogament cada expert $(FO)_j \in FEG$ (amb $j = 1, \cdots, k$) efectua una avaluació $(FO)_j^{P_i} \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ de tots els paràmetres $P_i \in \mathbf{P}$ estriats.

PAS 4: Per a cada paràmetre $P_i \in \mathbf{P}$, el FEG estria una uninorma $\mathcal{FU}_i$ per a calcular l'agregació de totes les valoracions efectuades $\{(FO)_1^{P_i}, \cdots, (FO)_k^{P_i}\}$. D'acord a l'elecció efectuada, el grup NEG elegeix una altra uninorma $\mathcal{U}_i$ per a calcular l'agregació de totes les valoracions $\{O_1^{P_i}, \cdots, O_r^{P_i}\}$, verificant la relació d'ordre $\mathcal{U}_i \preceq \mathcal{FU}_i$. [4] Aquestes agregacions seran denotades per

$$C(\mathcal{NO}, P_i) = \mathcal{U}_i(O_1^{P_i}, \cdots, O_r^{P_i}) \quad \text{i} \quad C(\mathcal{FO}, P_i) = \mathcal{FU}_i(O_1^{P_i}, \cdots, O_k^{P_i})$$

PAS 5: Ara, la companyia (basada en la seva experiència) calcula per a cada paràmetre P_i l'agregació

$$C(O, P_i) = [\mathcal{U}_i, \mathcal{FU}_i](C(\mathcal{NO}, P_i), C(\mathcal{FO}, P_i))$$

que serà denotada per $C(\mathcal{O}, P_i)$. Finalment, la companyia calcula l'agregació de totes aquestes valoracions $C(\mathcal{O}, P_i)$ emprant una altra uninorma $[\mathcal{U}, \mathcal{FU}]$ amb $\mathcal{U} \preceq \mathcal{FU}$, d'acord a l'expressió $[\mathcal{U}, \mathcal{FU}](C(\mathcal{O}, P_1), \cdots, C(\mathcal{O}, P_s))$, per obtenir una decisió final per avaluar la viabilitat de la inversió.

4 Aquest ordre és interpretat com a una compensació al fet de que el grup d'experts estrangers mostri un punt de vista marcadament favorable sobre la proposta d'inversió de la companyia en el seu país.

Nota 6.3.3. *Una altra possible situació seria considerar que el grup d'experts estranger expressa el seu rebuig a l'inversió estrangera. En aquest cas, si $\mathcal{U}_i$ i $\mathcal{FU}_i$ denoten l'extensió de les uninormes emprades pels grups d'experts* NEG *i* FEG *respectivament per avaluar el paràmetre* P_i*, aquestes uninormes verificarien la relació d'ordre* $\mathcal{FU}_i \preceq \mathcal{U}_i$.

Nota 6.3.4. *Notam que a partir de la proposició 4.4.7 el nombre borrós discret*

$$[\mathcal{U}_i, \mathcal{FU}_i](C(\mathcal{NO}, P_i), C(\mathcal{FO}, P_i))$$

pot ser interpretat com a una mitjana de $C(\mathcal{NO}, P_i)$ *i* $C(\mathcal{FO}, P_i)$.

Les següents taules 4, 5 i 6 il·lustren el procediment explicat prèviament.

Taula 4: Taula del grup d'experts nacional

Expert	Grup d'experts nacional			
	P_1	P_2	$\cdots$	P_s
O_1	$O_1^{P_1}$	$O_1^{P_2}$	$\cdots$	$O_1^{P_s}$
O_2	$O_2^{P_1}$	$O_2^{P_2}$	$\cdots$	$O_2^{P_s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
O_r	$O_r^{P_1}$	$O_r^{P_2}$	$\cdots$	$O_r^{P_s}$
$\mathcal{NO}$	$C(\mathcal{NO}, P_1)$	$C(\mathcal{NO}, P_2)$	$\cdots$	$C(\mathcal{NO}, P_s)$

Taula 5: Taula del grup d'experts estrangers

Expert	Grup d'experts estrangers			
	P_1	P_2	$\cdots$	P_s
$(FO)_1$	$(FO)_1^{P_1}$	$(FO)_1^{P_2}$	$\cdots$	$(FO)_1^{P_s}$
$(FO)_2$	$(FO)_2^{P_1}$	$(FO)_2^{P_2}$	$\cdots$	$(FO)_2^{P_s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(FO)_k$	$(FO)_k^{P_1}$	$(FO)_k^{P_2}$	$\cdots$	$(FO)_k^{P_s}$
$\mathcal{FO}$	$C(\mathcal{FO}, P_1)$	$C(\mathcal{FO}, P_2)$	$\cdots$	$C(\mathcal{FO}, P_s)$

Exemple 6.3.5. *Suposem que el grup d'experts nacional i que el grup d'experts estranger estan formats per tres experts* $(NEG = \{O_1, O_2, O_3\})$ *i dos experts* $(FEG = \{(FO)_1, (FO)_2\})$ *respectivament. Siguin* $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ *el conjunts de paràmetres que seran avaluats, on* P_1= Risc de la inversió, P_2= Anàlisi de l'impacte social i polític *i* P_3= Beneficis fiscals.

Considerem les següents 9 etiquetes lingüístiques $\mathfrak{L} = \{EB, VB, B, MB, F, MG, G, VG, EG\}$ *on les lletres es refereixen als termes lingüístics: Extremadament Dolenta, Molt Dolenta, Dolenta, Més o Manco Dolenta, Acceptable, Més o Manco Bona, Bona, Molt Bona i Extremadament Bona. Com sempre identificam* $\mathfrak{L}$ *amb la cadena* L_8*. Llavors, suposem que*

Taula 6: Taula d'agregacions finals

Companyia	Agreg. finals			
	P_1	P_2	$\cdots$	P_s
$C(\mathcal{NO}, \mathbf{P})$	$C(\mathcal{NO}, P_1)$	$C(\mathcal{NO}, P_2)$	$\cdots$	$(C(\mathcal{NO}, P_s)$
$C(\mathcal{FO}, \mathbf{P})$	$C(\mathcal{FO}, P_1)$	$C(\mathcal{FO}, P_2)$	$\cdots$	$(C(\mathcal{FO}, P_s)$
$C(\mathcal{O}, \mathbf{P})$	$C(\mathcal{O}, P_1)$	$C(\mathcal{O}, P_2)$	$\cdots$	$C(\mathcal{O}, P_s)$
Decisió final: $[\mathcal{U}, \mathcal{FU}](C(\mathcal{O}, P_1), \cdots, C(\mathcal{O}, P_s))$				

$O_1^{P_1} = \{0.6/2, 1/3, 0.8/4, 0.7/5\}$ $\quad O_2^{P_1} = \{0.8/6, 0.9/7, 1/8\}$
$O_1^{P_2} = \{0.3/3, 0.6/4, 1/5, 0.7/6\}$ $\quad O_2^{P_2} = \{0.6/5, 0.7/6, 1/7, 0.7/8\}$
$O_1^{P_3} = \{0.7/2, 0.8/3, 1/4, 0.5/5\}$ $\quad O_2^{P_3} = \{0.5/4, 0.7/5, 1/6, 0.7/7, 0.4/8\}$

$$O_3^{P_1} = \{0.4/0, 0.6/1, 1/2, 0.4/3\}$$
$$O_3^{P_2} = \{0.5/3, 0.7/4, 1/5\}$$
$$O_3^{P_3} = \{0.6/2, 0.7/3, 1/4, 0.8/5\}$$

representen les avaluacions del grup d'experts nacionals corresponent als paràmetres elegits P_i.

Ara, suposem que

$(FO)_1^{P_1} = \{0.4/2, 0.7/3, 1/4, 0.7/5\}$ $\quad (FO)_2^{P_1} = \{0.7/6, 1/7, 0.9/8\}$
$(FO)_1^{P_2} = \{0.4/3, 0.8/4, 1/5, 0.8/6\}$ $\quad (FO)_2^{P_2} = \{0.7/5, 0.8/6, 1/7, 0.8/8\}$
$(FO)_1^{P_3} = \{0.6/2, 0.9/3, 1/4, 0.6/5\}$ $\quad (FO)_2^{P_3} = \{0.6/4, 0.8/5, 0.9/6, 1/7, 0.7/8\}$

representen les avaluacions del grup d'experts estrangers corresponents als paràmetres elegits P_i.

Suposem que el grup d'experts nacional (NEG) *i que el grup d'experts estranger* (FEG) *utilitzen respectivament les extensions* $\mathcal{U}, \mathcal{FU}$ *de les uninormes definides sobre la cadena* L_8,

$$U(x,y) = \begin{cases} \max(0, x+y-4) & \textit{si } (x,y) \in [0,4]^2 \\ \max(x,y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

$$FU(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{si } (x,y) \in [0,4]^2 \\ \min(8, x+y-4) & \textit{si } (x,y) \in [4,8]^2 \\ \max(x,y) & \textit{altrament} \end{cases}$$

És fàcil veure que $\mathcal{U}$ *i* $\mathcal{FU}$ *verifiquen la relació d'ordre* $\mathcal{U} \preceq \mathcal{FU}$ *perquè les uninormes* U *i* FU *verifiquen les desigualtats* $U(x,y) \leqslant FU(x,y)$ *per a tota parella* $(x,y) \in L_8^2$.

Ara, d'acord al pas 4 obtenim:

$$C(\mathcal{NO}, P_1) = \{0.8/6, 0.9/7, 1/8\}$$
$$C(\mathcal{NO}, P_2) = \{0.6/5, 0.7/6, 1/7, 0.7/8\}$$
$$C(\mathcal{NO}, P_3) = \{0.5/0, 0.5/1, 0.5/2, 0.5/3, 0.5/4, 0.7/5, 1/6, 0.7/7, 0.4/8\}$$

i

$$C(\mathcal{FO}, P_1) = \{0.7/6, 1/7, 0.9/8\}$$
$$C(\mathcal{FO}, P_2) = \{0.7/5, 0.8/6, 0.8/7, 1/8\}$$
$$C(\mathcal{FO}, P_3) = \{0.6/2, 0.6/3, 0.6/4, 0.8/5, 0.9/6, 1/7, 0.7/8\}$$

D'acord al pas 5 podem calcular l'agregació de les avaluacions corresponents a cada paràmetre P_i *(representades en la figura 39):*

$$
\begin{aligned}
C(\mathcal{O}, P_1) &= \{0.7/6, 0.9/7, 1/8\} \\
C(\mathcal{O}, P_2) &= \{0.6/5, 0.7/6, 0.8/7, 1/8\} \\
C(\mathcal{O}, P_3) &= \{0.5/0, 0.5/1, 0.5/2, 0.5/3, 0.5/4, 0.7/5, 0.9/6, 1/7, 1/8\}
\end{aligned}
$$

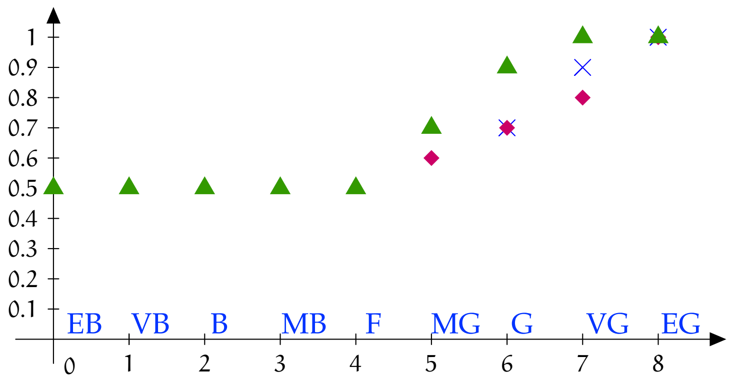

Figura 39: Agregacions de les avaluacions corresponents a cada paràmetre P_i corresponent a l'exemple 6.3.5. Les creus blaves representen la del paràmetre P_1, els rombes vermells representen la del paràmetre P_2, i els triangles verds representen la del tercer paràmetre P_3.

Finalment, obtenim el nombre borrós discret (representat en la figura 40) que expressa l'avaluació final respecte a la possible inversió:

$$[\mathcal{U}, \mathcal{FU}](C(\mathcal{O}, P_1), C(\mathcal{O}, P_2), C(\mathcal{O}, P_3)) = \{0.7/6, 0.8/7, 1/8\}$$

essent ara $[\mathcal{U}, \mathcal{FU}]$ *l'extensió de la parella d'uninormes* U *i* FU *amb* $U \leqslant FU$ *considerades abans. Així, d'acord al resultat obtingut prèviament, la companyia considera possible la inversió en aquest país estranger.*

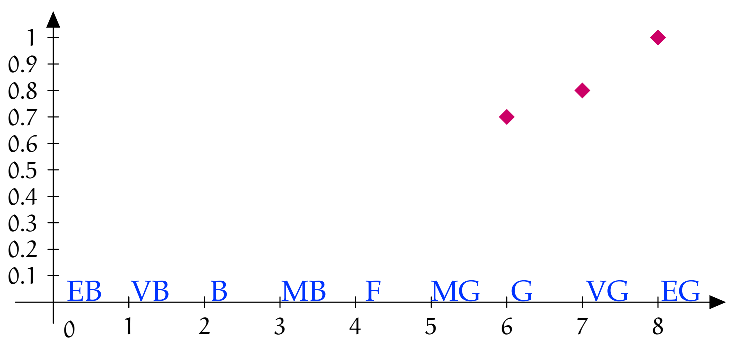

Figura 40: Representació del nombre borrós discret que representa la decisió final obtinguda aplicant el procés descrit del primer cas de l'exemple 6.3.5.

7 MULTICONJUNTS VALORATS EN EL CONJUNT DE NOMBRES BORROSOS DISCRETS

7.1 INTRODUCCIÓ

La paraula multiconjunt va ser proposta per De Bruijin en una comunicació privada l'any 1881 a D. Knuth, però va ser Richard Dedekind l'any 1898, la primera persona que va utilitzar-los [16]. Els multiconjunts (també anomenats bags en la literatura [155]) són estructures on, en contra del que passa per a conjunts, un element pot aparèixer més d'una vegada. Formalment, un multiconjunt definit sobre un univers X és una aplicació M definida, usualment, entre l'univers X i el conjunt de nombres naturals $\mathbb{N}$, $M : X \to \mathbb{N}$. Els multiconjunts han estat estudiats per molts d'investigadors des de diferents punts de vista. Per exemple, en l'anàlisi i presa de decisions, en bases de dades flexibles, etc [76, 111, 123]. Un interessant resum de la matemàtica dels multiconjunts inclosa la seva fonamentació axiomàtica es pot trobar en [17].

D'acord a l'interpretació de multiconjunt $M : X \to \mathbb{N}$, aquest descriu un conjunt o *univers*, Ω, que està format de $M(x)$ còpies "exactes" de cada element $x \in X$. Concretament, per a cada element $x \in X$, $M(x)$ serà anomenat *multiplicitat* de l'element x en el multiconjunt M o cardinal del subconjunt $\Omega_x \subset \Omega$. Un dels més naturals i simples exemples de multiconjunts, és el multiconjunt format pels factors primers d'un nombre natural n. Per exemple, el nombre 504 té per factorització $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ que dóna com a multiconjunt $\{2, 2, 2, 3, 3, 7\}$. Notem que totes les propietats (inclusió, igualtat, etc.) i operacions (suma, unió, intersecció, etc.) entre multiconjunts es dedueixen de les propietats anàlogues que es verifiquen en el conjunt de nombres naturals. Generalitzacions del concepte de multiconjunt han anat apareguent en la literatura, la majoria d'elles variant el conjunt de valoració dels mateixos. Per tant, un estudi en profunditat del conjunt de valoració dels multiconjunts definits sobre un univers X, ens permetrà obtenir noves propietats. De la mateixa manera, nous canvis del conjunt de valoració ens possibilitarà construir noves extensions.

En [31], els autors proposen una definició més general que anomenen "multiconjunts estesos", com a aplicacions $M : X \to L_n$, on L_n és una cadena finita o infinita de nombres naturals, on, a més, es considera també $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, amb l'ordre i operacions usuals. Aquesta nova definició possibilita la construcció d'operadors d'agregació entre multiconjunts (t-normes i t-conormes) a partir d'operadors anàlegs definits sobre L_n.

Altres interessants generalitzacions dels multiconjunts són els *multiconjunts híbrids* (on el conjunt de valoració és $\mathbb{Z}$), *els multiconjunts amb valors reals* [109] o *els multiconjunts amb valors borrosos* [93, 109]. Un interessant exemple de multiconjunt híbrid ho proporciona el conjunt d'arrels d'una fracció polinòmica. Per exemple, si consideram la fracció polinòmica $\frac{(x+1)^3}{(x-1)^3(x-5)}$ obtenim el multiconjunt $\{(-1)^3, (1)^{-3}, 5^1\}$. Per altre lloc, els multiconjunts amb valors borrosos, descriuen per a cada $x \in X$, un subconjunt borrós Ω_x que és el conjunt de "còpies possiblement inexactes" de x amb graus de similaritat $M(x)$ que pertanyen a l'interval unitat. En aquesta direcció, en [112] es proposa una immediata generalització emprant com a possibles valoracions nombres borrosos en comptes de nombres naturals. D'aquesta forma, fixant un determinat tipus de nombre borrós (triangular, trapezoïdal, gaussià, etc [90]), es defineixen així, els multiconjunts amb valors nombres borrosos d'aquest tipus prefixat.

Anàlogament com en el cas dels multiconjunts valorats en el conjunt de nombres naturals (on la multiciplitat d'element $x \in X$, $M(x)$, representa el cardinal del conjunt Ω_x), quan consideram multiconjunts borrosos, necessitam associar a cada $x \in X$ la *cardinalitat* del conjunt borrós Ω_x. La primera definició de cardinal d'un conjunt borrós va ser proposta per Zadeh [65, 68, 90, 159] i des de llavors, ha generat molta literatura amb l'objectiu de formalitzar o axiomatitzar el concepte de cardinal d'un subconjunt borrós. Entre d'altres, cal destacar la cardinalitat escalar (que assigna a cada subconjunt borrós un nombre real positiu) que ha estat estudiada de manera axiomàtica en [49]. De manera semblant, la cardinalitat borrosa (que assigna a cada subconjunt borrós un altre subconjunt borrós anomenat en la literatura nombre borrós enter relatiu o nombre borrós natural generalitzat) [48, 68, 65, 152, 153], també ha estat objecte d'un interessant estudi axiomàtic.

Basant-se en la definició de cardinal borrós proposada per Zadeh, usualment anomenada $FGCount(A)$ [90], D. Rocacher [123, 124] proposa una altra extensió dels multiconjunts. En aquest cas, $M(x)$ és el cardinal del conjunt Ω_x i ve donat per un nombre borrós enter relatiu (és dir, és un subconjunt borrós normal i convex, tal que la seva funció de pertinença és monòtona decreixent i el seu suport és un subconjunt finit de nombres naturals consecutius on està inclòs sempre el zero). Arà bé, aquest tipus de subconjunt borrós és, en realitat, un cas particular de nombre borrós discret que pertany al reticle $\mathcal{A}_1$.

Per altra part, J. Casasnovas i G. Mayor en [31] defineixen i estudien propietats d'un tipus especials de multiconjunts, que anomenen *multiconjunts fitats*, és a dir, aquells on la multiciplitat de cada element $x \in X$ sempre esta fitada per un determinat nombre natural, això és, $M(x) \leqslant n$ per a tot $x \in X$.

Motivats per els nous tipus de multiconjunts proposats per D. Rocacher [123, 124] i per J. Casasnovas i G. Mayor [31], en aquesta secció es proposarà, a partir dels resultats obtinguts en els capítols 3, 4 i 5, definir dues possibles noves extensions dels multiconjunts, on en aquests casos els conjunts de valoració considerats seran $\mathcal{A}_1$ (que generalitza el proposat per D. Rocacher en [123]) i $\mathcal{A}_1^{L_n}$ (que generalitza el proposat per J. Casasnovas i G. Mayor en [31]). Per aquests tipus de multiconjunts estudiarem noves operacions i diferents propietats que es derivin de les mateixes.

7.1.1 *Multiconjunts*

El que farem ara és definir els conceptes més usuals que es donen en la teoria de multiconjunts. Altres resultats i aplicacions es poden trobar, per exemple, en [17, 76, 111, 112].

Definició 7.1.1. *Un* muticonjunt *sobre un conjunt X és una aplicació $M : X \to \mathbb{N}$, on $\mathbb{N}$ denota el conjunt dels nombres naturals inclòs el 0. Per a cada $x \in X$ el nombre natural $M(x)$ s'anomenarà multiplicitat (el nombre d'ocurrències) de x.*

Definició 7.1.2. *Un multiconjunt M sobre X és* finit *si el seu* suport $supp(M) = \{x \in X \mid M(x) > 0\}$. *és un subconjunt finit de X.*

Nota 7.1.3. *Sigui X un conjunt. Denotarem per $MS(X)$ al conjunt de tots els multiconjunts definits sobre l'univers X. I per $FMS(X)$ al conjunt de tots els multiconjunts finits sobre l'univers X. A més, es denotarà per $\perp$ al* multiconjunt nul, *definit per $\perp(x) = 0$ per a cada $x \in X$.*

Definició 7.1.4. *Un* singleton *és un multiconjunt sobre X tal que assigna a un element $x \in X$ el valor $1 \in \mathbb{N}$ i a tots els altres elements de X el valor $0 \in \mathbb{N}$. El denotarem per $1/x$. En general, denotarem per n/x el multiconjunt sobre X tal que assigna a l'element $x \in X$ el valor $n \in \mathbb{N}$ i a tots els altres elements de X el valor 0. En particular, segons aquesta notació, tenim que podem escriure $\perp = 0/x$ per a qualsevol $x \in X$.*

Definició 7.1.5. *Siguin M,N dos multiconjunts sobre X. Direm que M és un* submuticonjunt *de N i ho denotarem per $M \subseteq N$ si per a tot $x \in X$ és verifica que $M(x) \leqslant N(x)$.*

Definició 7.1.6. *Sigui* M *un multiconjunt sobre* X. *El seu cardinal, denotat per* $\mathtt{card}(M)$, *es defineix com* $\mathtt{card}(M) = \sum_{x \in X} M(x)$.

Definició 7.1.7. *[132] Per a cada* $A, B \in MS(X)$, *la* suma, *denotada per* $A \uplus B$, *és el multiconjunt definit puntualment com*

$$(A \uplus B)(x) = A(x) + B(x) \quad \textit{per a cada } x \in X$$

Proposició 7.1.8. *Si* A, B, C *pertanyen al conjunts* $FMS(X)$ *o* $MS(X)$ *és verifica:*

1. $A \uplus B = B \uplus A$ *(Propietat commutativa.)*
2. $(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$ *(Propietat associativa.)*
3. *Existeix un multiconjunt, anomenat nul,* $\perp$, *tal que* $A \uplus \perp = A$

Definició 7.1.9. *Siguin* A, B *dos multiconjunts sobre* X. *Es defineix la diferència entre el multiconjunt* A *i el multiconjunt* B, *com el multiconjunt, denotat per* $A \ominus B$, *tal que per a cada* $x \in X$ $(A \ominus B)(x) = \mathtt{max}(A(x) - B(x), 0)$

Definició 7.1.10. *Per a cada* $A, B \in MS(X)$, *la seva* unió, *denotada per* $A \cup B$, *i la seva* intersecció, *denotada per* $A \cap B$, *són respectivament els multiconjunts sobre* X *definits per a tot* $x \in X$ *com:*

$$(A \cup B)(x) = \mathtt{max}(A(x), B(x)) \textit{ i } (A \cap B)(x) = \mathtt{min}(A(x), B(x))$$

Nota 7.1.11. *Endemés cal tenir en compte que:*

- *Si* $A, B \in FMS(X)$ *aleshores* $A \uplus B, A \cup B, A \cap B \in FMS(X)$.
- *A partir de l'ordre natural que es té en el conjunt* $\mathbb{N}$, *es pot induir un ordre parcial en el conjunt* $MS(X)$ *de la següent manera:*

$$A \leqslant B \textit{ si i només si } A(x) \leqslant B(x) \textit{ per a cada } x \in X.$$

Proposició 7.1.12 (Propietats de la unió i intersecció)**.** *La unió* $\cup$ *i intersecció* $\cap$ *de multiconjunts són operacions binàries sobre el conjunt* $M(X)$ *que verifiquen les propietats associativa, commutativa, idempotència, i distributiva. A més respecte de l'operació suma* $\uplus$, *es verifica per a cada* A,B, C *multiconjunts definits sobre* X*:*

1. *Distributivitat respecte de l'operació* $\uplus$*:*

$$\begin{aligned} A \uplus (B \cap C) &= (A \uplus B) \cap (A \uplus C) \\ A \uplus (B \cup C) &= (A \uplus B) \cup (A \uplus C) \end{aligned}$$

2. *Absorció:*

$$\begin{aligned} A \cap (A \uplus B) &= A \\ A \cup (A \uplus B) &= A \uplus B \end{aligned}$$

3. *Descomposició:*

$$A \uplus B = (A \cup B) \uplus (A \cap B)$$

7.1.2 *Multiconjunts estesos*

En [31], podem trobar el contigut d'aquesta secció. Anomenarem indistintament al llarg d'aquesta secció, multiconjunts valorats a $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \infty$ o multiconjunts estesos.

Definició 7.1.13. *Sigui X un conjunt qualsevol no buit. Un* multiconjunt estès *sobre X és una aplicació $A : X \to \bar{\mathbb{N}}$. Un multiconjunt estès A sobre X s'anomenarà* finit *si $A(x) < \infty$, per a tot $x \in X$. En el cas $A(x) = \infty$ per algun $x \in X$, direm que A és* infinit. *En aquesta secció, la paraula multiconjunt significa multiconjunt estès.*

Nota 7.1.14. *Si $X = \{a, b, c, d\}$, adoptarem la notació*

$$A = \{a, a, b, c, c, c\} = \{a, c, c, a, b, c\} = \{a, a, c, c, b, c\} = \dots$$

per descriure el multiconjunt $A : X \to \bar{\mathbb{N}}$ definit per

$$A(a) = 2, \quad A(b) = 1, \quad A(c) = 3, \quad A(d) = 0.$$

Denotarem per $\mathcal{M}(X) = \bar{\mathbb{N}}^X$ el conjunt del multiconjunts estesos sobre X.

Nota 7.1.15. *En el conjunt $\bar{\mathbb{N}}^X$ es defineixen de manera anàloga al cas $MS(X)$: el suport, el cardinal, la suma, la diferència, la unió i la intersercció de multiconjunts estesos.*

Proposició 7.1.16. *El conjunt $\mathcal{M}(X)$ de multiconjunts sobre X amb la relació binària $\leqslant$, definida abans, és una reticle fitat que conté a l'àlgebra booleana de subconjunts ordinaris de X, 2^X, com a subreticle.*

Nota 7.1.17. *Sigui $\mathcal{M}(X)$ el conjunt de multiconjunts sobre X amb la relació binària $\leqslant$ definida abans.*

- *El reticle $\mathcal{M}(X)$ és distributiu però no és un àlgebra de Boole. Això és obvi perquè, en general, donat $A \in \mathcal{M}(X)$, no existeix el seu complementari $A^c \in \mathcal{M}(X)$ tal que $A \wedge A^c = 0$ i $A \vee A^c = \infty$.*

- *El conjunt parcialment ordenat de multiconjunts sobre X és isomorf al producte de tantes còpies de la cadena $\bar{\mathbb{N}}$ com a número d'elements tingui X.*

Proposició 7.1.18. *La intersecció i la unió de multiconjunts són operacions binàries sobre $\mathcal{M}(X)$ monòtones (preserven l'ordre), commutatives, associatives amb elements neutres $\infty, 0$, respectivament. Així, la intersecció és una t-norma sobre $\mathcal{M}(X)$ i la unió és una t-conorma sobre $\mathcal{M}(X)$, és a dir, $\cap = T_\wedge$ i $\cup = S_\vee$. A més $\cap$ i $\cup$ són divisibles.*

Proposició 7.1.19. *Si A, B dos multiconjunts amb suport finit. Aleshores, és verifica la següent equació:*

$$Card(A \cup B) + Card(A \cap B) = Card(A) + Card(B)$$

Definició 7.1.20. *Una operació binària F definida en $\mathcal{M}(X)$, es diu* puntualment i funcionalment expressable *(abreujadament p.f.e.) si i només si existeix una família $\{F_x\}_{x \in X}$ d'operacions binàries sobre $\bar{\mathbb{N}}$ tals que:*
$F(A, B)(x) = F_x(A(x), B(x))$; *per a tot $A, B \in \mathcal{M}(x)$ i per a tot $x \in X$. També es dirà que F és el* producte *de $F_x, x \in X$ i ho denotarem per $F = \prod_{x \in X} F_x$.*

Quant totes les operacions F_x siguin la mateixa, ho expressarem com $F(A, B)(x) = F(A(x), B(x))$, $\forall A, B \in \mathcal{M}(X)$ i $\forall x \in X$, on F indica una operació binària sobre $\mathcal{M}(X)$. En aquest cas direm que F és funcionalment expressable (abreujadament f.e.).

Proposició 7.1.21. *Sigui* F *una operació binària sobre* $\mathcal{M}(X)$ *que és p.f.e. Aleshores:*

1. F *és una t-norma (t-conorma) si i només si cada* F_x *és una t-norma (t-conorma).*
2. *En aquest cas,* F *és divisible si i només si cada* F_x *és divisible* $\forall x \in X$.

Proposició 7.1.22. *Una p.f.e. t-norma* T *sobre* $\mathcal{M}(X)$ *és divisible si i només si es verifiquen les següents condicions:*

Per a cada $x \in X$ *existeix un conjunt infinit* $I(x) = \{0 = a_0(x) < a_1(x) < \ldots < a_{m(x)}(x) < a_{m(x)+1}(x) < \ldots < \infty\}$ *d'elements de* $\bar{\mathbb{N}}$ *tals que:*

$$T(A,B)(x) = \begin{cases} \max(a_i(x), A(x)+B(x)-a_{i+1}(x)) & \textit{si } (A(x),B(x)) \in [a_i(x), a_{i+1}(x)]^2, i \geqslant 0 \\ \min(A(x),B(x)) & \textit{en cas contrari} \end{cases} \tag{7.1}$$

Proposició 7.1.23. *Una p.f.e. t-conorma* S *sobre* $\mathcal{M}(X)$ *és divisible si i només si una de les següents condicions es verifica, per a cada* $x \in X$*:*

- *Existeix un conjunt infinit* $I(x) = \{0 = a_0(x) < a_1(x) < \ldots < a_{m(x)}(x) < a_{m(x)+1}(x) \ldots < \infty\}$ *d'elements de* $\bar{\mathbb{N}}$ *tals que:*

$$S(A,B)(x) = \begin{cases} \min(a_{i+1}(x), A(x)+B(x)-a_i(x)) & \textit{si } i \geqslant 0 \quad \textit{i} \\ & (A(x),B(x)) \in [a_i(x), a_{i+1}(x)]^2, \\ \max(A(x),B(x)) & \textit{en cas contrari} \end{cases} \tag{7.2}$$

- *Existeix un conjunt finit* $I(x) = \{0 = a_0(x) < a_1(x) < \ldots < a_{m(x)}(x) < a_{m(x)+1}(x) = \infty\}$ *d'elements de* $\bar{\mathbb{N}}$ *tals que:*

$$S(A,B)(x) = \begin{cases} \min(a_{i+1}(x), A(x)+B(x)-a_i(x)) & \textit{si } 0 \leqslant i \leqslant m(x) \quad \textit{i} \\ & (A(x),B(x)) \in [a_i(x), a_{i+1}(x)]^2, \\ \max(A(x),B(x)) & \textit{en cas contrari} \end{cases} \tag{7.3}$$

7.1.3 *Multiconjunts borrosos*

Sigui X un conjunt no buit (usualment anomenat univers).

Definició 7.1.24. *Un* multiconjunt borrós *sobre* X *és una aplicació*

$$\overline{M} : X \to MS(]0,1])$$

on $M(x)$ *és un multiconjunt de* $MS(]0,1])$.

Definició 7.1.25. *Un multiconjunt borrós* $\overline{M}$ *sobre* X *és* finit *si el seu* suport

$$\mathrm{Supp}(\overline{M}) = \{x \in X \mid \overline{M}(x) \neq \bot\}$$

és un subconjunt finit de X*, i per a cada* $x \in \mathrm{Supp}(\overline{M})$*,* $\overline{M}(x)$ *és un multiconjunt finit de* $]0,1]$.

Nota 7.1.26. *Denotarem per* $\overline{\bot}$ *el multiconjunt finit definit per* $\overline{\bot}(x) = \bot$ *per a cada* $x \in X$.

Donat $x \in X$ *i* $A \in MS(]0,1])$*, denotarem per* A/x *el multiconjunt borrós* X *definit per* $(A/x)(x) = A$ *i* $(A/x)(y) = \bot$ *per a cada* $y \neq x$*. Si* A *és finit aleshores* A/x *també és finit.*

7.1.4 Operacions amb multiconjunts borrosos

Definició 7.1.27. *Siguin $\overline{A}, \overline{B}$ dos multiconjunts borrosos definits sobre X. El multiconjunts $\overline{A}(x)$ i $\overline{B}(x)$ sobre $]0,1]$ poden ser funcionalment operats, i en funció d'aquest, és possible definir operacions entre multiconjunts borrosos. Així, la* suma $\overline{A}+\overline{B}$, *la* unió $\overline{A} \vee \overline{B}$ *i la* intersecció $\overline{A} \wedge \overline{B}$ *són respectivament els multiconjunts borrosos sobre X definits puntualment per*

$$\begin{aligned}(\overline{A}+\overline{B})(x) &= \overline{A}(x)+\overline{B}(x)\\ (\overline{A}\vee\overline{B})(x) &= \overline{A}(x)\vee\overline{B}(x)\\ (\overline{A}\wedge\overline{B})(x) &= \overline{A}(x)\wedge\overline{B}(x)\end{aligned}$$

on, la unió i la intersecció en el costat dret d'aquestes igualtats són operacions entre multiconjunts de $MS(]0,1])$.

Per exemple, la suma dels multiconjunts borrosos $\overline{A}$ i $\overline{B}$, serà el multiconjunt borrós $\overline{A}+\overline{B} : X \to MS(]0,1])$ tal que

$$(\overline{A}+\overline{B})(x)(t) = \overline{A}(x)(t)+\overline{B}(x)(t) \quad \text{per a cada } x \in X \text{ i } t \in]0,1].$$

7.2 MULTICONJUNTS VALORATS EN EL CONJUNT DE NOMBRES BORROSOS DISCRETS

Els nombres borrosos discrets del reticle $\mathcal{A}_1$ poden ser interpretats com una possible generalització dels nombres naturals, perquè qualsevol nombre natural n pot ser entès com el nombre borrós discret 1_n (aquell que té per suport el conjunt unitari $\{n\}$). D'altra banda, en moltes situacions quotidianes l'utilització d'expressions del tipus *n'hi ha devers 5000 o n'hi ha entre 150 i 200* són habituals, i aquestes es solen donar quan hi ha incertesa o manca d'informació a l'hora de realitzar tals afirmacions. Totes aquestes situacions es poden modelitzar fàcilment a partir d'un nombre borrós discret de $\mathcal{A}_1$. Per altra banda, en el món físic es poden observar molts fenòmens naturals que presenten constants i múltiples repeticions. Per exemple, en el camp de la bioquímica, es fa necessari quan és produeix una reacció químic específica, saber quantes vegades apareix repetida una determinada molècula (o molècules) o quantes d'elles no són còpies exactes de l'original desprès d'aquesta reacció, etc. En tots aquests processos, hi ha un denominador comú que és un univers X (seguin amb l'exemple exposat, serà el conjunt de totes les possibles molècules que es generen a partir de la reacció química) i la necessitat de realitzar un recompte de quantes vegades apareix repetit cadascun dels elements de l'univers (en el nostre cas quantes vegades apareix repetida cadascuna de les molècules que es formen). Desafortunadament, en molts d'aquests processos hi ha una impossibilitat física, o bé, es comenten errors a l'hora de realitzar el mencionat recompte. Amb aquest sentit, l'ús de nombres borrosos discrets per modelitzar la quantitat *borrosa* de vegades que apareixen els elements de l'univers X sembla ser una manera adient de realitzar tals recomptes imprecisos. Per aquesta raó sembla natural la següent definició,

Definició 7.2.1. *Sigui X un conjunt no buit. Un multiconjunt natural borrós sobre l'univers X és una aplicació $M : X \to \mathcal{A}_1$ tal que per a cada $x \in X$, $M(x)$ és un nombre borrós discret del reticle $\mathcal{A}_1$.*

Exemple 7.2.2. *Interessants exemples, que resulten de l'estudi del cardinal borrós dels multiconjunts, es poden trobar en la literatura [47, 48, 49]:*

- *Recordem que la cardinalitat borrosa [90] d'un subconjunt borrós finit A, que denotarem per $C(A)$, és el nombre borrós discret de $\mathcal{A}_1$ que té per funció de pertinença*

$$C(A)(n) = \sup\{\alpha \mid |A_\alpha| \geqslant n\} \text{ per a tot } n \in \mathbb{N}$$

essent dita funció sempre decreixent. Aleshores, un primer exemple immediat de multiconjunt natural borrós basat en aquest concepte és el següent: Considerem el conjunt de subconjunts borrosos finits definits sobre l'univers X, $\mathrm{FFS}(X)$. *Aleshores, aplicació*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{C}: & \mathrm{FFS}(X) & \to & \mathcal{A}_1 \\ & A & \mapsto & \mathcal{C}(A) \end{array}$$

on $\mathcal{C}(A) = C(A)$ *és un multiconjunt natural borrós. Per exemple, si* $A = \{1/x_1, 0.1/x_2, 0.1/x_3\}$ *on* $x_1, x_2, x_3 \in X$ *tenim que* $\mathcal{C}(A) = \{1/0, 1/1, 0.1/2, 0.1/3\}$.

- *D. Rocacher en [123], proposa un altre exemple de multiconjunt natural borrós basant-se també en la cardinalitat d'un subconjunt borrós i en la cardinalitat dels multiconjunts borrosos (definida de manera semblant al cas de multiconjunts clàssics, veure definició 7.1.6, però en aquest cas en comptes de la suma de nombres naturals s'utitilitza la suma a partir del principi d'extensió de Zadeh). Anomenem per* $\mathrm{FFM}(X)$ *al conjunt de multiconjunts borrosos definits sobre l'univers* X. *Llavors l'aplicació*

  $$\begin{array}{rccc} \mathbb{C}: & \mathrm{FFM}(X) & \to & \mathcal{A}_1 \\ & M & \mapsto & \mathbb{C}(M) \end{array}$$

  on $\mathbb{C}(M) = \sum_{x \in X} \mathcal{C}(M(x))$ *on* $\mathcal{C}$ *és el cardinal de l'apartat anterior, és un multiconjunt natural borrós.*

  Per exemple, si $M = \{\langle 1, 0.1, 0.1\rangle/a, \langle 0.5/b\rangle\} \in \mathrm{FFM}(X)$ *és un multiconjunt borrós, per a calcular* $\mathbb{C}(M)$ *tal com s'ha definit procedirem de la següent manera:*

  i. *Calculam el cardinal dels multiconjunts borrosos* $\{1, 0.1, 0.1\}$ *i* $\{0.5\}$,

  $$\mathcal{C}(M(a)) = \{1/0, 1/1, 0.1/2, 0.1/3\}$$

  $$\mathcal{C}(M(b)) = \{1/0, 0.5/1\}$$

  ii. *Finalment obté el multiconjunt natural borrós*

  $$\mathbb{C}(M) = \{1/0, 1/1, 0.5/2, 0.1/3, 0.1/4\}$$

  que s'ha obtingut a partir de la suma de Zadeh dels nombres borrosos discrets $\mathcal{C}(M(a))$ *i* $\mathcal{C}(M(b))$.

- *En [47] es defineix el cardinal d'un multiconjunt borrós. A partir d'aquest fet podem proporcionar un altre interessant exemple de multiconjunt natural borrós.*

  Considerem el conjunt de multiconjunts borrosos definits sobre l'interval $]0, 1]$. *Així, l'aplicació*

  $$\begin{array}{rccc} [\,]: & \mathrm{FMS}(]0,1]) & \to & \mathcal{A}_1 \\ & A & \mapsto & [A] \end{array}$$

  on per a cada $A \in \mathrm{FMS}(]0, 1])$, *és defineix el nombre borrós discret donat per l'expressió*

  $$\begin{array}{rccc} [A]: & \mathbb{N} & \to & [0,1] \\ & i & \mapsto & [A]_i \end{array}$$

  on es defineix $[A]_i$, *com*

  $$[A]_i = \bigvee \{t \in [0, 1] \mid \sum_{t' \geqslant t} A(t') \geqslant i\}.$$

D'aquesta manera, la funció: $A \to [A]$ *és un multiconjunt valorat en* $\mathcal{A}_1$. *Per exemple, sigui* $A :]0,1] \to \mathbb{N}$ *el multiconjunt definit com:* $A(1/3) = 1$, $A(2/3) = 2$, $A(3/4) = 1$ *i* $A(t) = 0$ *altrament. Aleshores*

$$\sum_{t' \geqslant t} A(t') = \begin{cases} 4 & si\ t \leqslant 1/3 \\ 3 & si\ 1/3 < t \leqslant 2/3 \\ 1 & si\ 2/3 < t \leqslant 3/4 \\ 0 & si\ 3/4 < t \end{cases}$$

D'aquesta manera obtenim que $[A]_0 = 1$, $[A]_1 = 3/4$, $[A]_2 = [A]_3 = 2/3$, $[A]_4 = 1/3$ *i* $[A]_i = 0$ *per a tot* $i \geqslant 4$, *i per tant, obtenim el nombre borrós discret*

$$[A] = \{1/0, (3/4)/1, (2/3)/2, (2/3)/3, (1/3)/4\} \in \mathcal{A}_1$$

- *En [47, 48] es caracteritzava la cardinalitat borrosa d'un multiconjunt del conjunt* $FMS(]0,1])$. *Així, si* $f : [0,1] \to [0,1]$ *és una funció creixent tal que* $f(0) \in \{0,1\}$ *i* $f(1) = 1$, *i* $g : [0,1] \to [0,1]$ *és una funció decreixent tal que* $g(1) \in \{0,1\}$ *i* $g(0) = 1$ *aleshores, seguint les notacions de les referències esmentades, tenim que el cardinal borrós d'un multiconjunt* $A \in FMS(]0,1])$ *generat per les funcions* f *i* g *vindrà donat per*

$$\mathcal{C}_{f,g}(A)(i) = f([A]_i) \wedge g([A]_{i+1})$$

per a cada $i \in \mathbb{N}$. *Així, l'aplicació*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{C}_{f,g}: & FMS(]0,1]) & \to & \mathcal{A}_1 \\ & A & \mapsto & \mathcal{C}_{f,g}(A) \end{array}$$

on $\mathcal{C}_{f,g}(A)(i) = f([A]_i) \wedge g([A]_{i+1})$ *per a cada* $i \in \mathbb{N}$, *serà el multiconjunt natural borrós generat per les funcions* f *i* g.

7.2.1 *Operacions amb multiconjunts naturals borrosos*

En aquesta secció, a partir dels resultats obtinguts en els capítols 3, 4 i 5 definirem i estudiarem les principals operacions entre multiconjunts naturals borrosos.

Nota 7.2.3. *Denotarem per* $FNM(X)$ *al conjunt de tots el multiconjunts naturals borrosos definits sobre l'univers* X.

La suma de nombres borrosos discrets estudiada en el reticle $\mathcal{A}_1$ (veure corol·lari 3.3.23 i teorema 3.3.37) ens permet definir la suma entre multiconjunts naturals borrosos, així com estudiar les seves propietats.

Definició 7.2.4. *Siguin* $A, B : X \to \mathcal{A}_1$ *dos multiconjunts naturals borrosos. La seva* suma, *denotada* $A + B$, *es el multiconjunt natural borrós definit puntualment per a cada* $x \in X$ *per*

$$(A + B)(x) = A(x) \oplus B(x)$$

on $A(x) \oplus B(x)$ *denota la suma dels nombres borrosos discrets* $A(x), B(x) \in \mathcal{A}_1$.

Proposició 7.2.5. *El conjunt* $FNM(X)$, *de multiconjunts naturals borrosos definits sobre l'univers* X, *és un monoide commutatiu amb la suma com a operació monoidal, sent el multiconjunt neutre, denotat per* M_0, *el que verifica* $M_0(x) = 1_0$ *per a tot* $x \in X$.

Demostració. La demostració es dedueix immediatament del fet que $\mathcal{A}_1$ és un monoide commutatiu amb la suma de nombres borrosos discrets (veure teorema 3.3.37, i col·lorari 3.3.38). □

De manera semblant a la suma de multiconjunts estudiada abans, a partir de l'estructura de reticle definida en $\mathcal{A}_1$ (veure teorema 3.2.32) amb les operacions binàries max i min (veure nota 3.2.14), podem definir la unió i la intersecció de dos multiconjunts naturals borrosos i, endemés, induir en $FNM(X)$ una estructura de reticle distributiu.

Definició 7.2.6. *Siguin $A, B : X \to \mathcal{A}_1$ dos multiconjunts naturals borrosos. La seva* unió, *denotada per $A \vee B$, i la seva intersecció, denotada per $A \wedge B$, seran els multiconjunts naturals borrosos definits respectivament com*

$$(A \vee B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}$$

$$(A \wedge B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$$

per a tot $x \in X$, on $\max\{A(x), B(x)\}$ i $\min\{A(x), B(x)\}$ s'han calculat segons la nota 3.2.14 o equivalent, segons la proposició 3.2.36, emprant el principi d'extensió de Zadeh.

El que farem ara és estudiar quines propietats tenen aquestes noves operacions entre multiconjunts.

Proposició 7.2.7. *Siguin $A, B, C \in FNM(X)$. Aleshores les operacions $\vee$ i $\wedge$ definides abans verifiquen les propietats commutativa, associativa, idempotència, d'absorció i distributiva. A més respecte de la suma de multiconjunts també verifiquen:*

1. *Distributivitat respecte de la suma de multiconjunts:*

$$\begin{aligned} A + (B \vee C) &= (A + B) \vee (A + C) \\ A + (B \wedge C) &= (A + B) \wedge (A + C) \end{aligned}$$

2. *Absorció:*

$$\begin{aligned} A \vee (A + B) &= A + B \\ A \wedge (A + B) &= A \end{aligned}$$

3. *Descomposició:*

$$A + B = (A \vee B) + (A \wedge B)$$

Demostració. Les propietats commutatives, associatives, idempotens, distributives i d'absorció de les operacions $\vee$ i $\wedge$ es dedueixen immediatament pel fet que $\mathcal{A}_1$ és un reticle distributiu amb les operacions max i min (veure teorema 3.2.32). El que demostrarem serà la propietat distributiva respecte de la suma de multiconjunts, la propietat d'absorció de la suma respecte de les operacions $\vee$ i $\wedge$ i la propietat de descomposició. Per això, siguin $A, B, C \in FNM(X)$ suposem que per a cada $x \in X$ els α-conjunts de $A(x), B(x)$ i $B(x)$ venen donats respectivament pels intervals $[a_1^\alpha, a_p^\alpha]$, $[b_1^\alpha, b_q^\alpha]$ i $[c_1^\alpha, c_k^\alpha]$.

Demostrar que $A + (B \vee C) = (A + B) \vee (A + C)$ és equivalent a provar que

$$A(x) \oplus \max(B(x), C(x)) = \max(A(x) \oplus B(x), A(x) \oplus C(x))$$

per a tot $x \in X$. I aquesta darrera relació és certa perquè per a tot $\alpha \in [0,1]$ es té que

$$\begin{aligned}(A(x) \oplus \max(B(x), C(x)))^\alpha &= [a_1^\alpha + \max(b_1^\alpha, c_1^\alpha), a_p^\alpha + \max(b_q^\alpha, c_k^\alpha)] \\ &= [\max(a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_1^\alpha + c_1^\alpha), \max(a_p^\alpha + b_q^\alpha, a_p^\alpha + c_k^\alpha)] \\ &= \max(A(x) \oplus B(x), A(x) \oplus C(x))^\alpha\end{aligned}$$

Anàlogament es pot comprovar que $A + (B \wedge C) = (A + B) \wedge (A + C)$.

Per altra banda, és clar que $A \vee (A + B) = A + B$ perquè per a tot $\alpha \in [0,1]$ es té que

$$\begin{aligned}\max(A(x), A(x) \oplus B(x))^\alpha &= [\max(a_1^\alpha, a_1^\alpha + b_1^\alpha), \max(a_p^\alpha, a_p^\alpha + b_q^\alpha)] \\ &= [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_p^\alpha + b_q^\alpha] \\ &= (A(x) \oplus B(x))^\alpha\end{aligned}$$

Similarment es demostra que $A \wedge (A + B) = A$.

Finalment, la propietat de descomposició és dedueix del fet de que per a tot $\alpha \in [0,1]$

$$\begin{aligned}(A(x) \oplus B(x))^\alpha &= [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_p^\alpha + b_q^\alpha] \\ &= [\max(a_1^\alpha, b_1^\alpha) + \min(a_1^\alpha, b_1^\alpha), \max(a_p^\alpha, b_q^\alpha) + \min(a_p^\alpha, b_q^\alpha)] \\ &= [\max(a_1^\alpha, b_1^\alpha), \max(a_p^\alpha, b_q^\alpha)] + [\min(a_1^\alpha, b_1^\alpha), \min(a_p^\alpha, b_q^\alpha)] \\ &= (\max(A(x), B(x)) \oplus \min(A(x), B(x)))^\alpha\end{aligned}$$

□

Una conseqüència immediata d'aquesta proposició és que el conjunt $FNM(X)$, de multiconjunts naturals borrosos de l'univers X, té una estructura de reticle distributiu tal com afirma la següent proposició.

Proposició 7.2.8. *El conjunt* $FNM(X)$ *és un reticle distributiu amb les operacions unió* ($\vee$) *i intersecció* ($\wedge$) *definides en la definició 7.2.6.*

Demostració. És immediata a partir de la proposició 7.2.7. □

Per altra banda, aquesta estructura de reticle defineix un ordre parcial sobre $FNM(X)$ que podem descriure en funció de l'ordre de $\mathcal{A}_1$.

Proposició 7.2.9. *Siguin* $A, B : X \to \mathcal{A}_1$ *dos multiconjunts definits sobre l'univers* X*. La relació binària:*

$A \leqslant B$ *si i només si* $A(x) \preceq B(x)$ *per a tot* $x \in X$

és un ordre parcial sobre el conjunt $FNM(X)$ *que coincideix amb l'ordre reticular en* $\mathcal{A}_1$*.*

Demostració. És immediata pel fet de ser $FNM(X)$ un reticle, donat que en qualsevol reticle [14] és possible construir un ordre parcial a partir de les operacions d'unió i intersecció definides en el mateix. □

En la proposició 3.3.40 veiem que l'operació monoidal $\oplus$ (amb les consideracions fetes a la nota 3.3.35) es compatible amb l'ordre establert en el reticle borrós discret $(\mathcal{A}_1, \preceq)$. Ara de manera anàloga es té que la suma de multiconjunts tal com l'hem definida en la definició 7.2.4 és compatible amb l'ordre parcial definit en la proposició 7.2.9 anterior.

Proposició 7.2.10. *Siguin* $A, B, C, D \in FNM(X)$*. Si* $A \leqslant B$ *i* $C \leqslant D$ *on* $\leqslant$ *denota l'ordre parcial definit en el reticle* $FNM(X)$ *(d'acord a la proposició 7.2.9) aleshores* $A + C \leqslant B + D$ *(on* $+$ *denota la suma de multiconjunts definida en 7.2.4).*

De manera semblant al cas de multiconjunts valorats en el conjunt de nombre naturals, podem definir el suport i el cardinal de multiconjunts amb valors nombres borrosos discrets.

Definició 7.2.11. *El suport d'un multiconjunt* A *definit sobre l'univers* X *és el conjunt ordinari d'elements de* X, $\mathrm{supp}(A) = \{x \in X \mid A(x) \succ 1_0\}$.

Definició 7.2.12. *Direm que un multiconjunt* A *és finit quan ho sigui el seu suport.*

Definició 7.2.13. *Sigui* $A \in \mathrm{FNM}(X)$. *El cardinal del multiconjunt finit* A *és defineix com el nombre borrós discret del reticle* $\mathcal{A}_1$ *donat per*

$$\mathrm{card}(A) = \sum_{x \in \mathrm{supp}(A)} A(x)$$

Nota 7.2.14. *És clar a partir del corol·lari 3.3.23 i i del teorema 3.3.37 que* $\mathrm{card}(A) \in A_1$.

Una interessant propietat dels cardinals és la següent:

Proposició 7.2.15. *Siguin* A, B *dos multiconjunts naturals borrosos. Aleshores es verifica que*

$$\mathrm{card}(A \vee B) \oplus \mathrm{card}(A \wedge B) = \mathrm{card}(A) \oplus \mathrm{card}(B)$$

Demostració.

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}(A \vee B) \oplus \mathrm{card}(A \wedge B) &= \sum_{x \in \mathrm{supp}(A \vee B)} (A \vee B)(x) \oplus \sum_{x \in \mathrm{supp}(A \wedge B)} (A \wedge B)(x) \\
&= \sum_{x \in X} \max(A(x), B(x)) \oplus \sum_{x \in X} \min(A(x), B(x)) \\
&= \sum_{x \in X} A(x) \oplus \sum_{x \in X} B(x) \\
&= \sum_{x \in \mathrm{supp}(A)} A(x) \oplus \sum_{x \in \mathrm{supp}(B)} B(x) \\
&= \mathrm{card}(A) \oplus \mathrm{card}(B)
\end{aligned}$$

perquè segons la proposició 7.2.7 item 7 es verifica que $A \vee B + A \wedge B = A + B$ i per tant per a tot $x \in X$ és té que $\max(A(x), B(x)) \oplus \min(A(x), B(x)) = A(x) \oplus B(x)$. □

7.3 MULTICONJUNTS NATURALS BORROSOS FITATS

En [31], s'introdueix la idea de multiconjunts fitats, sent aquells multiconjunts A valorats en el conjunt de nombres naturals, tals que per a tot $x \in X$ és té que $A(x) \leqslant n$ amb $n \in \mathbb{N}$, és a dir, la multiciplitat de qualsevol element sempre serà menor o igual que un valor n fixat. Una idea semblant pot ser considerada en el cas dels multiconjunts naturals borrosos.

Considerem la cadena finita L_n de nombres naturals consecutius i sigui $\mathcal{A}_1^{L_n} = \{A \in \mathcal{A}_1 \mid \mathrm{supp}(A) \subseteq L_n\}$ el reticle borrós discret considerat en el teorema 3.2.32.

Definició 7.3.1. *Sigui* X *un conjunt finit. Un multiconjunt natural borrós fitat és una aplicació*

$$\begin{aligned}
M : X &\longrightarrow \mathcal{A}_1^{L_n} \\
x &\longmapsto M(x)
\end{aligned}$$

Nota 7.3.2. *El conjunt de multiconjunts naturals borrosos fitats definits sobre l'univers* X *serà denotat per* $\mathrm{BFNM}_n(X)$. *Notem a més a més que, per la definició anterior, es té que tot multiconjunt natural borrós fitat,* A, *verifica que* $A(x) \preceq 1_n$ *per a tot* $x \in X$, *per ser* 1_n *el màxim de* $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

En la secció anterior, hem vist que l'estructura de reticle distributiu del conjunt $\mathcal{A}_1$ permet derivar una estructura de reticle en el conjunt $\mathrm{FNM}(X)$, de multiconjunts naturals borrosos definits sobre l'univers X. De la mateixa manera, segons el teorema 3.2.32 com $\mathcal{A}_1^{L_n} = (\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max, 1_0, 1_n)$ és un reticle distributiu fitat, on 1_0 i 1_n representen el mínim i el màxim repectivament, veurem que podem induir a partir d'aquest reticle una estructura de reticle distributiu fitat en el conjunt $\mathrm{BFNM}_n(X)$, on les operacions unió i intersecció seran definides de manera anàloga a les considerades en el conjunt $\mathrm{FNM}_n(X)$.

Nota 7.3.3. *Volem fer notar que:*

- *Si* $n, n' \in \mathbb{N}$ *amb* $n' \leqslant n$ *aleshores* $\mathrm{FNM}_{n'}(X) \subseteq \mathrm{FNM}_n(X)$
- *Si* $A(x), B(x) \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ *per a tot* $x \in X$ *aleshores* $(A \vee B)(x) = \max(A(x), B(x))$ *i* $(A \wedge B)(x) = \min(A(x), B(x))$ *pertanyen a* $\mathcal{A}_1^{L_n}$. *Per tant, les operacions* $A \vee B$ *i* $A \wedge B$ *sobre el conjunts* $\mathrm{BFNN}_n(X)$ *estan ben definides per a cada parella* $A, B \in \mathrm{BFNN}_n(X)$.
- *És evident que si* $A, B \in \mathrm{BFNN}_n(X)$, *en general, el multiconjunt* $A + B \notin \mathrm{BFNN}_n(X)$.

Proposició 7.3.4. *El conjunt* $\mathrm{BFNM}_n(X)$, *de multiconjunts naturals borrosos fitax definits sobre l'univers* X, *és un reticle distributiu fitat amb les operacions* $\vee$ *i* $\wedge$.

Demostració. L'estructura de reticle distributiu es dedueix immediatament del fet de que $(\mathcal{A}_1^{L_n}, \min, \max)$ és un reticle distributiu (veure la proposició 3.2.32). Endemés, és fàcil veure que el multiconjunt, M_0, definit per a tot $x \in X$ per $M_0(x) = 1_0$ és el mínim del conjunt $\mathrm{BFNM}_n(X)$. Anàlogament, el multiconjunt M_n definit per $M_n(x) = 1_n$ per a tot $x \in X$ és el màxim del conjunt $\mathrm{BFNM}_n(X)$. □

Proposició 7.3.5. *Siguin* $A, B : X \to \mathcal{A}_1^{L_n}$ *dos multiconjunts naturals borrosos fitats. La relació binària* $A \leqslant B$ *si i només si* $A(x) \preceq B(x)$ *per a tot* $x \in X$, *és un ordre parcial en el conjunt* $\mathrm{BFNM}_n(X)$.

7.3.1 *t-normes i t-conormes en el reticle* $\mathrm{BFNM}_n(X)$

El que ens proposam en aquesta secció és la construcció de t-normes i t-conormes en el reticle fitat $\mathrm{BFNM}_n(X) = (\mathrm{BFNM}_n(X), \vee, \wedge, M_0, M_n)$, on M_0 i M_n denoten els multiconjunts naturals borrosos tal que $M_0(x) = 1_0$ i $M_n(x) = 1_n$ per a tot $x \in X$.

En les següent proposicions veurem que a partir d'un t-norma (t-conorma) definida sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ és possible construir una t-norma (t-conorma) sobre $\mathrm{BFNM}_n(X)$.

Proposició 7.3.6. *Per a cada t-norma* $\mathcal{T}$ *definida sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *és possible construir una t-norma* $\mathbb{T}$ *sobre el reticle fitat* $\mathrm{BFNM}_n(X)$ *de la següent manera:* $\mathbb{T}(A, B)$ *és el multiconjunt natural borrós tal que per a cada* $x \in X$

$$\mathbb{T}(A, B)(x) = \mathcal{T}(A(x), B(x))$$

Demostració. És evident pel fet de que $\mathcal{T}$ és una t-norma. □

Anàlogament,

Proposició 7.3.7. *Per a cada t-conorma* $\mathcal{S}$ *definida sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *és possible construir una t-conorma* $\mathbb{S}$ *sobre el reticle fitat* $\mathrm{BFNM}_n(X)$ *de la següent manera:* $\mathbb{S}(A, B)$ *és el multiconjunt natural borrós tal que per a cada* $x \in X$

$$\mathbb{S}(A, B)(x) = \mathcal{S}(A(x), B(x))$$

Demostració. És clara perquè $\mathcal{S}$ és una t-conorma. □

Sabem d'acord al teorema 4.2.15, que si $T(S)$ són t-normes (t-conormes) suaus definides sobre la cadena finita L_n és possible construir una t-norma (t-conorma) sobre el reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Emprant aquest fet, tenim la següent proposició.

Proposició 7.3.8. *Per a cada t-norma suau* T *definida sobre la cadena* L_n *és possible construir una t-norma* $\mathbb{T}$ *sobre el reticle fitat* $\mathrm{BFNM}_n(X)$.

Demostració. D'acord al teorema 4.2.15 per a cada t-norma suau T sobre L_n és possible obtenir una t-norma $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Ara, aplicant la proposició 7.3.6 anterior el resultat s'obté immediatament. □

Similarment,

Proposició 7.3.9. *Per a cada t-conorma* S *definida sobre la cadena finita* L_n *és possible construir un t-conorma* $\mathbb{S}$ *sobre el reticle fitat* $\mathrm{BFNM}_n(X)$.

En el teorema 4.2.34 del capítol 4 veiem el següent resultat:

Siguin T i S una t-norma i una t-conorma suaus sobre L_n, i siguin $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ les seves respectives extensions a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Llavors, la parella $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ satisfà l'equació funcional

$$\mathcal{T}(A,B) \oplus \mathcal{S}(A,B) = A \oplus B \quad \text{per a cada} \quad A, B \in \mathcal{A}_1^{L_n} \tag{7.4}$$

on $\oplus$ representa la suma de nombres borrosos discrets segons el principi de Zadeh, si i només si, la parella (T, S) satisfan l'equació de Frank.

Aleshores, un resultat similar pot ser obtingut en el cas de considerar una parella formada per una t-norma i una t-conorma $(\mathbb{T}, \mathbb{S})$ sobre $\mathrm{BFNM}_n(X)$ construïdes d'acord a les condicions establertes en les proposicions 7.3.8 i 7.3.9.

Teorema 7.3.10. *Siguin* T,S *una t-norma i una t-conorma divisibles sobre* L_n *i consideren respectivament, la t-norma i la t-conorma* $\mathbb{T}$, $\mathbb{S}$ *sobre* $\mathrm{BFNM}_n(X)$ *construïdes d'acord a les proposicions 7.3.8 i 7.3.9. Aleshores,* $(\mathbb{T}, \mathbb{S})$ *és solució de l'equació de Frank*

$$\mathbb{T}(A,B) + \mathbb{S}(A,B) = A + B \quad \textit{per a cada} \quad A, B \in \mathrm{BFNM}_n(X) \tag{7.5}$$

si i només si la parella (T, S) *satisfà l'equació de Frank.*

Demostració. Per a cada $x \in X$ tenim que

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}(A,B) + \mathbb{S}(A,B))(x) &= \mathbb{T}(A,B)(x) \oplus \mathbb{S}(A,B)(x) \\ &= \mathcal{T}(A(x), B(x)) \oplus \mathcal{S}(A(x), B(x)) \end{aligned} \tag{7.6}$$

on $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ representen les extensions de T i S a $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Per altre part,

$$(A+B)(x) = A(x) \oplus B(x). \tag{7.7}$$

Com $(\mathbb{T}, \mathbb{S})$ és solució de l'equació de Frank aleshores implica que les expressions 7.6 i 7.7 són iguals, això és, per a tot $x \in X$ tenim que

$$\mathcal{T}(A(x), B(x)) \oplus \mathcal{S}(A(x), B(x)) = A(x) \oplus B(x)$$

I per tant, la parella $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ verifica l'equació 7.4. Ara, aplicant el teorema 4.2.34 resulta que (T, S) verifica l'equació de Frank.

El recíproc és totalment semblant. □

En las condicions del teorema 7.3.10 anterior tenim,

Proposició 7.3.11. *Si la parella $(\mathbb{T},\mathbb{S})$ és solució de l'equació de Frank en el reticle fitat $\mathrm{BFNM}_n(X)$, es verifica que*

$$\mathrm{card}(\mathbb{T}(A,B)) + \mathrm{card}(\mathbb{S}(A,B)) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) \tag{7.8}$$

per a qualsevol $A,B \in \mathrm{BFNM}_n(X)$.

Demostració.

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}(\mathbb{T}(A,B)) + \mathrm{card}(\mathbb{S}(A,B)) &= \sum_{x\in X} \mathbb{T}(A,B)(x) \oplus \sum_{x\in X} \mathbb{S}(A,B)(x) \\
&= \sum_{x\in X} \mathcal{T}(A(x),B(x)) \oplus \sum_{x\in X} \mathcal{S}(A,B)(x) \\
&= \sum_{x\in X} \mathcal{T}(A(x),B(x)) \oplus \mathcal{S}(A(x),B(x)) \\
&= \sum_{x\in X} A(x) \oplus B(x) \\
&= \sum_{x\in X} A(x) \oplus \sum_{x\in X} B(x) \\
&= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)
\end{aligned}$$

□

Nota 7.3.12. *De la mateixa manera com hem definit t-normes i t-conormes sobre el reticle fitat $\mathrm{BFNM}_n(X)$, a partir de t-normes i t-conormes definides sobre el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$ o la cadena L_n, podem construir altres tipus de funcions d'agregació, com ara, entre d'altres uninormes o nulnormes.*

Un interessant idea suggerida en [31], en el cas de multiconjunts estesos, és la d'operació binària funcional puntualment expressable (abreujadament f.p.e.). Concretament, en el cas dels multiconjunts estesos definits sobre l'univers X, $M(X)$, tenim:

Definició 7.3.13. *Una operació binària F sobre $M(X)$ es diu funcional puntualment expressable si i només si existeix una família d'operacions binàries sobre $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \infty$ tal que: $F(A,B)(x) = F_x(A(x),B(x))$ per a tot $A,B \in M(X)$ i per a tot $x \in X$. En aquest cas, és dirà que F és producte de F_x, $x \in X$ i serà denotat per $F = \prod_{x\in X} F_x$.*

Quant totes les operacions F_x són les mateixes, diguem F, aleshores $F(A,B)(x) = F(A(x),B(x))$ per a tot $A,B \in M(X)$. En aquest cas direm que F és funcionalment expressable i és el cas de les proposicions 7.3.8 i 7.3.9.

Nota 7.3.14. *El concepte d'operació funcional puntualment expressable és motiva pel fet de que en el context dels multiconjunts definits sobre un univers X, cadascuns dels seus elements pot tenir una naturalesa diferent (per exemple es poden tractar de diferents components químics, etc) i per tant a l'hora d'agregar informació de diferents multiconjunts del mateix univers és raonable pensar que s'empri depenent de l'element elegit una funció d'agregació o una altra i que no sigui necessàriament la mateixa funció d'agregació per a tots els elements de l'univers.*

De la mateixa manera, en el cas de $\mathrm{BFNM}_n(X)$ tenim:

Definició 7.3.15. *Una operació binària F sobre $\mathrm{BFNM}_n(X)$ es diu funcional puntualment expressable si i només si existeix una família d'operacions binàries sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ tal que: $F(A,B)(x) = F_x(A(x),B(x))$ per a tot $A,B \in \mathrm{BFNM}_n(X)$ i per a tot $x \in X$. En tal cas, denotarem F per $F = \prod_{x\in X} F_x$.*

Proposició 7.3.16. *Sigui* F *una operació binària sobre* $\mathrm{BFNM}_n(X)$ *que sigui f.p.e. com* $\{F_{x \in X}\}$. *Aleshores:* F *és una t-norma (t-conorma) si i només si per a cada* $x \in X$, F_x *és una t-norma (t-conorma) en el reticle fitat* $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

Demostració. Immediata. □

Nota 7.3.17. *En general, és possible trobar exemples de t-normes sobre* $\mathrm{BFNM}_n(X)$ *que no siguin f.p.e. Per exemple, considerem un univers* X *que tal que* $\mathrm{card}(X) \geqslant 2$, *i sigui* $x_o \in X$. *Definim*

$$T(A,B)(x) = \begin{cases} A(x) & \textit{si } B(x) = 1_n \\ B(x) & \textit{si } A(x) = 1_n \\ \min(A(x), B(x), A(x_o), B(x_o)) & \textit{altrament} \end{cases}$$

7.4 MULTICONJUNTS VALORATS MITJANÇANTS INTERVALS

Sigui X un conjunt qualsevol i considerem el conjunt

$$\mathbb{B} = \{A \in \mathcal{A}_1^{L_n} \mid \mathrm{supp}(A) = \mathrm{core}(A)\} \subseteq \mathcal{A}_1^{L_n}, \tag{7.9}$$

En la proposició 3.2.34 hem vist que $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, \max, \min, 1_0, 1_n)$ és un reticle distributiu fitat, sent 1_0 i 1_n els nombres borrosos discrets que tenen per suport els intervals $[0,0]$ i $[n,n]$ respectivament. Ara, usant aquest reticle com a conjunt de valoració, podem considerar una altra extensió dels multiconjunts clàssics de la següent manera.

Definició 7.4.1. *Anomenarem multiconjunt valorat mitjançant intervals a un multiconjunt* M *definit sobre l'univers* X *i valorat en el reticle* $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, \max, \min, 1_0, 1_n)$, *és a dir,* M *és una aplicació* $M : X \to \mathbb{B}$ *tal que* $M(x) \in \mathbb{B}$.

Nota 7.4.2. *Aquest tipus de multiconjunts és interpretat així:*

Per a cada element $x \in X$ *la multiciplitat* $M(x)$ *d'aquest element, pot ser un nombre natural qualsevol de la cadena* L_n *que estigui inclòs en el suport del nombre borrós discret* $M(x)$, *però que no es té la certesa de quin és exactament però que si que se sap que ha de ser sempre un element del suport de* $M(x)$.

Notació 7.4.3. *Denotarem per* $M_{\mathbb{B}(X)}$ *al conjunt de multiconjunts interval valorats definits sobre l'univers* X *i valorats en* $\mathbb{B}$.

A partir de les operacions min i max definides sobre el reticle $\mathbb{B}$ podem definir la unió i la intersecció de multiconjunts interval valorats de la següent manera,

Definició 7.4.4. *Siguin* $M, N \in M_{\mathbb{B}(X)}$.

- *La intersecció dels multiconjunts valorats mitjançant intervals* M *i* N, *serà el multiconjunt valorat mitjançant intervals,* $M \wedge N$, *definit puntualment per a tot* $x \in X$ *com*

$$(M \wedge N)(x) = \min(M(x), N(x))$$

- *La unió dels multiconjunts valorats mitjançant intervals* M *i* N, *serà el multiconjunt valorat mitjançant intervals,* $M \vee N$, *definit puntualment per a tot* $x \in X$ *com*

$$(M \vee N)(x) = \max(M(x), N(x))$$

A partir de la proposició 3.2.34 es verifica el següent resultat.

Proposició 7.4.5. *El conjunt* $M_{\mathbb{B}(X)}$ *és un reticle distributiu fitat amb les operacions unió* $\vee$ *i intersecció* $\wedge$ *definides abans i amb fites els multiconjunts* M_0 *(definit puntualment per a tot* $x \in X$ *com* $M_0(x) = 1_0$*) i* M_n *(definit puntualment per a tot* $x \in X$ *com* $M_n(x) = 1_n$*).*

D'altra banda, aquestes operacions ens permeten induir un ordre parcial.

Proposició 7.4.6. *Siguin* $A, B : X \to M_{\mathbb{B}(X)}$ *dos multiconjunts valorats mitjançants intervals. La relació binària* $A \leqslant B$ *si i només si* $A(x) \preceq B(x)$ *per a tot* $x \in X$*, és un ordre parcial en el conjunt* $M_{\mathbb{B}(X)}$.

7.4.1 *t-normes i t-conormes en el reticle* $M_{\mathbb{B}(X)}$

Similarment com hem fet en la secció 7.3.1, el que ens plantejam ara és la construcció de t-normes i t-conormes en el reticle fitat $M_{\mathbb{B}(X)} = (M_{\mathbb{B}(X)}, \vee, \wedge, M_0, M_n)$, on M_0 i M_n denoten els multiconjunts valorats mitjançant intervals tals que $M_0(x) = 1_0$ i $M_n(x) = 1_n$ per a tot $x \in X$.

En la següent resultat veurem que a partir d'un t-norma (t-conorma) definida sobre el reticle fitat $\mathbb{B}$ és possible construir una t-norma (t-norma) sobre $M_{\mathbb{B}(X)}$.

Proposició 7.4.7. *Per a cada t-norma* $\mathcal{T}$ *definida sobre* $\mathbb{B}$ *és possible construir una t-norma* $\mathbb{T}$ *sobre el reticle fitat* $M_{\mathbb{B}(X)}$ *de la següent manera:* $\mathbb{T}(A, B)$ *és el multiconjunt valorat mitjançant intervals tal que per a cada* $x \in X$

$$\mathbb{T}(A, B)(x) = \mathcal{T}(A(x), B(x))$$

Demostració. Similar a la demostració de la proposició 7.3.6. □

Anàlogament,

Proposició 7.4.8. *Per a cada t-conorma* $\mathcal{S}$ *definida sobre* $\mathbb{B}$ *és possible construir una t-conorma* $\mathbb{S}$ *sobre el reticle fitat* $M_{\mathbb{B}(X)}$ *de la següent manera:* $\mathbb{S}(A, B)$ *és el multiconjunt valorat mitjançant intervals tal que per a cada* $x \in X$

$$\mathbb{S}(A, B)(x) = \mathcal{S}(A(x), B(x))$$

Demostració. Immediata per ser $\mathbb{S}$ una t-conorma sobre $\mathbb{B}$. □

Sabem d'acord a les proposicions 4.2.17 i 4.2.18, que si $T(S)$ són t-normes (t-conormes) suaus definides sobre la cadena finita L_n és possible construir una t-norma (t-conorma) sobre el reticle fitat $\mathbb{B}$. Emprant aquest fet, tenim la següent proposició.

Proposició 7.4.9. *Per a cada t-norma suau* T *definida sobre la cadena* L_n *és possible construir una t-norma* $\mathbb{T}$ *sobre el reticle fitat* $M_{\mathbb{B}(X)}$.

Demostració. Semblant a la demostració de la proposició 7.3.9. □

Similarment,

Proposició 7.4.10. *Per a cada t-conorma* S *definida sobre la cadena finita* L_n *és possible construir un t-conorma* $\mathbb{S}$ *sobre el reticle fitat* $M_{\mathbb{B}(X)}$.

Anàlogament al teorema 7.3.10 i a la proposició 7.3.11, es té els següents resultats.

Teorema 7.4.11. *Siguin* T,S *una t-norma i una t-conorma divisibles sobre* L_n *i consideren respectivament, la t-norma i la t-conorma* $\mathbb{T}$ *,* $\mathbb{S}$ *sobre* $M_{\mathbb{B}(X)}$ *construïdes d'acord a les proposicions 7.4.9 i 7.4.10. Aleshores,* $(\mathbb{T}, \mathbb{S})$ *és solució de l'equació de Frank*

$$\mathbb{T}(A, B) + \mathbb{S}(A, B) = A + B \quad \textit{per a cada} \quad A, B \in M_{\mathbb{B}(X)} \tag{7.10}$$

si i només si la parella (T, S) *satisfà l'equació de Frank.*

Demostració. Similar al teorema 7.3.10. □

En las condicions del teorema 7.4.11 anterior tenim,

Proposició 7.4.12. *Si la parella* $(\mathbb{T}, \mathbb{S})$ *és solució de l'equació de Frank en el reticle fitat* $M_{\mathbb{B}(X)}$, *es verifica que*

$$\mathrm{card}(\mathbb{T}(A,B)) + \mathrm{card}(\mathbb{S}(A,B)) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) \tag{7.11}$$

per a qualsevol $A, B \in M_{\mathbb{B}(X)}$.

Nota 7.4.13. *De la mateixa manera com hem definit t-normes i t-conormes sobre el reticle fitat* $M_{\mathbb{B}(X)}$, *a partir de t-normes i t-conormes definides sobre el reticle* $\mathbb{B}$ *o la cadena* L_n, *podem construir altres tipus de funcions d'agregació, com ara, entre d'altres uninormes o nulnormes.*

De la mateixa manera que com s'ha fet en el cas de $BFNM_n(X)$ tenim:

Definició 7.4.14. *Una operació binària* F *sobre* $BFNM_n(X)$ *es diu funcional puntualment expressable si i només si existeix una família d'operacions binàries sobre* $\mathcal{A}_1^{L_n}$ *tal que:* $F(A,B)(x) = F_x(A(x), B(x))$ *per a tot* $A, B \in BFNM_n(X)$ *i per a tot* $x \in X$. *En tal cas, denotarem* F *per* $F = \prod_{x \in X} F_x$.

Proposició 7.4.15. *Sigui* F *una operació binària sobre* $M_{\mathbb{B}(X)}$ *que sigui f.p.e. com* $\{F_{x \in X}\}$. *Aleshores:* F *és una t-norma (t-conorma) si i només si per a cada* $x \in X$, F_x *és una t-norma (t-conorma) en el reticle fitat* $\mathbb{B}$.

Demostració. Immediata. □

Nota 7.4.16. *En general, és possible trobar exemples de t-normes sobre* $M_{\mathbb{B}(X)}$ *que no siguin f.p.e. El mateix exemple donat en la nota 7.3.17.*

8 CONCLUSIONS I LÍNIES DE TREBALL FUTUR

En aquesta memòria s'ha realitzat un estudi en profunditat d'una sèrie de qüestions relacionades amb els nombres borrosos discrets, inicialment des d'una vesant més teòrica i després des d'una altra més aplicada.

Una primera part l'hem dedicada a l'estudi de possibles estructures algebraiques (reticulars i monoidals) en el conjunt de nombres borrosos discrets DFN, fet que ha possibilitat posteriorment la construcció de funcions d'agregació i d'implicació en dit conjunt. Primerament, hem comprovat que les operacions, màxim (MAX) i mínim (MIN), obtingudes a partir del principi d'extensió de Zadeh i usualment emprades com a operacions reticulars en el conjunt de nombres borrosos FN, no són, en general, operacions tancades en el conjunt DFN. Així, hem construït unes noves operacions, màxim (max) i mínim (min), que ens ha permès dotar al conjunt $\mathcal{A}_r^S$, de nombres borrosos discrets tals que tenen per suport un subconjunt finit de termes consecutius d'una progressió aritmètica S de nombres naturals de diferència r, d'una estructura de reticle distributiu. En particular, hem demostrat que per a cada cadena finita $L_n = \{0, \cdots, n\}$, el conjunt $\mathcal{A}_1^{L_n}$, de nombres borrosos discrets tals que tenen per suport un subconjunt de nombres naturals consecutius inclòs en la cadena L_n, és un reticle distributiu fitat amb les operacions max i min. Endemés, hem estudiat la relació que tenen aquestes noves operacions amb el principi d'extensió de Zadeh, comprovant que en el conjunt $\mathcal{A}_r^S$ i, en particular també en $\mathcal{A}_1^{L_n}$, es verifiquen les igualtats $MAX = max$ i $MIN = min$. Finalment hem abordat l'estudi d'estructures monoidals en el conjunt DFN. Per això, ens hem plantejat la suma com a possible operació monoidal. Ara bé, donat que la suma de nombres borrosos discrets tampoc és tancada en DFN, hem proposat un conjunt de possibles sumes que dependran d'una funció que introduïm anomenada *associació*. En particular, es demostra que en el cas de considerar l'anomenada α-associació, la suma obtinguda a partir d'ella i la proposta per W. Wang (primer algorisme tancat de suma dins DFN conegut) coincideixen. A més, s'ha establert un ordre parcial que permet ordenar-les segons el tipus d'associació que hem fet servir per calcular-les. Per altra banda, hem analitzat si existeix algun tipus de relació entre el principi d'extensió de Zadeh i les sumes obtingudes a partir de les associacions. Així, s'ha comprovat que en el conjunt $\mathcal{A}_r^S$ la suma de nombres borrosos discrets calculada emprant el principi d'extensió és un mètode vàlid que coincideix amb la suma de nombres borrosos discrets realitzada a través de l'α-associació. En particular, hem vist que el reticle distributiu $\mathcal{A}_1$, de nombres borrosos discrets tals que tenen per suport un subconjunt de nombres naturals consecutius, té també estructura de monoide ordenat amb l'ordre induït a partir de les operacions max i min, i amb la suma de Zadeh (equivalent a la suma emprant les α-associacions) com a operació monoidal.

Una segona part d'aquest treball, ha abordat l'estudi i construcció de funcions d'agregació en el conjunt de nombres borrosos discrets, i en particular, sobre els reticles fitats $\mathcal{A}_1^{L_n}$ i $\mathbb{B} = \{A \in \mathcal{A}_1^{L_n} \mid \mathrm{supp}(A) = \mathrm{core}(A)\}$. En primer lloc, es proporciona un mètode que permet estendre una t-norma T (t-conorma S) suau definida sobre L_n al reticle fitat $\mathcal{A}_1^{L_n}$, comprovant que dita extensió $\mathcal{T}$ ($\mathcal{S}$) és una t-norma (t-conorma) i demostrant endemés que la restricció de $\mathcal{T}$ ($\mathcal{S}$) sobre $\mathbb{B}$ és una t-norma (t-conorma) a $\mathbb{B}$. També, s'estudia l'equació de Frank amb parelles $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$. Similarment al cas de les t-normes suaus, es construeix una negació forta $\mathcal{N}$ sobre el reticle borrós $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir de l'única negació forta N definida sobre la cadena finita L_n que ens servirà per estudiar la dualitat. En segon lloc, s'investiga la construcció de funcions d'agregació sobre el reticle borrós $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir de funcions d'agregació, no necessàriament suaus, definides sobre la cadena L_n. En concret, s'estudia en detall l'extensió d'uninormes, proporcionant caracteritzacions parcials de les uninormes que són extensions d'uninormes de U_{min} i de U_{max}. De manera semblant, s'analitzen les extensions de nulnormes comprovant que només és possible obtenir, en aquest cas, una caracterització parcial de dites extensions a diferència del cas discret. En tercer lloc, s'investiga la construcció de funcions d'agregació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ a partir de parelles de funcions d'agregació definides sobre la cadena L_n. En particular, són considerats els casos d'extensions de parelles d'uninormes i nulnormes. Es completa aquesta segona part del treball amb un estudi sobre les extensions de funcions d'agregació n-dimensionals.

Una tercera part s'ha centrat en l'estudi i construcció de funcions d'implicació sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Així, de manera semblant al cas de les funcions d'agregació s'ha demostrat que l'extensió $\mathcal{I}$ d'una funció d'implicació discreta I és una funció d'implicació sobre el reticle borrós, i que aquesta conserva moltes propietats de la funció I, com ara, el principi d'intercanvi, contraposició, etc. En el cas particular de l'extensió d'una S, QL o D implicació discreta, s'ha comprovat que dita extensió també és una S, QL i D implicació sobre el reticle borrós $\mathcal{A}_1^{L_n}$ respectivament. Continuant amb aquest estudi, es comprova que l'extensió d'una R-implicació discreta no produeix una funció d'implicació residual en $A_1^{L_n}$. Per aquesta raó, es proposa un mètode especific que permet obtenir la implicació residual d'una t-norma $\mathcal{T}$ que és extensió d'una t-norma discreta T. Demostrant, en particular, que aquesta funció d'implicació satisfà, entre d'altres, el principi de residuació i el Modus ponens. Com a conseqüència d'aquestes propietats, i tenint en compte que $A_1^{L_n}$ és un reticle fitat, es prova que dit conjunt és a més residuat. Per acabar, es dedica un apartat a l'estudi dels reticles de les implicacions borroses en general i de les funcions d'implicació borroses recíproques.

En la darrera part d'aquesta memòria, s'han presentat dues possibles aplicacions basades en els punts descrits anteriorment. Així, s'analitzen diferents processos d'agregació de la informació basats en l'extensió de funcions d'agregació discretes. En concret, es proposen dos mètodes. El primer d'ells es fonamenta en l'extensió de t-normes i t-conormes discretes i el segon en extensions d'uninormes idempotents discretes tot i que es pot fer la mateixa aproximació amb qualsevol funció d'agregació discreta. Cadascun d'aquests mètodes és aplicat a problemes de presa de decisions i d'avaluació subjectiva, que permeten fer una agregació directa de les valoracions borroses donant com a resultat una valoració borrosa de la mateixa classe. A més s'ha vist que, en el cas d'utilitzar una aproximació basada en un parell de funcions d'agregació $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ amb $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$, obtenim un resultat intermedi entre l'agregació a partir de la funció $\mathcal{F}$ i l'agregació a partir de $\mathcal{G}$. Finalment, es defineixen dues extensions del concepte clàssic de multiconjunt, resultat de l'estudi de les propietats i operacions dels reticles $A_1^{L_n}$ i $\mathbb{B}$ obtingudes al llarg d'aquest treball. D'aquesta forma és defineixen els multiconjunts naturals borrosos, els multiconjunts naturals borrosos fitats i els multiconjunts valorats per intervals. De cadascuns d'ells es realitza un estudi de les seves propietats i es comprova que es pot construir sobre els tres casos una estructura de reticle distributiu.

A la vista del treball desenvolupat en aquesta memòria, ens hem plantejat una sèrie de punts que poden ser interessants i que servirien per a aprofundir en l'estudi dels nombres borrosos discrets.

1.- Definició i estudi d'aritmètiques en el conjunt DFN.

De manera semblant a com s'han definit una família de possibles sumes tancades en el conjunt DFN mitjançant les associacions, un primer objectiu seria estudiar la resta d'operacions aritmètiques sobre DFN (multiplicació, divisió i resta) i les seves propietats, per així poder tenir una aritmètica completa similar a la construïda en el

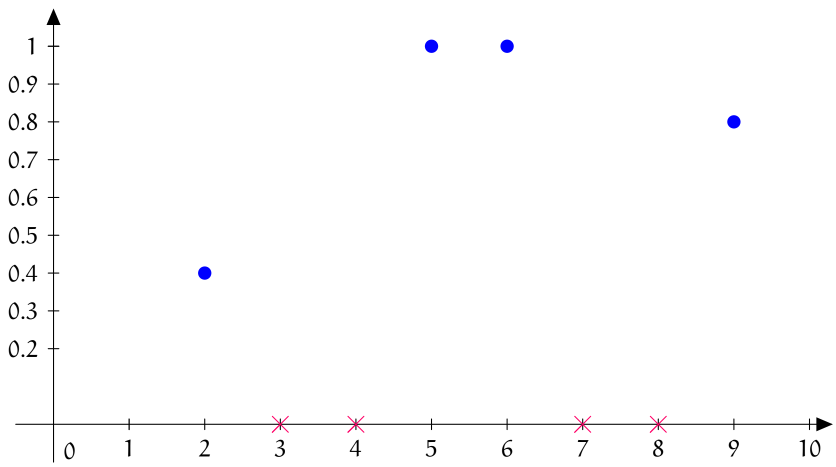

Figura 41: Els punts blaus corresponent al dfn $B = \{0.4/2, 1/5, 1/6, 0.8/9\}$ utilitzat com a valoració per part de l'expert i les creus vermelles *forats* corresponen a la possible *incongruència o manca d'informació* en la valoració efectuada per part de l'expert.

conjunt de nombres borrosos FN. Notem que d'aquesta forma es tindrà una aritmètica diferent per a cada associació possible i, per tant, diferents opcions a elegir segons els casos. Un primer intent en aquest sentit es pot trobar a [146] on a més de la suma també s'estudia la multiplicació. El que ens plantejam en aquesta direcció, és analitzar si existeix una relació entre els mètodes exposats en [146] i els que pensam que es poden desenvolupar a partir de les associacions.

2.- **Agregació amb falta d'informació.**

Treballar amb informació interpretada en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$ suposa que el suport de cada nombre borrós discret és un subconjunt de nombres naturals consecutius de L_n, és a dir, un subinterval de L_n. Notem que això és lògic perquè, si demanam a un expert que ens faci una valoració d'un fet concret emprant un nombre borrós discret sobre la cadena L_n, cal esperar que el suport del mateix no tingui *forats* (veure figura 41) que podrien ser interpretats com una possible incongruència en la seva avaluació. Emperò, en moltes ocasions pot ser que dita informació no sigui completa i que falti part d'ella (perquè s'hagi perdut o perquè es desconeix pel motiu que sigui). Treballar amb aquesta manca d'informació equival en el nostre entorn a treballar amb nombres borrosos discrets en general (amb suport un subconjunt qualsevol de L_n), és a dir, treballar en $\mathrm{DFN}(L_n)$ en lloc de treballar en $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Per això, en un futur ens proposam l'estudi de funcions d'agregació basades en informació incompleta, és a dir, aquelles que fusionin informació expressada mitjançant nombres borrosos discrets de $\mathrm{DFN}(L_n)$. Per tal de poder *recuperar i/o manipular* la informació perduda, la idea és, mitjançant una associació discreta $\mathbf{A}$ (veure definició 3.3.26), assignar a cada nombre $B \in \mathrm{DFN}(L_n)$ un nombre borrós discret $\mathbf{A}(B) \in \mathcal{A}_1^{L_n}$. Després, es podran manipular a partir de les funcions d'agregació conegudes sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ i donar com a resultat, o bé, el nombre obtingut resultat de l'agregació, o bé, restringir-ho al suport corresponent i donar-ho com una informació incompleta, només manipulada en la part coneguda.

3.- **Relació dels nombres borrosos discrets amb altres aproximacions borroses**

En la literatura, com hem anat comentant en aquest treball, existeixen moltes generalitzacions que han estat desenvolupades per a millorar el modelat de variables lingüístiques i la pròpia incertesa. Entre elles podem esmentar, els subconjunts interval valorats [27, 61], els conjunts intuïcionistes d'Atanassov [2], equivalents als anteriors [61], o els subconjunts borrosos tipus 2 [106, 114] que inclouen als anteriors. Recentment, algunes generalitzacions d'aquestes aproximacions han estat introduïdes: *conjunts borrosos n-dimensionals* [10, 11, 131] i *subconjunts borrosos hesitant* [126, 133, 154].

Així com a [61] s'estudia la equivalència entre conjunts interval valorats i intuïcionistes, la nostra intenció és precisament estudiar la relació entre el conjunt $\mathcal{A}_1^{L_n}$ i dites aproximacions, en especial, amb els conjunts borrosos n-dimensionals. Notem que que qualsevol nombre borrós discret $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ coincideix, en cada nivell α, amb un interval de L_n. A més, les operacions definides sobre elements de $\mathcal{A}_1^{L_n}$ coincideixen en cada nivell amb les operacions interval valorades corresponents. Per altra banda, a cada $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$ li corresponen un número finit de nivells que siguin rellevants (segons el nombre finit de valors que agafi), diguem $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Recordem que cada nivell α_i és un interval $[a_i, b_i]$ de manera que aquests intervals estan encaixats, $[a_i, b_i] \subseteq [a_{i-1}, b_{i-1}]]$ per a tot $i = 1, \ldots, m$. D'aquesta forma, podríem assignar a cada $A \in \mathcal{A}_1^{L_n}$, un número borrós n-dimensional donat per el grau de pertinència $(a_0, a_1, \ldots, a_m, b_m, \ldots, b_0)$. La nostra intenció és estudiar dites connexions i establir les relacions entre les diverses aproximacions que puguin existir.

4.- Construcció, caracterització i estudi de funcions d'agregació i d'implicació en el conjunt de nombres borrosos discrets

Al llarg d'aquesta memòria hem vist que l'extensió d'una t-norma (t-conorma) definida sobre L_n és una t-norma (t-conorma) en el reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$. Una qüestió que es planteja immediatament és a veure si totes les t-normes sobre $A_1^{L_n}$ són d'aquesta forma. És a dir, són totes les t-normes sobre $A_1^{L_n}$ extensió d'alguna t-norma T sobre L_n? Estam convençuts de que no és així i estam treballant actualment en un possible contraexemple. Si la nostra previsió es confirma, llavors la pregunta clau seria: És possible una caracterització de les t-normes (t-conormes) sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que són extensió de t-normes (t-conormes) definides sobre L_n?. Similars qüestions és poden plantejar en el cas d'uninormes, nulnormes i de les funcions d'implicacions. Un altre possible treball futur per tal d'apropar-nos a una possible caracterització consistiria en cercar quines són les propietats de les t-normes sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ que són extensió de t-normes sobre L_n.

Estudiar altres connectius lògics com les extensions de funcions d'implicacions discretes obtingudes a partir d'uninormes i les coimplicacions (connectius duals de les implicacions que han estat estudiats en altres àmbits, veure [56, 129]).

D'altra banda, en [92] es proposa una classificació de les funcions d'agregació definides sobre conjunts parcialment ordenats generalitzant l'inicialment establerta per Dubois-Prade [69] donada sobre l'interval unitat $[0, 1]$ i definida a partir de la seva relació entre les funcions min i max. El que seria interessant és classificar aquestes noves funcions d'agregació sobre el conjunt parcialment ordenat $\mathcal{A}_1^{L_n}$ d'acord als criteris donats en [92].

En [130] es realitza un estudi sobre extensions de t-normes definides sobre reticles fitats. Seguint aquesta idea, un altre punt interessant a desenvolupar en un futur seria l'extensió de t-normes (t-conormes) que estan definides sobre el subreticle fitat $\mathbb{B} \subseteq \mathcal{A}_1^{L_n}$. Hem vist que qualsevol t-norma (t-conorma) sobre $\mathcal{A}_1^{L_n}$ restringida a $\mathbb{B}$ és també una t-norma (t-conorma) sobre dit reticle. El que voldríem estudiar és el problema a l'inrevés, és a dir, donada una t-norma $\mathcal{T}$ definida sobre $\mathbb{B}$ és possible estendre-la, de manera que dita extensió sigui una t-norma (t-conorma) en $\mathcal{A}_1^{L_n}$ tal que la seva restricció coincideixi de nou amb $\mathcal{T}$.

5.- Relació de diferents estructures reticulars dels nombres borrosos discrets amb les lògiques subestructurals

En els darrers anys els estudis sobre reticles residuats no s'han centrat només des de l'òptica de pures estructures algebraiques, sinó com a possibles semàntiques de diferents tipus de lògiques subestructurals [89] . El cas més general de lògica subestructural és la lògica plena de Lambek [89, 118], denotada per FL, que resulta de la lògica clàssica suprimint les tres regles estructurals anomenades intercanvi, contracció i debilitament i que corresponen semànticament a reticles residuats amb element 0, no commutatius i no afitats. Entre els principals exemples de lògiques subestructurals a més de l'anterior, cal recordar la lògica intuicionista (IL-lògica, no considerada com a lògica borrosa), la lògica monoidal de Höhle (ML-lògica) [86], no considerada com a lògica borrosa, la lògica monoidal basada amb t-normes contínues per la esquerra d'Esteva i Godo (MTL-lògica) [72], la lògica bàsica de Hájek (BL lògica) [87], la lògica de Lukasiewicz [87], la lògica producte [87], la lògica basada en uninormes de Metcalfe i Montagna (UL lògica) [107, 108], que tenen com a semàntica les àlgebres de Heyting, les ML-àlgebres , les MTL-àlgebres, les BL-àlgebres, les MV-àlgebres, les àlgebres de Heyting prelineals i les UL-àlgebres respectivament. Totes aquestes àlgebres comparteixen una estructura comuna que és un reticle residuat, amb més o menys propietats addicionals depenent de la lògica subestructural que representin.

En el capítol 5 (corol·lari 5.2.9) demostram que $\mathcal{A}_1^{L_n} = (\mathcal{A}_1^{L_n}, 1_0, 1_n, \min, \max, \mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}})$ és un reticle residuat fitat. El que ens plantejam és quin tipus de lògica subestructural, de manera semblant als casos que hem recordat abans, modelitzarà aquest reticle. Bona part de l'estudi d'aquest problema consistirà en analitzar amb detall quines propietats algebraiques té exactament l'esmentat reticle $\mathcal{A}_1^{L_n}$.

D'altra banda, A. Tzouvaras [140, 141] estudia els multiconjunts clàssics des de la perspectiva d'una possible semàntica d'un fragment de la lògica lineal. La lògica lineal, també anomenada lògica dels recursos finits, introduïda i desenvolupada per J.Y. Girard [79], es també una lògica subestructural que resulta de la lògica clàssica suprimint les regles de contracció i debilitament. Per aquesta lògica, s'han presentat diverses semàntiques, principalment les Xarxes de Petri [95], Categories [95] i algebraiques [3, 4, 142, 143]. Aquestes darreres consideren àlgebres que han rebut distints noms, com ara, Àlgebra lineal intuicionista [139], Àlgebra Clàssica lineal [139], Estructures de Girard [3, 4], Girales [143], Arabescos [142], etc; segons les operacions unitàries i binàries que s'hi considerin, però que, en definitiva, són reticles residuats commutatius on s'hi consideren, a més a més, les possibilitat de completitud, d'existència de fites superiors i inferiors, negació involutiva i partícules modals o exponencials que defineixen reductes booleans.

D'aquesta forma, seria interessant estudiar primerament l'estructura de reticle residuat fitat que pot tenir el conjunt de multiconjunts natural borrosos fitats derivat del fet de que $\mathcal{A}_1^{L_n} = (\mathcal{A}_1^{L_n}, 1_0, 1_n, \min, \max, \mathcal{T}, \mathcal{I}_{\mathcal{T}})$ té dita estructura. També cal investigar, a partir d'aquest fet, quina semàntica de lògica subestructural modelitzarà. En aquesta direcció, seria raonable comparar el resultat obtingut amb els treballs de A. Tzouvaras sobre la lògica lineal dels multiconjunts.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Alcalde, A. Burusco i R. Fuentes-González. A constructive method for the definition of interval-valued fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 153:211–227, 2005. (Citat a la pàgina 116.)

[2] K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20:87–96, 1986. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[3] A. Avron. The semantic and Proof Theory of Linear Logic. *Theoretical Computer Science*, 57:161–184, 1988. (Citat a la pàgina 167.)

[4] A. Avron. Some Properties of Linear Logic Proved by Semantic. *Method Journal of Logic and Computation*, 4:929–938, 1994. (Citat a la pàgina 167.)

[5] De Baets B. Idempotent uninorms. *European Journal of Operational Research*, 118(3):631–642, 1999. (Citat a la pàgina 15.)

[6] M. Baczyński. Residual implications revisited. Notes on the Smets Magrez Theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 145:267–277, 2004. (Citat a les pàgines 4 i 101.)

[7] M. Baczyński i B. Javaram. On the characterizations of (S,N)-implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 158:1713–1727, 2007. (Citat a les pàgines 4 i 101.)

[8] M. Baczyński i B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volum 231 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, 2008. (Citat a les pàgines 4, 107, 120 i 122.)

[9] E. Barrenechea, H. Bustince, De Baets B. i C. Lopez-Molina. Construction of Interval-Valued Fuzzy Relations With Application to the Generation of Fuzzy Edge Images. *IEEE transactions of Fuzzy Systems*, 19(5):819–830, 2011. (Citat a la pàgina 5.)

[10] B. Bedregal, G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, J. Fernandez i R. Mesiar. A characterization theorem for t-representable n-dimensional triangular norms. Dins *Advances in intelligent and soft computing (Eurofuse 2011)*. Springer, 2011. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[11] B. Bedregal, G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, R. Mesiar i D. Paternain. A class of fuzzy multisets with a fixed number of memberships. *Information Sciences*, doi:10.1016/j.ins.2011.11.040, 2011. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[12] G. Beliakov, A. Pradera i T. Calvo. *Aggregation Functions: A Guide for Practicioners*. Studies in Fuzziness and Soft Computing, 2007. (Citat a les pàgines 3, 4 i 125.)

[13] G. Birkhoff. On the Lattice theory of ideals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 40:613–619, 1934. (Citat a la pàgina 27.)

[14] G. Birkhoff. Lattices and their applicatons. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44:793–800, 1940. (Citat a les pàgines 27 i 154.)

[15] R. Biswas. An application of fuzzy sets in students' evaluation. *Fuzzy Sets and Systems*, 74(2):187–194, 1995. (Citat a les pàgines 130, 131, 133 i 137.)

[16] W. Blizard. Dedekind multisets and function shells. *Theorical computer science*, 110:79–98, 1993. (Citat a la pàgina 145.)

[17] W.D. Blizard. The development of multiset theory. *Modern logic*, 1(4):319–352, 1991. (Citat a les pàgines 5, 145 i 146.)

[18] Carl B. Boyer. *Historia de las matemáticas*. Alianza Universidad Textos, 1994. (Citat a la pàgina 1.)

[19] J.J. Buckley i E. Eslami. *An introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets*. Advances in Soft Computing, 2002. (Citat a la pàgina 2.)

[20] H. Bustince. Indicator of inclusion grade for interval-valued fuzzy sets. Application to approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. *Int. J. Approx. Reasoning*, 23(3):137–209, 2000. (Citat a la pàgina 5.)

[21] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, C. Guerra, P. Couto i P. Melo-Pinto. Generalized Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Index: Construction of Atanassov's Fuzzy Entropy from Fuzzy Implication Operators. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 19(1):21–69, 2011. (Citat a la pàgina 5.)

[22] H. Bustince, E. Berrenechea i M. Pagola. Generation of interval-valued fuzzy and atanassov's intuitionistic fuzzy connectives from fuzzy connectives and from K-alpha operators: Laws for conjunctions and disjunctions, amplitude. *Int. J. Intell. Systems*, 23(6):680–714, 2008. (Citat a la pàgina 5.)

[23] H. Bustince, P. Burillo i F. Soria. Automorphisms, negation and implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 134:209–229, 2003. (Citat a les pàgines 4 i 101.)

[24] H. Bustince, Barrenechea. E. i M. Pagola. Generation of interval-valued fuzzy and atanassov's intuitionistic fuzzy connectives from fuzzy connectives and from K operators: Laws for conjunctions and disjunctions, amplitude. *International Journal of Intelligent Systems*, 23(6):680–714, 2008. (Citat a la pàgina 5.)

[25] H. Bustince, J. Kacprzyk i V. Mohedano. Intiutionistic Fuzzy Sets. Application to Intuitionistic Fuzzy Complementation. *Fuzzy Sets and Systems*, 114:485–504, 2000. (Citat a la pàgina 5.)

[26] H. Bustince, J. Montero, E. Barrenechea i M. Pagola. Laws for conjunctions and disjunctions in interval type 2 fuzzy sets. Dins *FUZZ-IEEE 2008*, pàgines 1613–1618. 2008. (Citat a la pàgina 5.)

[27] H. Bustince, J. Montero, M. Pagola, E. Barrenechea i D. Gomez, capítol A Survey of Interval-Valued Fuzzy Sets, pàgines 491–515. John Wiley & Sons, Ltd., West Sussex, *Handbook of Granular Computing*, 2008. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[28] T. Calvo, De Baets B. i J. Fodor. Structure of uninorms with given continuous underlying t-norms and t-conorms. Dins *Abstracts of 24th Linz Seminar on Fuzzy Sets*. 2003. (Citat a la pàgina 3.)

[29] T. Calvo, B. De Baets i J.C. Fodor. The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 120:385–394, 2001. (Citat a les pàgines 3 i 4.)

[30] T. Calvo, G. Mayor i R. Mesiar, editors. *Aggregation Operators*, volum 97 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer-Verlag, 2002. (Citat a les pàgines 3 i 4.)

[31] J. Casasnovas i G. Mayor. Discrete t-norms and operations on extended multisets. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(10):1165–1177, 2008. (Citat a les pàgines 5, 8, 145, 146, 148, 155 i 158.)

[32] J. Casasnovas i J. V. Riera. Números borrosos asociados a un número borroso discreto. Dins *Actas XIII Congreso Español sobre tecnologías y lógica fuzzy (ESTYLF 2006)*, pàgines 47–52. 2006. (Citat a la pàgina ix.)

[33] J. Casasnovas i J. V. Riera. On the addition of discrete fuzzy numbers. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 5:549–554, 2006. (Citat a la pàgina ix.)

[34] J. Casasnovas i J. V. Riera. On the addition of discrete fuzzy numbers. Dins *WSEAS International Conference of Applied Mathematics*, pàgines 432–437. 2006. (Citat a la pàgina ix.)

[35] J. Casasnovas i J. V. Riera. Discrete fuzzy numbers defined on a subset of natural numbers. Dins *Theoretical Advances and Applications of Fuzzy Logic and Soft Computing*, volum 42 de *Advances in Soft Computing*, pàgines 573–582. Springer, 2007. (Citat a les pàgines ix i 110.)

[36] J. Casasnovas i J. V. Riera. Extended distances between fuzzy points. Dins *New Dimensions in fuzzy logic and related technologies (Proceedings 5th EUSFLAT Conference)*, volum II, pàgines 163–168. 2007. (Citat a la pàgina ix.)

[37] J. Casasnovas i J. V. Riera. Maximum and Mininum of Discrete Fuzzy numbers. Dins *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications: artificial intelligence research and development*, volum 163, pàgines 273–280. IOS Press, 2007. (Citat a la pàgina ix.)

[38] J. Casasnovas i J. V. Riera. Extension of discrete t-norms and t-conorms to discrete fuzzy numbers. Dins *Proceedings of the fifth international summer school on aggregation operators (AGOP 2009)*, pàgines 77–82. 2009. (Citat a la pàgina ix.)

[39] J. Casasnovas i J. V. Riera. Lattice properties of discrete fuzzy numbers under extended min and max. Dins *Proceedings IFSA-EUSFLAT*. 2009. (Citat a la pàgina ix.)

[40] J. Casasnovas i J. V. Riera. Aggregation and arithmetic operations on fuzzy natural number-valued multisets. Dins *Proceedings ESTYLF 2010*. 2010. (Citat a la pàgina ix.)

[41] J. Casasnovas i J. V. Riera. Aggregation of bounded fuzzy natural number-valued multisets. Dins *Modeling Decisions for Artificial Intelligence*, volum 6408 de *LNAI*, capítol 67-78. Springer, 2010. (Citat a la pàgina ix.)

[42] J. Casasnovas i J. V. Riera. Negation Functions in the Set of Discrete Fuzzy Numbers. Dins *Proceedings IPMU 2010*. 2010. (Citat a la pàgina x.)

[43] J. Casasnovas i J. V. Riera. S-implications in the set of discrete fuzzy numbers. Dins *Proceedings IEEE-WCCI 2010*, pàgines 2741–2747. 2010. (Citat a la pàgina x.)

[44] J. Casasnovas i J. V. Riera. Triangular norms and conorms on the set of discrete fuzzy numbers. Dins *Proceedings IPMU*. 2010. (Citat a la pàgina ix.)

[45] J. Casasnovas i J. V. Riera. Extension of discrete t-norms and t-conorms to discrete fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 167(1):65–81, 2011. (Citat a la pàgina ix.)

[46] J. Casasnovas i J. V. Riera. Weighted means of subjective evaluations. Dins *Soft Computing in Humanities and Social Sciences*, capítol 17, pàgines 297–320. Springer-Verlag, 2011. (Citat a la pàgina ix.)

[47] J. Casasnovas i F. Rosselló. Scalar and fuzzy cardinalities of crisp and fuzzy multisets. *International Journal of Intelligent Sytems*, 24(6):587–623, 2009. (Citat a les pàgines 5, 150, 151 i 152.)

[48] J. Casasnovas i J. Torrens. An Axiomatic Approach to the fuzzy cardinality of finite fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 133:193–209, 2003. (Citat a les pàgines 54, 146, 150 i 152.)

[49] J. Casasnovas i J. Torrens. Scalar cardinalities of finite fuzzy sets for t-norms and t-conorms. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 11:599–615, 2003. (Citat a les pàgines 54, 146 i 150.)

[50] K. Chakrabarty i I. Despi. nk-bags. *International Journal of Intelligent Systems*, 22:223–236, 2007. (Citat a la pàgina 5.)

[51] C. L. Chang i R.C.T. Lee. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. Academic Press, 1973. (Citat a la pàgina 1.)

[52] C.C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:456–490, 1958. (Citat a la pàgina 2.)

[53] S.M. Chen i C.H. Lee. New methods for students' evaluation using fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 104(2):209–218, 1999. (Citat a les pàgines 130, 133 i 137.)

[54] Dubois D. i Prade H., editors. *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Kluwer Academic Publishers, 2000. (Citat a la pàgina 24.)

[55] B. De Baets. Model implicators and their characterization. Dins *Proceedings of the First ICSC International Symposium on Fuzzy logic*, pàgines A42–A49. 1995. (Citat a les pàgines 3, 4, 5, 27, 83, 92 i 101.)

[56] B. De Baets. Coimplicators, the forgotten connectives. *Tatra Mountains*, 12:229–240, 1997. (Citat a les pàgines 4, 27 i 166.)

[57] B. De Baets, J. Fodor, D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Idempotent Uninorms on Finite Ordinal Scales. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17(1):1–14, 2009. (Citat a les pàgines 3, 14 i 15.)

[58] B De Baets i R. Mesiar. Triangular norms on product lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 104:61–75, 1999. (Citat a les pàgines 5 i 27.)

[59] G. Deschrijver, C. Cornelis i E.E. Kerre. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 12:45–61, 2004. (Citat a la pàgina 69.)

[60] G. Deschrijver, C. Cornelis i E.E. Kerre. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification, application. *International Journal of Approximate Resoning*, 35(1):55–95, 2005. (Citat a les pàgines 4 i 69.)

[61] G. Deschrijver i E. Kerre. On the relation between some extensions of fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 133:227–235, 2003. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[62] G. Deschrijver i E. Kerre. Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 2:229–248, 2005. (Citat a la pàgina 5.)

[63] G. Deschrijver i E. Kerre. On the position of intuitionistic fuzzy set theory in the framework of theories modelling imprecision. *Information Sciences*, 8:1860–1866, 2007. (Citat a la pàgina 5.)

[64] G. Deschrijver i K. Pavol. On the cardinalities of interval-valued fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(15):1728–1750, 2007. (Citat a la pàgina 5.)

[65] D. Dubois. A new definition of the fuzzy cardinality of finite sets preserving the classical additivity property. *BUSEFAL*, 5:11–12, 1981. (Citat a les pàgines 54 i 146.)

[66] D. Dubois i H. Prade. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*, 9(6):613–626, 1978. (Citat a la pàgina 2.)

[67] D. Dubois i H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems:Theory and Applications*, volum 144 de *Mathematics in Science and Ingineering*. Academic Press, 1980. (Citat a les pàgines 2, 23 i 24.)

[68] D. Dubois i H. Prade. Fuzzy cardinality and the modeling of imprecise quantification. *Fuzzy Sets and Systems*, 16:199–230, 1985. (Citat a les pàgines 5, 54 i 146.)

[69] D. Dubois i H. Prade. On the use of aggregation operations in information fussion processes. *Fuzzy Sets and Systems*, 177(3):143–161, 2004. (Citat a la pàgina 166.)

[70] F. Esteva. Negaciones en la teoria de conjuntos difusos. *Sthocastica*, V:33–44, 1981. (Citat a la pàgina 71.)

[71] F. Esteva i X. Domingo. Sobre funciones de negación en [0,1]. *Sthocastica*, 4(2):144–166, 1980. (Citat a la pàgina 71.)

[72] F. Esteva i L. Godo. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 124:271–288, 2001. (Citat a les pàgines 2, 4, 19, 101 i 167.)

[73] F. Esteva, L. Godo, P. Hájek i F. Montagna. Hoops and Fuzzy Logic. *J. Logic Comput.*, 13:531–555, 2003. (Citat a la pàgina 2.)

[74] F. Esteva, L. Godo, P. Hájek i M. Navara. Residuated fuzzy logics with an involutive negation. *Arch. Math. Logic*, 39:103–124, 2000. (Citat a la pàgina 2.)

[75] F. Esteva, L. Godo i F. Montagna. Equational characterization of the subvarieties of BL generated by t-norm algebras. *Studia Logica*, 76:161–200, 2004. (Citat a la pàgina 2.)

[76] Calude C. et al., editor. *Multiset Procesing (Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View)*, volum 2235 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2001. (Citat a les pàgines 145 i 146.)

[77] J. Fodor, J. Rudas i B. Bede. Uninorms and Absorbing Norms with Applications to Image Processing. Dins *SISY 2006 4th Serbian-Hungarian Joint Symposium on Intelligent Systems*, pàgines 59–72. 2006. (Citat a la pàgina 3.)

[78] J. Fodor, R. Yager i A. Rybalov. Structure of uninorms. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 5(4):411–427, 1997. (Citat a la pàgina 3.)

[79] J. Y. Girard. Linear Logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1):1–102, 1987. (Citat a la pàgina 167.)

[80] K. Girish i S. Jacob John. Relations and functions in multiset context. *Information Sciences*, 179(6):758–769, 2009. (Citat a la pàgina 5.)

[81] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar i E. Pap. Aggregation functions. Dins *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2009. (Citat a la pàgina 3.)

[82] George Grätzer. *General Lattice Theory*. Academic Press, 1978. (Citat a la pàgina 27.)

[83] P. Grzegorzewski. Metrics and orders in space of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 97:83–94, 1998. (Citat a la pàgina 2.)

[84] Michael Hanss. *Applied Fuzzy Arithmetic . An Introduction with Engineering Applications.*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005, 2005. (Citat a les pàgines 2 i 23.)

[85] F. Herrera i E. Herrera-Viedma. Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115:67–82, 2000. (Citat a la pàgina 141.)

[86] U. Höhle. *Commutative residuated monoids, In Non classical Logics and their Applications to Fuzzy Subsets (A handbook of the mathematical foundations of the fuzzy set theory)*. Kluwer Academic Publishers, 1995. (Citat a la pàgina 167.)

[87] P. Hájek. *Metamathematics of fuzzy logic (Trends in Logic)*. Kluwer Academic Publishers, 2001. (Citat a les pàgines 2 i 167.)

[88] S. Jenei. A more efficient method for defining fuzzy connectives. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:22–35, 1997. (Citat a la pàgina 72.)

[89] P. et al. Jipsen. *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at substructural Logics*, volum 151 de *Studies in Logic an the foundations of mathematics*. Elsevier, 2007. (Citat a les pàgines 19, 27 i 167.)

[90] G. Klir i B. Yuan. *Fuzzy sets and Fuzzy Logic (Theory and applications)*. Prentice Hall, 1995. (Citat a les pàgines 2, 4, 5, 6, 23, 24, 25, 29, 41, 48, 59, 101, 110, 145, 146 i 150.)

[91] A. Kolesarova, G. Mayor i R. Mesiar. Weighted ordinal means. *Information Sciences*, 177:3822–3830, 2007. (Citat a la pàgina 99.)

[92] M. Komornikova i R. Mesiar. Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classification. *Fuzzy Sets and Systems*, 175:48–56, 2011. (Citat a la pàgina 166.)

[93] B. Li. Fuzzy Bags and Applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 34:61–71, 1990. (Citat a la pàgina 145.)

[94] J.L. Marichal i R. Mesiar. Meaningful aggregation functions mapping ordinal scales into an ordinal scale: a state of the art. *Aequationes Mathematicae*, 77:207–236, 2009. (Citat a la pàgina 125.)

[95] N. Marti-Oliet. From Petri nets to linear logic through categories: A survey. *Journal on Foundations of Computer Science*, 2(4):297–399, 1991. (Citat a la pàgina 167.)

[96] J. Martin, G. Mayor i J. Torrens. On locally internal monotonic operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 137:27–42, 2003. (Citat a la pàgina 3.)

[97] M. Mas, G. Mayor i J. Torrens. t-operators and uninorms on a finite totally ordered set. *International Journal of Intelligent Systems*, 14:909–922, 1999. (Citat a les pàgines 3, 4, 9, 14, 15 i 86.)

[98] M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. On left and right uninorms on a finite chain. *Fuzzy Sets and Systems*, 146:3–17, 2004. (Citat a les pàgines 3 i 14.)

[99] M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. S-implications and R-implications on a finite chain. *Kybernetica*, 40:3–20, 2004. (Citat a les pàgines 3, 4, 18 i 101.)

[100] M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. On two types of discretes implications. *International Journal of Approximate Resoning*, 40:262–279, 2005. (Citat a les pàgines 3, 4, 18, 19, 22, 101, 109 i 110.)

[101] M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. A survey on Fuzzy Implications Functions. *it IEEE Transactions on fuzzy systems*, 15:1107–1121, 2007. (Citat a les pàgines 3, 4, 5, 18, 19, 101 i 109.)

[102] S. Massanet. *Contrubucions a l'estudi de les implicacions borroses. Noves construccions i aplicacions a l'anàlisi d'imatges*. Tesi Doctoral, Universitat de les Illes Balears, 2012. (Citat a la pàgina 4.)

[103] F. Mata, L. Martínez i J. C. Martínez. Penalizing manipulation strategies in Consensus processes. Dins *Proceedings ESTYLF08*, pàgines 485–491. 2008. (Citat a la pàgina 141.)

[104] G. Mayor, A. Soto, J. Suñer i E. Trillas. Multi-dimensional Aggregation of Fuzzy Numbers Through the Extension Principle. Dins Y. Lin i L. Zadeh, editors, *Data Mining, Rought sets and Granular Computing*, pàgines 350–363. Physica-Verlag, 2002. (Citat a les pàgines 2, 29, 96 i 97.)

[105] G. Mayor i J. Torrens, capítol Triangular norms in discrete settings, pàgines 189–230. Elsevier, *Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, 2005. (Citat a les pàgines 3, 9, 10 i 71.)

[106] J. Mendel i R. Bob John. Type 2 Fuzzy Sets: Made Simple. *IEEE transactions of Fuzzy Systems*, 10(2):117–127, 2002. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[107] G. Metcalfe i D. Gabbay. Fuzzy Logics Based on [0,1)-Continuous Uninorms. *Archive for Mathematical Logic*, 46(6):425–469, 2007. (Citat a les pàgines 2 i 167.)

[108] G. Metcalfe i F. Montagna. Substructural Fuzzy Logics. *Journal of Symbolic Logic*, 72(3):834–864, 2007. (Citat a les pàgines 2 i 167.)

[109] S. Miyamoto. Fuzzy Multisets and Their Generalizations. Dins *Multisets Processing*, volum 2235 de *Lecture Notes In Computer Science*, pàgines 225–235. Springer-Verlag, 2001. (Citat a les pàgines 5 i 145.)

[110] S. Miyamoto. Information clustering based on fuzzy multisets. *Information Processing and Management*, 39:195–213, 2003. (Citat a la pàgina 5.)

[111] S. Miyamoto. Data structure and operations for fuzzy multisets. *Lecture in Computer Science:Transactions on Rough Sets*, 3135:189–200, 2004. (Citat a les pàgines 5, 145 i 146.)

[112] S. Miyamoto. Generalizations of Multisets and Rough Approximations. *International Journal of Intelligent Sytems*, 19:639–652, 2004. (Citat a les pàgines 5, 145 i 146.)

[113] S. Miyamoto. Remarks on basics of fuzzy sets and fuzzy multisets. *Fuzzy Sets and Systems*, 156:427 – 431, 2005. (Citat a la pàgina 5.)

[114] M. Mizumoto i K. Tanaka. Some properties of fuzzy sets of type 2. *Information Control*, 31:312–340, 1976. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[115] K. Mizutani, R. Inokuchi i S. Miyamoto. Algorithms of Nonlinear Document Clustering Based on Fuzzy Multiset Model. *International Journal of Intelligent Systems*, 23:176–197, 2008. (Citat a la pàgina 5.)

[116] R.E. Moore. *Interval Analysis*. Englewood Cliff, New Jersey: Prentice-Hall, 1966. (Citat a les pàgines 2 i 24.)

[117] H.T. Nguyen i E.A. Walker. *A first course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, 2006. (Citat a la pàgina 2.)

[118] H. Ono. *Substructural logics and residuated lattices - an introducction*, volum 21 de *Treds in Logic*. Kluver Academic Publishers, 2003. (Citat a les pàgines 27 i 167.)

[119] J. V. Riera i J. Torrens. A construction method of aggregation functions on the set of discrete fuzzy numbers. Dins *Advances in intelligent and soft computing*, volum 107. Springer, 2011. (Citat a la pàgina ix.)

[120] J. V. Riera i J. Torrens. Fuzzy implications defined on the set of discrete fuzzy numbers. Dins *Proceedings of the Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2011)*. 2011. (Citat a la pàgina x.)

[121] J. V. Riera i J. Torrens. Uninorms and nullnorms on the set of discrete fuzzy numbers. Dins *Proceedings of the Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2011)*. 2011. (Citat a la pàgina x.)

[122] J. V. Riera i J. Torrens. Aggregation of subjective evaluations based on discrete fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 191:21–40, 2012. (Citat a la pàgina ix.)

[123] D. Rocacher. On fuzzy bags and their application to flexible quering. *Fuzzy Sets and Systems*, 140:93–110, 2003. (Citat a les pàgines 5, 8, 54, 145, 146 i 151.)

[124] D. Rocacher. The set of fuzzy rational numbers and flexible querying. *Fuzzy Sets and Systems*, 155:317–339, 2005. (Citat a les pàgines 8, 54 i 146.)

[125] D. Rocacher i P. Bosc. The Set of Fuzzy Relative Integers and Fuzzy Bags. *International Journal of Intelligent Systems*, 24:677–696, 2009. (Citat a la pàgina 5.)

[126] R. Rodríguez, L. Martínez i F. Herrera. Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets. Report tècnic, Universidad de Jaen, 2011. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[127] D. Ruiz-Aguilera. *Contrubució a l'estudi de les uninormes en el marc de les equacions funcionals. Aplicacions a la morfologia matemàtica*. Tesi Doctoral, Universitat de les Illes Balears, 2007. (Citat a la pàgina 4.)

[128] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Distributive idempotent uninorms. *Internat. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 11:413–428, 2003. (Citat a la pàgina 15.)

[129] D. Ruiz-Aguilera i J. Torrens. Residual implications and co-implications from idempotent uninorms. *Kybernetika*, 40(1):21–38, 2004. (Citat a la pàgina 166.)

[130] S. Saminger-Platz, E. P. Klement i R. Mesiar. On extensions of triangular norms on bounded lattices. *Indag. Mathem.*, 19:1, 2008. (Citat a la pàgina 166.)

[131] Y. Shang, X. Yuan i E.S. Lee. The n-dimensional fuzzy sets and Zadeh fuzzy sets based on the finite valued fuzzy sets. *Computers & Mathematics with Applications*, 60:442–463, 2010. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[132] A. Syropulos. Mathematics of Multisets. Dins *Multiset Processing*, volum 2235, pàgines 154–160. Springer-Verlag, 2001. (Citat a la pàgina 147.)

[133] V. Torra. Hesitant Fuzzy Sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25:529–539, 2009. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[134] V. Torra i Y. Narukawa. *Modeling Decisions: Information Fusion and Aggregation Operators*. Springer, 2007. (Citat a les pàgines 3, 4 i 125.)

[135] E. Trillas. Sobre funciones de negación en la teoría de subconjuntos borrosos. *Sthocastica*, III:47–59, 1979. (Citat a la pàgina 71.)

[136] E. Trillas, C. Alsina i J.M. Terricabras. *Introducción a la lógica borrosa*. Ariel Matemática, 1995. (Citat a les pàgines 1 i 27.)

[137] E. Trillas, M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. On the representation of fuzzy rules. *Int. J. Approx. Reasoning*, 48(2):583–597, 2008. (Citat a la pàgina 5.)

[138] E. Trillas i L. Valverde. *On implication and indistinguishability in the setting of fuzzy logic*. TÜV-Rhineland, 1985. (Citat a les pàgines 4 i 101.)

[139] A.S. Troelstra. Lectures in Linear Logic. Dins *Lecture Notes in Computer Science*, volum 29. Springer-Verlag, 1991. (Citat a la pàgina 167.)

[140] A. Tzouvaras. The linear logic of multisets. *Logic Journal of the IGPL*, 6:901–916, 1998. (Citat a la pàgina 167.)

[141] A. Tzouvaras. The logic of multisets continued: The case of disjunction. *Studia Logica*, 75:287–304, 2003. (Citat a la pàgina 167.)

[142] A. Ursini. *Semantical Investigations of Linear Logic*, volum 291. Università di Siena, 1995. (Citat a la pàgina 167.)

[143] A. Ursini. *Girales: the Algebra of Linear Logic*, volum 473. Università di Siena, 2005. (Citat a la pàgina 167.)

[144] W. Voxman. Canonical representations of discrete fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 54:457–466, 2001. (Citat a les pàgines 2 i 28.)

[145] G. Wang, C. Wu i Zhao C. Representation and Operations of discrete fuzzy numbers. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 28:1003–1010, 2005. (Citat a les pàgines 3, 28 i 43.)

[146] G. Wang, Q. Zhang i X. Cui. The Discrete Fuzzy Numbers on a Fixed Set With Finite Support Set. Dins *2008 IIIE Conference on Cybernetics and Intelligence Systems,*. 2008. (Citat a la pàgina 165.)

[147] H. Wang i S. Chen. Appraising the performance of high school teachers based on fuzzy number arithmetic operations. *Soft Computing*, 12:919–934, 2008. (Citat a les pàgines 2, 125, 131, 133 i 137.)

[148] H. Wang i S. Chen. Evaluating Students' Answerscripts Using Fuzzy Numbers Associated With Degrees of Confidence. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16:403–415, 2008. (Citat a les pàgines 2, 125, 131, 133, 135, 137 i 138.)

[149] P.P. Wang, D. Ruan i E.E. Kerre. Fuzzy logic: a spectrum of theoretical & practical issues. Dins *Studies in fuzziness and soft computing*. Springer, 2007. (Citat a la pàgina 2.)

[150] X. Wang i E. Kerre. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities. *Fuzzy Sets and Systems*, 118(3):387–405, 2001. (Citat a la pàgina 2.)

[151] X. Wang i E. Kerre. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). *Fuzzy Sets and Systems*, 118(3):375–385, 2001. (Citat a la pàgina 2.)

[152] M. Wygralak. Questions of cardinality of finite fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 102:185–210, 1999. (Citat a la pàgina 146.)

[153] M. Wygralak. An axiomatic approach to scalar cardinalities of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 110:175–179, 2000. (Citat a les pàgines 54 i 146.)

[154] M. Xia i Z. Xu. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 52:395–407, 2011. (Citat a les pàgines 5 i 166.)

[155] R. Yager. On the theory of bags. *International Journal of General Systems*, 13:23–37, 1986. (Citat a les pàgines 5 i 145.)

[156] R. Yager. Using Importances in Group Preference Aggregation to Block Strategic Manipulation. Dins *Studies in Fuzziness and Soft Computing, Aggregation operators*, pàgines 177–191. Physica-Verlag, 2002. (Citat a les pàgines 125, 126 i 141.)

[157] R. Yager. Weighted triangular norm and conorm using generating functions. *International Journal of Intelligent Systems*, 19:217–231, 2004. (Citat a les pàgines 125, 126 i 141.)

[158] R. Yager. Aggregation of ordinal information. *Fuzzy Optim. Decis. Making*, 6:199–219, 2007. (Citat a les pàgines 125 i 126.)

[159] L. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computer Mathematics Applications*, 9:149–184, 1983. (Citat a les pàgines 5 i 146.)

[160] L. Zadeh. Nacimiento y evolución de la lógica borrosa, el Softcomputing y la computación con palabras. Un punto de vista personal. *Psicothema*, 8:421–429, 1996. (Citat a la pàgina 1.)

[161] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965. (Citat a les pàgines 1 i 130.)

[162] D. Zhang. Triangular norms on partially ordered sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 153:195–209, 2005. (Citat a les pàgines 5 i 27.)