GENERACIÓ ADDITIVA DE FUNCIONS D'AGREGACIÓ CONJUNTIVES I DISJUNTIVES DISCRETES

Tesi Doctoral

AUTOR: Jaume Monreal Garcies

DIRECTOR: Gaspar Mayor Forteza

Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
Juny 2012

Jaume Monreal Garcies: *GENERACIÓ ADDITIVA DE FUNCIONS D'AGREGACIÓ CONJUNTIVES I DISJUNTIVES DISCRETES,* Tesi Doctoral
Programa de doctorat de MATEMÀTIQUES

Palma, Juny 2012

D. Gaspar Mayor Forteza, Doctor en Ciències Matemàtiques per la Universitat de les Illes Balears i Catedràtic d'Universitat de l'àrea de Ciències de la Computació i Intel·ligència Artificial del Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica de la Universitat de les Illes Balears,

FA CONSTAR:

que la present memòria "GENERACIÓ ADDITIVA DE FUNCIONS D'AGREGACIÓ CONJUNTIVES I DISJUNTIVES DISCRETES" presentada per Jaume Monreal Garcies per optar al grau de Doctor en Matemàtiques, ha estat realitzada sota la seva direcció i reuneix la suficient matèria original per ser considerada com a tesi doctoral.

Palma, a 15 de juny de 2012

El director, L'interessat,

Gaspar Mayor Forteza Jaume Monreal Garcies

A la meva parella Mayra
Al meu fill Albert

ABSTRACT

This work defines the concept of additive generator of discrete t–norms and discrete t–conorms on $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ by using one-place functions $f : L \to [0, +\infty)$, their pseudoinverses, which is also defined, and addition. General results on additive generation of disjunctions (t–conorms are the associative disjunctions), characterizations of basic t–conorms generators, as well as the relationship between the additive generator of a disjunction and its dual conjunction, are also established. Multiplicative generation is also taken into account.

An algorithm based on Gamma algorithm of convexity theory is set out to decide when a disjunction can be additively generated. This paper also contains examples of t–conorms, disjunctions and commutative copulas –all of them discrete–; some of them can be additively generated, but others cannot.

The relationship between additive generation with ordinal sum is studied, as well as with nesting procedure, a more general method to construct disjunctions than the first one. The S_k family of t–conorms with a similar structure of Łukasiewicz t–conorms is shown, both are obtained when considering generators with range closed by addition. The concepts of concave and convex generator, respectively determining Archimedean and smooth disjunctions are also introduced. Associative convex generators are characterized. Additive generation of smooth and bi-valued disjunctions and t–conorms on L^* are also studied, a characterization of the associative ones is obtained and an algorithm to build an additive generator is determined (all of them can be additively generated). A bi-valued family of t–conorms on L^* that can be additively generated are also presented.

This study also insists on the applicability of additive generation when referring to the condition of T–transitivity for finite-valued indistinguishability relations. Finally, relationships between additive generation of a t–conorm S and the properties of its corresponding S–implication are also studied. According to order and generalizated modus-ponens properties, mixt additive generators are defined. Several of these associative examples are presented at the end of this paper, built from standard additive generators of Maximum and Drastic t–conorms, and some Łukasiewicz t–conorms generators.

RESUM

En aquest treball es defineix el concepte de generador additiu de t–normes i de t–conormes discretes sobre $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ usant funcions d'una sola variable $f : L \to [0, +\infty)$, la seva pseudoinversa, que també es defineix, i l'operació suma. S'hi estableixen resultats generals sobre la generació additiva de disjuncions (les t–conormes són les disjuncions associatives), les caracteritzacions dels generadors de les t–conormes bàsiques, així com la relació entre el generador additiu d'una disjunció i la seva conjunció dual. També es considera la generació multiplicativa.

Es planteja un algorisme per a decidir quan una disjunció és additivament generable, basat en l'algorisme Gamma de la teoria de convexitat. Al llarg del treball es mostren exemples de t–conormes, disjuncions i còpules commutatives, totes elles discretes, algunes additivament generables i d'altres que no.

S'estudia la relació que hi ha entre la generació additiva amb la suma ordinal i amb l'anidament, un mètode de construcció de disjuncions més general que la suma ordinal. Es mostra la família S_k de t–conormes amb estructura semblant a la de la t–conorma Łukasiewicz, que s'obtenen en considerar generadors amb rang tancat per la suma. S'introdueixen els conceptes de generador concau i generador convex que determinen, respectivament, disjuncions arquimedianes i disjuncions suaus. Els generadors convexos associatius són caracteritzats. S'estudia la generació additiva de les disjuncions i les t–conormes suaus i bivalents sobre L^*; s'obté una caracterització d'aquelles que són associatives i es determina un algorisme per construir-ne un generador additiu (totes són additivament generables). També es presenta una família de t–conormes bivalents sobre L^* que són additivament generables.

S'insisteix amb l'aplicabilitat de la generació additiva quan es tracta de manejar la condició de T–transitivitat per a relacions d'indistingibilitat amb valors en un conjunt finit. Finalment, s'estudia la relació que hi ha entre la generació additiva d'una t–conorma S i les propietats de l'S–implicació corresponent. Amb motiu de les propietats d'ordre i *modus ponens* generalitzat, es defineixen els generadors mixtos. Diversos exemples associatius d'aquests es presenten al final del treball, construïts a partir dels generadors estàndars de les t–conormes màxim i dràstica, i d'alguns generadors de la t–conorma de Łukasiewicz.

RESUMEN

En el presente trabajo se define el concepto de generador aditivo de t–normas y t–conormas discretas sobre $L = \{0, 1, \dots, n\}$ mediante el uso de funciones de una sola variable $f : L \to [0, +\infty)$, su pseudoinversa, que también se define, y la operación suma. Se establecen resultados generales sobre la generación aditiva de disjunciones (las t–conormas son las disjunciones asociativas), las caracterizaciones de los generadores de las t–conormas básicas, así como la relación entre el generador aditivo de una disjunción y su conjunción dual. También se considera la generación multiplicativa.

Se plantea un algoritmo para decidir cuando una disjunción es aditivamente generable, basado en el algoritmo Gamma de la teoría de convexidad. A lo largo del trabajo se muestran ejemplos de t–conormas, disjunciones y cópulas conmutativas, totas ellas discretas, algunas aditivamente generables y otras no.

Se estudia la relación que hay entre la generación aditiva con la suma ordinal y con el anidamiento, un método de construcción de disjunciones más general que la suma ordinal. Se muestra la familia S_k de t–conormas con estructura semejante a la de la t–conorma de Łukasiewicz, que se obtienen al considerar generadores con rango cerrado por la suma. Se introducen los conceptos de generador cóncavo y generador convexo que determinan, respectivamente, disjunciones arquimedianas y suaves. Los generadores convexos asociativos son caracterizados. Se estudia la generación aditiva de las disjunciones y de las t–conormas suaves y bivaluadas sobre L^*, obteniéndose una caracterización de aquellas que son asociativas y determinándose un algoritmo que permite construir un generador aditivo (todas son aditivamente generables). También se presenta una familia de t–conormas bivaluadas sobre L^* que son aditivamente generables.

Se insiste en la aplicabilidad de la generación aditiva cuando se trata de manejar la condición de T–transitividad para relaciones de indistinguibilidad finito–valuadas. Finalmente, se estudia la relación que hay entre la generación aditiva de una t–conorma S y las propiedades de la S–implicación correspondiente. Con motivo de las propiedades de

orden y *modus ponens* generalizado, se definen los generadores mixtos. Diversos ejemplos asociativos de éstas se presentan al final del trabajo, construidos a partir de los generadores estándares de las t–conormas máximo y drástica, y a partir de algunos generadores de la t–conorma de Łukasiewicz.

PUBLICACIONS

Alguns continguts d'aquesta memòria han estat publicats en diverses revistes o presentats en alguns congressos, nacionals o internacionals.

Els articles publicats en revistes de difusió internacional són:

1. *Additive generators of discrete conjunctive aggregation operations*, publicat a "IEEE Transactions on Fuzzy Systems". [21]
2. *The greatest common divisor and other triangular norms on the extended set of natural numbers*, publicat a "Int. J. Uncertainty, Fuzziness, Knowledge-Based Systems". [22]
3. *The problem of the additive generation of finitely-valued t-conorms*, publicat a "Mathware and Soft Computing". [16]

Les comunicacions a congressos presentades i publicades a les corresponents actes de cada congrés són:

1. *Generadores aditivos de normas triangulares discretas*, ESTYLF-2004.
2. *Additive generators of discrete conjunctive aggregation operations*, EUSFLAT-2005.
3. *The greatest common divisor and other triangular norms on the set of natural numbers*, IPMU-2006.
4. *Normas triangulares sobre dominios de factorización única*, ESTYLF-2006.
5. *Additive generation of some classes of finitely-valued t-conorms*, IPMU-2008.
6. *The problem of the additive generation of finitely-valued t–conorms*, ESTYLF-2008.
7. *Construction of t-conorms through a nesting method*, AGOP-2009.
8. *Nestings of t–conorms*, WILF-2009.

Destacar també que, durant la realització d'aquest treball, he gaudit de l'ajud dels següents projectes:

- PRIB-2004-9250 i PCTIB2005GC1-07 del Govern de les Illes Balears,
- REDEMAP II TIN 2004-21700-E, MTM2006-08322, MTM2009-10962 del Ministerio de Educación y Ciencia y del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

AGRAÏMENTS

Amb aquestes paraules voldria donar-vos les gràcies a tots els que m'heu ajudat a arribar fins aquí. Ha calgut invertir-hi un bon grapat d'hores i fer algun sacrifici, i som conscient que aquest esforç que s'ha fet no l'he fet jo sol, sinó que vosaltres hi heu participat, d'una o altra manera.

Al meu director, en Gaspar Mayor, principal artífex d'aquest treball, et vull dedicar les meves primeres paraules d'agraïment. Aquests han estat uns anys de treball discontinu, en els que la meva situació personal ha canviat de forma important i gairebé constant, i tu no has abaixat els braços ni has deixat d'encoratjar-me a continuar. La teva experiència i la contínua dedicació que tens per la feina han obert en tot moment nous horitzons quan ens trobàvem en un pou sense sortida. Per haver volgut acompanyar-me en aquest procés, gràcies.

A tots els membres del grup LOBFI, amb qui hem compartit seminaris, congressos, algun dinar. Gràcies pels vostres ànims continus i per l'ajuda que m'heu donat quan us la he demanat. Gràcies en Javier Martín, per les teves col·laboracions puntuals en forma d'article, proposició o coratge. Gràcies també en Joan Torrens, Jaume Sunyer i Jaume Casasnovas –en pau descans–, revisors de la memòria d'investigació, per les idees i consells que vau donar-me. Gràcies, Dani, pel teu suport tècnic.

A tots els professors, universitaris o no, matemàtics o no, que m'heu inculcat valors i maneres de fer als quals, més d'una vegada i des del silenci, he recorregut cercant forces per a continuar.

De forma especial vull agrair-vos, Francina Crespí, Maria del Mar Barceló i Maria del Mar Vanrell, la revisió lingüística que, de forma desinteressada, heu fet a part del treball. Gràcies per les vostres indicacions que m'han estat de gran ajuda. Gràcies també a tots els que heu ajudat en aquesta tasca de forma puntual.

I per acabar, gràcies, pares, per haver-me oferit la possibilitat d'arribar on sóc; gràcies, Mayra, per la teva ajuda, la teva comprensió i els teus ànims; gràcies, Albert, perquè he sacrificat part del teu temps sense rebre res a canvi. Gràcies a la resta de família, mallorquina i lleidatana, i a tots els amics, pel vostre suport.

I have declared a spiritual war upon all coercion
that restricts man's free creative activity.

Jan Łukasiewicz, 1918.

ÍNDEX

ÍNDEX DE FIGURES

ÍNDEX DE TAULES

1

INTRODUCCIÓ

La lògica borrosa és una eina per a la representació i gestió de la vaguetat. La intersecció i unió de conjuntos borrosos es defineixen via funcional mitjançant les normes i les conormes triangulars (per abreujar, t–normes i t–conormes) respectivament. A partir d'aquestes operacions s'interpreten les connectives conjunció i disjunció que formen part de l'estructura de la lògica borrosa. Referències fonamentals en són [42, 3]. Els treballs de J. Łukasiewicz van fer possible la consideració de sistemes lògics no clàssics, és a dir, sistemes en els que una proposició donada pot assumir més de dos valors de veritat. El punt de partida d'aquests sistemes va ser la lògica proposicional trivalent [15], que més tard va ser generalitzada mitjançant els sistemes lògics multivalents, que inclouen els que tenen un conjunt infinit de valors lògics. El sistemes borrosos contemplen un continuu de valors lògics representat per l'interval real unitat $[0, 1]$.

Les t–normes van ser introduïdes per primera vegada per K. Menger en el context dels espais mètrics probabilístics [27]. Més envant, dins el mateix context, la definició de t–norma es completa i queda tal com es coneix avui en dia ([33, 35]). Actualment també juguen un paper important en diverses àrees, com són la teoria de la presa de decisions, estadística, teoria de mesures no additives i integrals [12], etc. Des d'un punt de vista algebraic, una t–norma T és una operació binària sobre l'interval real $[0, 1]$ de forma que $([0, 1], T, \leqslant)$ és un semigrup topològic commutatiu amb element neutre 1. De forma similar, una t–conorma S fa que $([0, 1], S, \leqslant)$ tengui també estructura de semigrup topològic commutatiu amb neutre 0. Un tractament molt general sobre t–normes definides sobre conjunts parcialment ordenats pot trobarse a [4].

D'altra banda, en la major part de les situacions pràctiques es necessita discretitzar l'interval $[0, 1]$ per tal de limitar els possibles valors de veritat a una escala finita. Per això és important introduir i estudiar les t–normes i t–conormes definides, no sobre $[0, 1]$, sinó sobre una cadena finita, diguem-li $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ (o, a vegades,$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$) , mantenint els mateixos axiomes que defineixen aquestes funcions en el cas continu. Es pot trobar informació completa sobre t–normes i t–conormes definides sobre $[0, 1]$ en [12]. En aquesta monografia, es dedica també part d'un capítol a les t–normes discretes. La introducció i l'estudi sistemàtic de t–normes en dominis discrets es deu a G. Mayor i J. Torrens, autors de diversos treballs en aquest camp [24, 25, 26].

Tal com es veurà en els preliminars i s'anirà remarcant en altres moments, fer un estudi en el cas discret sobre t–normes o fer-lo sobre t–conormes són feines paral·leles, ja que per cada t–norma hi ha la t–conorma (única) dual. En aquest treball, nosaltres ens centrarem en les t–conormes (discretes) per mor de la simplicitat envers les t–normes en les expressions que s'obtenen i la notació a utilitzar en l'estudi realitzat en el Capítol 2.

En ocasions es qüestiona la necessitat d'introduir funcions d'agregació discretes sota l'argument que l'interval $[0, 1]$ inclou els valors $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$ i que ja es disposa d'un catàleg de procediments d'agregació sobre $[0, 1]$ que poden ser aplicats als valors discrets que s'utilitzin en cada situació. Evidentment, si es disposàs d'una teoria d'estabilitat satisfactòria relativa a t–normes i t–conormes, pot ser això faria canviar la nostra perspectiva. S'ha de dir, per altra part, que l'estudi d'una determinada propietat d'una funció d'agregació pot presentar comportaments ben diferents segons que es tracti en $[0,1]$ o en un domini discret de valors. Com veurem, la propietat de ser additivament generable és un exemple clar del que estam dient. L'exemple que ve a continuació mostra que, quan s'utilitza un nombre finit de valors de veritat, usar t–normes definides sobre $[0,1]$ en comptes d'utilitzar t–normes discretes pot donar lloc a la pèrdua de l'associativitat de l'operació resultant. Suposem que es tenen dos conjunts, A i B, prenent com a conjunt de valors la cadena, amb els valors ordenats de menor a major, $L = \{$*gens, molt poc, poc, moderadament, bastant, molt, totalment*$\}$, i sigui $u \in U$ tal que $A(u) =$ '*poc*' i $B(u) =$ '*moderadament*', els valors de pertinença de l'element u als conjunts considerats. Suposem que es vol determinar el grau de pertinença de l'element u al conjunt intersecció $A \cap B$, és a dir, $(A \cap B)(u)$. Utilitzant la relació $(A \cap B)(u) = T(A(u), B(u))$, es plantegen dues opcions:

1. Elegir una t–norma discreta T definida sobre $L_6 = \{0, 1, \ldots, 6\}$ (n'hi ha 451) i, mitjançant l'assignació natural (entre dues cadenes de 7 elements) $\varphi : L \to L_6$ tal que $\varphi(\textit{gens}) = 0$, $\varphi(\textit{molt poc}) = 1$, $\varphi(\textit{poc}) = 2$, $\varphi(\textit{moderadament}) = 3$, $\varphi(\textit{bastant}) = 4$, $\varphi(\textit{molt}) = 5$ i $\varphi(\textit{totalment}) = 6$, calcular el grau de pertinença de la manera següent:

$$(A \cap B)(u) = \varphi^{-1}\Big(T\big(\varphi(A(u)), \varphi(B(u))\big)\Big).$$

2. Elegir una t–norma T definida sobre $[0,1]$ i, mitjançant una assignació $\varphi : L \to [0,1]$ injectiva i creixent, calcular el grau de pertinença de la manera següent:

$$(A \cap B)(u) = \varphi^{(-1)}\Big(T\big(\varphi(A(u)), \varphi(B(u))\big)\Big),$$

   on $\varphi^{(-1)}$ s'hauria de definir també, doncs no necessàriament $T\big(\varphi(A(u)), \varphi(B(u))\big) \in \mathrm{Ran}\varphi$.

S'observa que la possiblitat 2 presenta d'entrada els problemes d'elegir l'assignació φ i definir $\varphi^{(-1)}$, és a dir, haver de decidir quin element de L és el més apropiat quan el resultat de $T\big(\varphi(A(u)), \varphi(B(u))\big)$ no es correspongui amb cap element de L a través de l'assignació φ. Doncs bé, vegem a continuació que utilitzant la t–norma producte sobre $[0,1]$, l'assignació $\varphi : L \to \{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6} = 1\}$ tal que $\varphi(\mathrm{gens}) = 0$, $\varphi(\textit{molt poc}) = \frac{1}{6}$, …, $\varphi(\textit{totalment}) = 1$, i considerant $\varphi^{(-1)} = \varphi^{-1} \circ \mathrm{Arrod}$ (la funció *Arrrod* que assigni a cada valor de $[0,1]$ el valor de $L' = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ més proper), l'operació binària $T'(i,j) = \varphi^{(-1)}\Big(T\big(\varphi(i), \varphi(j)\big)\Big)$ $\forall i, j \in L$, no és associativa:

T'	gens	molt poc	poc	moderad.	bastant	molt	totalment
gens	gens	gens	gens	gens	gens	gens	gens
molt poc	gens	gens	gens	molt poc	molt poc	molt poc	molt poc
poc	gens	gens	molt poc	molt poc	molt poc	poc	poc
moderad.	gens	molt poc	molt poc	poc	poc	moderad.	moderad.
bastant	gens	molt poc	molt poc	poc	moderad.	moderad.	bastant
molt	gens	molt poc	poc	moderad.	moderad.	bastant	molt
totalment	gens	molt poc	poc	moderad.	bastant	molt	totalment

Aquesta operació binària té la frontera d'una t–norma sobre L, és commutativa i creixent en cada variable, però no és associativa. En efecte, $T'(T'(\textit{molt poc}, \textit{moderadament}), \textit{bastant}) =$ *molt poc* mentre que $T'(\textit{molt poc}, T'(\textit{moderadament}, \textit{bastant})) = \textit{gens}$.

L'objecte d'aquest treball es basa en un problema antic (N.H. Abel, 1826) que consisteix a determinar si existeixen construccions que involucrin funcions d'una sola variable i l'operació suma (o el producte) de manera que en resultin funcions reals de dues variables amb propietats algebraiques interessants, en particular l'associativitat. Amb posterioritat, els treballs d'Aczél (1949), Schweizer & Sklar (1961 i 1963) i Ling (1965) han estat importants en el tractament d'aquest problema. Com es comprovarà en aquest document, hi ha diferències importants entre el cas continu $[0,1]$ i el cas discret $\{0,1,\ldots,n\}$, diferències que apareixen en adaptar la definició de generador additiu. Respecte del primer cas, hi ha una sèrie de definicions i resultats que es poden trobar en [12], entre els quals hi són els 1 – 5 que es detallen més avall. A continuació, i en contraposició als primers, s'indiquen les propietats anàlogues 1′ – 5′ del cas discret i que aniran apareixent durant el desenvolupament del treball.

1. Donada una t–conorma S sobre $[0,1]$, un generador additiu de S és una funció $f\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ estrictament creixent, contínua per l'esquerra en 1, $f(0) = 0$ i amb $\operatorname{Ran} f + \operatorname{Ran} f \subset \operatorname{Ran} f \cup [f(1), +\infty]$, de manera que $S(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$ $\forall x,y \in [0,1]$.

2. Una operació binària sobre $[0,1]$ és una t–conorma arquimediana contínua si, i només si, té un generador additiu continu.

3. Una t–conorma additivament generable és necessàriament arquimediana.

4. La t–conorma màxim, com que és contínua i no arquimediana (té elements idempotents no trivials), no té generador additiu.

5. Hi ha generadors additius no continus per a la t–conorma dràstica i per a altres t–conormes no contínues.

En aquest document, s'adapta el concepte de generador additiu del cas continu. En fer-ho ens trobem amb:

1′ Un generador additiu d'una t–conorma discreta S és una funció estrictament creixent $f\colon L = \{0,1,\ldots,n\} \to [0,+\infty)$ i $f(0) = 0$ de manera que $S(i,j) = f^{(-1)}(f(i) + f(j))$ $\forall i,j \in L$.

2′ Les t–conormes divisibles (arquimedianes i no arquimedianes) són additivament generables.

3′ No és necessari que una t–conorma sigui arquimediana per ésser additivament generable.

4′ La t–conorma màxim i d'altres t–conormes no arquimedianes tenen generador additiu.

5′ La t–conorma dràstica i altres t–conormes no divisibles tenen generador additiu.

En el cas continu, a partir d'una funció $f : [0,1] \to [0,+\infty]$, estrictament creixent, contínua per l'esquerra en 1, $f(0) = 0$ i amb $\operatorname{Ran} f + \operatorname{Ran} f \subset \operatorname{Ran} f \cup [f(1), +\infty]$, mitjançant la construcció $S(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$ $\forall x,y \in [0,1]$ sempre s'obté una t–conorma. En el cas discret, en canvi, aquesta condició és eliminada de la definició de generador additiu, per la qual cosa perdem en general l'associativitat de les funcions sobre L que s'obtenen. Això fa que s'hagi de parlar d'una disjunció (funció d'agregació disjuntiva) en sentit ampli, que són funcions binàries sobre $L = \{0,1,\ldots,n\}$ commutatives, creixents i amb 0 com a neutre, i no de t–conorma. No obstant això, si hom agafa un generador que satisfaci la condició Ran $f + \text{Ran } f \subset \text{Ran } f \cup [f(n), +\infty)$ llavors s'obté una t–conorma arquimediana (això s'estudia en el Capítol 4).

Una de les línies de treball d'aquesta memòria és, per diferents famílies de disjuncions discretes, caracteritzar aquelles que són additivament generables. Al cas particular de les t–conormes, s'hi dedica una atenció especial. Una de les diferències més destacables entre el cas continu i el cas discret és que en el primer, les t–conormes additivament generables han de ser arquimedianes, mentre que en el cas discret no es dóna aquest fet. D'una caracterització de les t–conormes additivament generables sobre $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ es podria veure quina relació hi ha entre aquestes dues propietats (tenir generador additiu i ésser arquimediana). En els casos estudiats fins ara no s'observa cap relació especial. Per posar un exemple, en el cas de les 13775 t–conormes sobre $L_8 = \{0, 1, \ldots, 8\}$ n'hi ha només tres que no tenen generador additiu; aquestes,t–conormes no són arquimedianes. D'altra banda, utilitzant els mètodes de suma ordinal o d'anidament de t–conormes, es poden construir t–conormes no arquimedianes sense generador additiu.

L'altra línia de treball és la de determinar funcions estrictament creixents $f\colon L \to [0, +\infty)$ amb $f(0) = 0$ que generin additivament operacions associatives (t–conormes). Aquest problema és equivalent al de determinar els subconjunts finits A de nombres naturals, $A = \{0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ de manera que l'operació $*\colon A \times A \to A$ definida per $a_i * a_j = \max\{a_k \in A : a_k \leqslant a_i + a_j\}$ (suma amb retrocés) sigui associativa. En relació a aquest problema, Viceník caracteritza en [41] els generadors de les t–conormes sobre $[0, 1]$ que són contínues sobre la frontera de $[0, 1]^2$ (en anglès, *border-continuous t–conorms*). En aquest treball, l'autor mostra les condicions en què una funció f estrictament creixent de $[0, 1]$ en $[0, +\infty]$ que satisfà $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ genera una t–conorma. Una d'aquestes condicions és que un determinat conjunt finit de nombres naturals A, extret del rang de f, amb l'operació $*$ considerada abans sigui una estructura associativa.

D'altra banda, en fer una analogia completa amb el teorema de representació de t–conormes contínues, les t–conormes discretes divisibles (suaus) estan caracteritzades com a sumes ordinals de t–conormes arquimedianes ([24]). A més, la generació additiva és una forma d'obtenir t–conormes, diferent del procés estàndard de la suma ordinal d'altres t–conormes, a partir de funcions d'una variable. Això s'aconsegueix fent ús de la pseudoinversa d'una funció monòtona estricta, de manera similar a com es fa en el cas continu ([35], [40]).

Aquest document consta de cinc capítols principals, a més de la introducció: els preliminars, dos capítols de desenvolupament de l'estudi, aplicacions de la generació additiva i les conclusions del treball. En els preliminars (Capítol 2), es mostraran les definicions i resultats ja coneguts, que són necessaris per al plantejament i desenvolupament dels altres capítols.

En el Capítol 3, es defineix el concepte de generació additiva de conjuncions i disjucions (no necessàriament associatives), es donen els primers resultats i es fa l'estudi per a determinar quan és que una funció d'agregació disjuntiva té generador additiu o no. Per fer això, s'extreuen els elements maximals i minimals de la taula de la funció, reduint el problema d'existència de generador al de la consistència d'un sistema d'inequacions lineals. Els resultats necessaris per a tractar amb sistemes de desigualtats lineals, dèbils i estrictes, els agafam de la teoria de la convexitat. Particularment, el punt clau en l'estudi de la consistència d'aquells sistemes és la generació del con dual d'un con donat. Dedicarem part d'aquest capítol a proveir algunes eines sobre aquesta teoria per a després, finalment, treballar en el desenvolupament del procediment per a determinar si una conjunció o disjunció donada té generador additiu i, en cas afirmatiu, donar-ne un. A continuació es demostra que totes les t–conormes sobre L_n amb $n \leqslant 7$ tenen generador additiu, mentre que en el cas $n = 8$, com ja s'ha dit, n'hi ha tres que no en tenen. Es mostren les 22 t–conormes sobre L_4 amb un generador additiu per cadascuna. Per acabar aquest capítol, recordant que les còpules commutatives són conjuncions, s'estudia la generació additiva d'aquest tipus de còpules i es mostren alguns exemples.

El Capítol 4 es dedica a mostrar resultats relatius a les dues línies de recerca que s'han establert. Es comença mostrant com obtenir un generador additiu d'una suma ordinal de dues t–conormes que siguin additivament generables, i seguidamentment es presenta un nou mètode de construcció de t–conormes, l'anidament (*nesting*) de dues t–conormes, i es mostren les condicions per tal que l'anidament sigui una funció associativa (i, per tant, una t–conorma), així com la forma d'obtenir un generador additiu d'aquest si les t–conormes inicials són additivament generables. Els primers resultats d'aquest tipus de construcció per a t–conormes discretes van ser publicats en [16]. A continuació, es presenta una família de t–conormes additivament generables del tipus Łukasiewicz, que són aquelles t–conormes el generador additiu de les quals és una progressió aritmètica. També s'introdueixen els generadors concaus i convexos, se n'estudia el tipus de disjuncions que se n'obtenen i es caracteritzen els generadors convexos associatius. Finalment, s'estudia la generació additiva de dos tipus de t–conormes bivalents sobre L^*, i es mostra un mètode per a obtenir un generador additiu d'aquestes.

En el Capítol 5 hi podem trobar dos camps d'aplicació de la generació additiva: els operadors d'indistingibilitat i les funcions d'implicació. D'una banda, la residuació i la biresiduació d'una t–norma T sobre L són, respectivament, un T–preordre i un T–operador d'indistingibilitat sobre L. Per aquests operadors hi ha un teorema de representació, semblant al del cas continu, que caracteritza els T–operadors d'indistingibilitat d'entre les L–relacions sobre un conjunt X. D'acord amb aquest teorema, aquests operadors admeten famílies generadores formades per T–operadors d'indistingibilitat definits a partir de L–subconjunts de X (aplicacions de X a L). En aquest treball es mostra que quan s'utilitzen t–normes additivament generables, la residuació i la biresiduació poden expressar-se en termes d'un generador additiu de la t–norma, a més de poder obtenir els generadors d'un T–operador d'indistingibilitat com les solucions d'un sistema d'inequacions plantejat a partir d'aquest generador. Aquests i altres resultats es poden consultar en [31].

D'altra banda, en [18, 19, 20] s'han estudiat les funcions d'implicació sobre dominis discrets. En [18] s'estudien algunes propietats de les S−implicacions quan la t–conorma S és suau; en el present treball es fa un estudi per a t–conormes additivament generables, entre les quals s'hi troben les suaus. És, per tant, un estudi més general que el dut a terme. Del fet que una disjunció discreta sigui additivament generable suposa poder representar-la com una llista creixent de nombres enters positius. Això permet determinar disjuncions (t–conormes, si es requereix associativitat) que satisfacin propietats prèviament establertes. Arrel de l'estudi de les propietats d'ordre i modus ponens generalitzat, es defineixen els generadors mixtos i se'n mostren exemples particulars (generadors mixtos que són meitat convexos i meitat concaus) que determinen t–conormes, construïts a partir dels generadors additius de les t–conormes bàsiques.

Per acabar, al final del document, hi ha un capítol on s'exposen les conclusions del nostre estudi i s'indiquen algunes línies de treball amb vista al futur. També es pot trobar el llistat de les referències d'aquells articles, llibres o capítols de llibre que han estat utilitzats per a l'elaboració d'aquest treball. I a mode d'annex, es podrà consultar el codi font d'alguns dels programes que hem implementat per a ajudar-nos en la recerca duta a terme.

2

PRELIMINARS

A continuació s'introdueixen, sobre dominis discrets, els conceptes i resultats bàsics que són rellevants en aquest treball. Els conceptes de funció d'agregació disjuntiva, t–conorma, funció d'agregació conjuntiva, t–norma, divisibilitat, negació forta i funció d'agregació dual, són importants en el nostre estudi, així com també ho és conèixer les principals propietats dels diferents tipus de funcions d'agregació. El procés de construcció de la funció d'agregació suma ordinal d'altres dues funcions i el teorema de caracterització de les t–conormes divisibles juguen un paper destacat a l'hora de determinar famílies de t–conormes additivament generables (vegi's capítol 4).

En aquest treball, tots els resultats i problemes estudiats es refereixen sempre a un conjunt finit totalment ordenat. No és rellevant la naturalesa dels elements que el formen, sinó el cardinal que aquest conjunt té. És per això que per simplicitat considerarem en tot el treball el conjunt de cardinal $n+1$, $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ amb $n \geqslant 1$ dotat amb l'ordre usual. Quan ens interessi remarcar expressament que el cardinal del conjunt és $n+1$ escriurem $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Es poden trobar tractats sobre funcions d'agregació definides en $[0, 1]$ en [7, 8], i sobre altres funcions d'agregació discretes, que no són objecte d'aquest treball, en [17].

2.1 DEFINICIONS, EXEMPLES I PROPIETATS BÀSIQUES.

En els models de la lògica clàssica, hi trobam l'operador disjuntiu. En la lògica multivalent, les disjuncions i les t–conormes són les funcions d'agregació que exerceixen aquest rol.

Definició 2.1.1 *Una funció* $D : L \times L \longrightarrow L$ *és una funció d'agregació disjuntiva, per abreujar disjunció, si és commutativa, creixent en cada variable i té element neutre* 0*:*

(D1) $D(i, j) = D(j, i)$

(D2) $i \leqslant i' \Longrightarrow D(i, j) \leqslant D(i', j)$

(D3) $D(i, 0) = i \;\; \forall i \in L$

per a tot $i, i', j \in L$.

Quan una disjunció, a més de satisfer (D1)-(D3), és associativa

(D4) $D(i, D(j, k)) = D(D(i, j), k) \;\; \forall i, j, k \in L$ *s'anomena una conorma triangular (per abreujar, t–conorma).*

Les t–conormes màxim, Łukasiewicz i dràstica tenen un paper destacat en aquest treball. Com veurem en aquesta secció, aquestes tres disjuncions associatives són especialment destacables per sí mateixes.

Exemple 2.1.2 *Les tres t–conormes bàsiques són:*

$$
\begin{array}{ll}
S_M(i,j) = \max\{i,j\} & \textit{t–conorma màxim.} \\
S_Ł(i,j) = \min\{i+j,n\} & \textit{t–conorma de Łukasiewicz.} \\
S_D(i,j) = \begin{cases} n & \textit{si } \min\{i,j\} > 0 \\ \max\{i,j\} & \textit{altrament} \end{cases} & \textit{t–conorma dràstica.}
\end{array}
$$

Proposició 2.1.3 *Sigui* D *una disjunció sobre* L*, aleshores:*

1. $D(i,n) = n$ *per a tot* $i \in L$*. Per tant, totes les disjuncions coincideixen sobre la frontera de* $L \times L$.
2. *Per a tot* $i,j \in L$ *tenim que* $S_M(i,j) \leqslant D(i,j) \leqslant S_D(i,j)$*. Així doncs,* S_M *i* S_D *són, respectivament, la menor i la major de les disjuncions sobre* L.
3. *L'única disjunció idempotent,* $D(i,i) = i$ *per a tot* $i \in L$*, és la t–conorma màxim* S_M.
4. *L'única disjunció que satisfà* $D(i,i) = n$ *per a tot* $i \in L\backslash\{0\}$ *és la t–conorma dràstica* S_D.

Observació 2.1.4 *D'acord amb 2. de la proposició anterior, el conjunt (finit) de les disjuncions sobre* L *té una estructura reticular, amb l'ordre puntual* $D \leqslant D'$ *si, i només si,* $D(i,j) \leqslant D'(i,j)$ $\forall i,j \in L$*, on la t–conorma màxim n'és l'element mínim i la t–conorma dràstica n'és l'element màxim. Això no és cert per a disjuncions associatives.*

L'operador conjuntiu de la lògica clàssica se substitueix en la lògica multivalent per les conjuncions i les t–normes, que són les funcions d'agregació que exerceixen aquest rol.

Definició 2.1.5 *Una funció* $C : L \times L \longrightarrow L$ *és una funció d'agregació conjuntiva, per abreujar conjunció, si és commutativa, creixent en cada variable i té element neutre* n*:*

$(C1)\quad C(i,j) = C(j,i)$

$(C2)\quad i \leqslant i' \Longrightarrow C(i,j) \leqslant C(i',j)$

$(C3)\quad C(i,n) = i \ \ \forall i \in L$

per a tot $i, i', j \in L$.

Quan una conjunció és, a més, associativa,

$(C4)\quad C(i, C(j,k)) = C(C(i,j),k) \ \ \forall i,j,k \in L$

s'anomena una norma triangular (per abreujar, t–norma).

Exemple 2.1.6 *Els exemples bàsics de t–normes discretes són:*

$$
\begin{array}{ll}
T_M(i,j) = \min\{i,j\} & \textit{t–norma mínim.} \\
T_Ł(i,j) = \max\{i+j-n,0\} & \textit{t–norma de Łukasiewicz.} \\
T_D(i,j) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \max\{i,j\} < n \\ \min\{i,j\} & \textit{altrament} \end{cases} & \textit{t–norma dràstica.}
\end{array}
$$

Aquestes tres t–normes destaquen dins el conjunt de les conjuncions. Les t–normes dràstica i mínim són, respectivament, els elements mínim i màxim de l'estructura reticular natural en què es podrien organitzar les conjuncions.

Proposició 2.1.7 *Sigui* C *una conjunció sobre* L*, aleshores:*

1. $C(i,0) = 0$ *per a tot* $i \in L$*. Per tant, totes les conjuncions valen el mateix sobre la frontera de* $L \times L$.

2. *Per a tot* $i, j \in L$ *tenim que* $T_D(i,j) \leqslant C(i,j) \leqslant T_M(i,j)$. *Així doncs, les t–normes* T_D *i* T_M *són la menor i la major de les conjuncions sobre* L, *respectivament.*

3. *L'única conjunció que satisfà* $C(i,i) = i$ *per a tot* $i \in L$ *és* T_M.

4. *L'única conjunció que satisfà* $C(i,i) = 0$ *per a tot* $i \in L \backslash \{n\}$ *és* T_D.

La connectiva lògica de la negació permet, en la lògica clàssica, relacionar la conjunció amb la disjunció a través de les Lleis de De Morgan. Les negacions fortes que ara es mostraran fan el paper d'aquesta connectiva en la lògica multivalent.

Definició 2.1.8 *Una aplicació* $N : L \to L$ *s'anomena una negació forta si és decreixent i involutiva:*

(N1) $i \leqslant j \Longrightarrow N(i) \geqslant N(j)$,

(N2) $N(N(i)) = i$,

per a tot $i, j \in L$.

En el cas continu $[0,1]$, aquesta definició ofereix moltes possibilitats [36]. Això no ocorre en el cas discret, tal com s'indica a continuació.

Proposició 2.1.9 *Hi ha una única negació forta sobre* L, *que és*

$$N(i) = n - i \quad \forall i \in L$$

Com que només hi ha una negació forta, cada disjunció sobre L tendrà una única conjunció dual, que es defineix de la manera següent.

Definició 2.1.10 *Sigui* D *una disjunció sobre* L *i sigui* $N(i) = n - i$ *l'única negació forta sobre* L. *Aleshores* $D^* : L \times L \to L$ *donada per*

$$D^*(i,j) = N(D(N(i), N(j)))$$

és una conjunció sobre L *anomenada la conjunció* N*-dual de* D.

Observació 2.1.11

1. *D'igual forma, si* C *és una conjunció sobre* L, *es defineix la disjunció, diguem-li* C^*, N*-dual de* C, *com*

   $$C^*(i,j) = N(C(N(i), N(j)))$$

   Òbviament, la disjunció N*-dual de la conjunció* N*-dual d'una disjunció* D *sobre* L *és la disjunció inicial:*

   $$(D^*)^* = D$$

   Igualment, $(C^*)^* = C$ *per a tota conjunció* C.

2. *Si* D *és una t–conorma, llavors la conjunció* N*-dual de* D, D^*, *és una t–norma, i viceversa. Així doncs, el procés de dualització conserva l'associativitat d'aquestes funcions d'agregació.*

Els resultats que es mostraran en aquest treball són aplicables de forma indistinta a les funcions d'agregació disjuntives i a les conjuntives. A partir d'ara, les definicions i resultats es donaran i mostraran només per a disjuncions (en alguns casos només t–conormes), sobreentenent que les mateixes propietats es tenen per a conjuncions (t–normes).

2.2 T-CONORMES ARQUIMEDIANES. SUMA ORDINAL DE DISJUNCIONS.

La definició que ve a continuació és només per a t–conormes, ja que l'associativitat és la propietat que fa possible la construcció següent.

Definició 2.2.1 *Sigui* S *una t–conorma sobre* L*. Es defineix la potència* m*-èsima d'un element* $i \in L$ *com*

$$i_S^{(m)} = \begin{cases} i & \text{si } m = 1 \\ S(i_S^{(m-1)}, i) & \text{si } m \geqslant 2 \end{cases}$$

Definició 2.2.2 *Una t–conorma* S *es diu que és arquimediana, si per a tot* $i, j \in L \backslash \{0, n\}$ *existeix un* $m \in \mathbb{N}$ *de manera que* $i_S^{(m)} > j$*.*

Les t–conormes arquimedianes es reconeixen fàcilment fent ús de la proposició següent.

Proposició 2.2.3 *Una t–conorma és arquimediana si, i només si, els seus únics elements idempotents són* 0 *i* n*.*

$$S(i, i) > i \ \forall i \in L \backslash \{0, n\}$$

En el cas continu $[0, 1]$, aquesta proposició no es dedueix directament de la definició; l'equivalència només es té per a les t–conormes contínues sobre $[0, 1]$.

Exemple 2.2.4 *Com que les t–conormes* S_D *i* $S_Ł$ *no tenen elements idempotents no trivials, són arquimedianes. Ben al contrari, la t–conorma Màxim,* S_M*, clarament no és arquimediana.*

L'arquimedianeïtat és una propietat que també es considera en les t–normes. Igual que les t–conormes, les t–normes arquimedianes es caracteritzen per no tenir elements idempotents no trivials. És més, la dualitat conserva aquesta propietat.

Proposició 2.2.5 *Siguin* T *i* S *una t–norma i una t–conorma, respectivament, una dual de l'altra. Aleshores*

$$T \text{ és arquimediana} \Leftrightarrow S \text{ és arquimediana}$$

Un mètode per a construir noves disjuncions a partir d'altres és el de la suma ordinal.

Definició 2.2.6 *Sigui* D_1 *una disjunció sobre* $L_m = \{0, 1, \ldots, m\}$ *i* D_2 *una disjunció sobre* $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$*, amb* $m, n \geqslant 1$*. La suma ordinal de* D_1 *i* D_2 *és l'operació binària sobre* $L_{m+n} = \{0, 1, \ldots, m, m+1, \ldots, m+n\}$ *definida per:*

$$D(i,j) = \begin{cases} D_1(i,j) & \text{si } (i,j) \in L_m^2 \\ m + D_2(i-m, j-m) & \text{si } (i,j) \in \{m, m+1, \ldots, m+n\}^2 \\ \max\{i,j\} & \text{altrament} \end{cases}$$

La suma ordinal preserva les propietats següents de les disjuncions inicials: la commutativitat, el creixement en cada variable i l'associativitat.

Proposició 2.2.7

1. *La suma ordinal de les disjuncions* D_1 *sobre* L_m *i* D_2 *sobre* L_n *és una disjunció sobre* L_{m+n}*.*
2. *Si* S_1 *i* S_2 *són dues t–conormes llavors la suma ordinal de* S_1 *i* S_2 *és una t–conorma sobre* L_{m+n}*.*

DEMOSTRACIÓ: 1. i 2. es dedueixen a partir de la Definició 2.2.6 i de les propietats de les disjuncions i t–conormes de partida. □

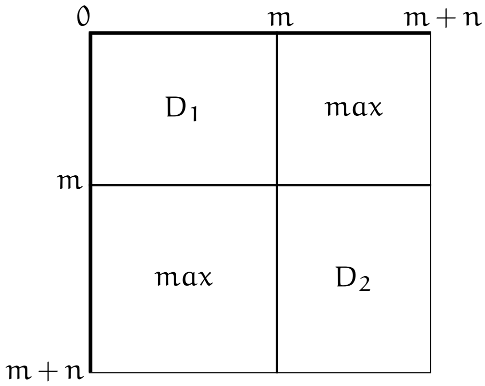


Figura 1. Suma ordinal de dues disjuncions

2.3 DIVISIBILITAT (SUAVITAT)

La divisibilitat és l'equivalent a la continuïtat en el cas $[0,1]$ per a les funcions d'agregació discretes.

Definició 2.3.1 *Sigui* D *una disjunció sobre* L. *Direm que* D *és divisible si* $\forall i, j \in L$ *de manera que* $i \leqslant j$ *existeix* $k \in L$ *amb* $j = D(i,k)$.

També són conegudes les condicions de suavitat ([11]) i de Lipschitz per a les disjuncions.

Definició 2.3.2 *Direm que una disjunció* $D : L \times L \to L$ *és suau si*

$$D(i+1,j) - D(i,j) \leqslant 1 \quad \forall i,j \in L,\ i < n$$

Definició 2.3.3 *Direm que una disjunció* D *satisfà la condició de Lipschitz (de constant 1) quan*

$$D(i_1,j) - D(i_2,j) \leqslant i_1 - i_2 \quad \textit{per a tot } i_1, i_2, j \in L \textit{ de manera que } i_1 \geqslant i_2$$

En el cas discret, la divisibilitat, la suavitat i la condició de Lipschitz són equivalents.

Proposició 2.3.4 *Sigui* D *una disjunció sobre L. Les afirmacions següents són equivalents:*

1. *D és divisible.*
2. *D és suau.*
3. *D satisfà la condició de Lipschitz.*

D'ara endavant ens referirem a les disjuncions que són divisibles (i, per tant, suaus i que satisfan la condició de Lipschitz) com a suaus, simplement.

Dels exemples anteriors, S_M i $S_Ł$ són suaus, mentre que S_D no ho és, llevat dels casos trivials $n = 1, 2$. D'altra banda, la t–conorma $S_Ł$ és l'única disjunció suau que verifica $D(i, n-i) = n$ $\forall i \in L$. Ho tractarem més en 4.3.

La caracterització de la classe de les t–normes i t–conormes suaus sobre L és un dels resultats fonamentals sobre funcions d'agregació discretes. Aquest resultat per a t–conormes estableix que cada t–conorma suau sobre L queda determinada a partir dels seus elements idempotents.

Proposició 2.3.5 *Una t–conorma* S *sobre* $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ *és suau si, i només si, existeix un nombre natural* r *amb* $0 \leqslant r \leqslant n-1$ *i un subconjunt* I *de* L, $I = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r < a_{r+1} = n\}$, *de manera que* S *ve donada per:*

$$S(x,y) = \begin{cases} \min\{x+y-a_i, a_{i+1}\} & si\ (x,y) \in [a_i, a_{i+1}]^2,\ \ 0 \leqslant i \leqslant r \\ \max\{x,y\} & altrament \end{cases}$$

En altres paraules, una t–conorma suau S amb $I = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1} = n\}$ com a conjunt d'elements idempotents és suma ordinal de t–conormes de Łukasiewicz S_i definides sobre $L_{a_i - a_{i-1}}$ $i = 1, 2, \ldots, r+1$. Com a conseqüència d'aquest fet, cada t–conorma suau S està únicament determinada pels seus elements idempotents i, per tant, hi ha tantes t–conormes suaus com subconjunts del conjunt L que contenen $\{0, 1\}$; és a dir, hi ha 2^{n-1} t–conormes suaus sobre L_n. D'aquestes, només una és arquimediana, $S_Ł$, que és la que ve determinada per $\{0, 1\} \subset L$. Les altres són no arquimedianes, ja que tenen elements idempotents no trivials.

A més, per dualitat tenim el corresponent resultat per a t–normes, on es mostra que cada t–norma suau ve únicament determinada pels seus elements idempotents no trivials.

Es pot trobar la prova de la Proposició 2.3.5 i més detalls sobre les t–normes i t-conormes, suaus i no suaus, definides sobre cadenes discretes en [26]. Un problema obert és la caracterització de les t–conormes sobre L que són 2–suaus ($S(i+1, j) - S(i, j) \leqslant 2\ \forall i < n$) [13]

Per acabar la secció de preliminars, en [6] es pot trobar la taula següent, que mostra el nombre de t–conormes discretes sobre L_n per a diversos valors de n, així com procediments per a generar-ne.

n	t–conormes	suaus	arquimedianes	sumes ord.	altres
1	1	1	1	0	0
2	2	2	1	1	0
3	6	4	2	3	1
4	22	8	6	11	5
5	94	16	22	45	27
6	451	32	95	205	151
7	2386	64	471	1021	894
8	13775	128	2670	5512	5593
9	86417	256	17387	32095	36935
10	590489	512	131753	201367	257369

Figura 2. La taula mostra el nombre de t–conormes que hi ha per a cada valor de n, distingint entre suaus, arquimedianes, sumes ordinals i les que no satisfan cap d'aquestes propietats.

En aquesta taula, "altres" significa "ni arquimedianes ni sumes ordinals". Observem que les t–conormes suaus apareixen comptabilitzades dues vegades: una com a "suaus" i l'altra, o com a "arquimedianes" o com a "sumes ordinals", ja que per la Proposició 2.3.5 sabem que una t–conorma suau o és la t–conorma de Łukasiewicz, que és arquimediana, o és suma ordinal de t–conormes de Łukasiewicz.

D'altra banda, no hi ha cap t–conorma que sigui arquimediana i suma ordinal a la vegada, ja que les primeres no tenen elements idempotents i les segones, sí. Així doncs, el nombre total de t–conormes és la suma de les "arquimedianes", les "sumes ordinals" i les "altres". A mode d'exemple, per al cas $n = 6$ hi ha 451 t–conormes sobre $L_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, de les quals 32 són suaus, 95 són arquimedianes, 205 són sumes ordinals i 151 no són ni arquimedianes ni sumes ordinals (i, per tant, tampoc no són suaus).

En els exemples següents sobre L_6, S_1 és suau, S_2 és arquimediana, S_3 és suma ordinal no suau i S_4 no és arquimediana ni suma ordinal.

S_1	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	5	6
4	4	4	4	5	5	5	6
5	5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6

S_1 és suau:
$S_1(i+1, j) - S_1(i, j) \leqslant 1, i < 6$
No és arquimediana: $S_1(2, 2) = 2$
És suma ordinal.

S_2	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	6	6	6
2	2	3	4	6	6	6	6
3	3	4	6	6	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

S_2 és arquimediana:
$S_2(i, i) > i \ \forall i \neq 0, 6$
No és suau.
No és suma ordinal.

S_3	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	3	3	3	4	5	6
2	2	3	3	3	4	5	6
3	3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	6	6	6
5	5	5	5	5	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

S_3 és suma ordinal no suau.
$(S_3(1, 1) - S_3(1, 0) = 2 > 1)$

S_4	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	3	6	6	6
2	2	3	3	3	6	6	6
3	3	3	3	3	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

S_4 no és arquimediana:
$S_4(3, 3) = 3$
No és suau.
$(S_4(1, 4) - S_4(1, 3) = 3 > 1)$
No és suma ordinal.

Figura 3. Aquestes quatre t–conormes sobre L_6 són exemples il·lustratius de les diferents propietats que poden presentar

3

GENERACIÓ ADDITIVA DE FUNCIONS D'AGREGACIÓ DISJUNTIVES DISCRETES

El problema de construir t–normes amb l'ajuda de funcions d'una variable utilitzant la suma ordinària té els seus inicis en els resultats d'Abel (1826) [1] i Aczél (1949) [2], en els quals s'aporten condicions perquè operacions binàries sobre intervals de nombres reals siguin additivament representables. En els treballs de Schweizer i Sklar (1961 i 1963) i Ling (1965) [33, 34, 14], es caracteritzen les t–normes que tenen generador additiu continu: *una t–norma té generador additiu continu si, i només si, és contínua i arquimediana*. A partir dels treballs de Mostert i Shields (1957) i de Schweizer i Sklar (1983) [29, 35] s'estableix l'important teorema de representació per a t–normes contínues: *una t–norma és contínua si, i només si, és representable de forma única com a suma ordinal de t–normes contínues i arquimedianes*.

També és sabut que existeixen generadors additius (no continus) per a la t–norma dràstica i per a altres t–normes no contínues, mentre que la t–norma mínim i, en general qualsevol t–norma que tengui elements idempotents no trivials, no és additivament generable. Treballs més recents sobre generació additiva de t–normes es poden consultar en [12, 40, 41, 28].

En el cas discret, la situació en alguns aspectes és diferent del cas $[0,1]$. En aquest capítol es definirà el concepte de generador additiu per a disjuncions i conjuncions discretes i es mostraran alguns resultats generals sobre la generació additiva. L'aportació més destacable és un algorisme que permet decidir si una disjunció és additivament generable o no. Aquest estudi es fa únicament per a disjuncions, ja que la utilització de generadors creixents resulta més còmoda. Tanmateix, els resultats obtinguts per a disjuncions es poden traslladar per dualitat a les conjuncions. Una part dels resultats que es mostraran a continuació van ser publicats en [21, 16].

3.1 CONCEPTE DE GENERADOR ADDITIU

En aquesta secció definirem el concepte de generador additiu, de forma similar a la generació additiva en el cas de t–normes i t–conormes ordinàries. Amb els generadors additius, establim un mètode general de construcció de funcions d'agregació conjuntives i disjuntives sobre L a partir d'una funció real en una variable i la suma usual. Per a aquesta construcció, però, cal tenir definit el concepte de pseudoinversa.

3.1.1 *Pseudoinversa d'una funció sobre* L

A continuació es defineix la pseudoinversa de determinades funcions monòtones de L a $[0,+\infty)$.

Definició 3.1.1 *Sigui* $f\colon L \to [0,+\infty)$ *una funció monòtona estricta amb* $f(0) = 0$ *o* $f(n) = 0$. *La* *pseudoinversa de* f *és la funció* $f^{(-1)}\colon [0,+\infty) \to L$ *definida per*

$$f^{(-1)}(t) = \begin{cases} \max\{i \in L\ ;\ f(i) \leqslant t\} & \textit{si } f(0) = 0 \\ \min\{i \in L\ ;\ f(i) \leqslant t\} & \textit{si } f(n) = 0 \end{cases}$$

o, el que és el mateix,

$$f^{(-1)}(t) = \begin{cases} \max f^{-1}([0,t]) & \textit{si } f(0) = 0 \\ \min f^{-1}([0,t]) & \textit{si } f(n) = 0. \end{cases}$$

Observem que pel fet de ser f monòtona estricta, $f(0) = 0$ vol dir que f és estrictament creixent, mentre que $f(n) = 0$ ens diu que f és estrictament decreixent.

Observació 3.1.2 *En el cas continu, la pseudoinversa d'una funció no constant* $f\colon [a,b] \to [c,d]$ *es defineix [12]* $\forall y \in [c,d]$ *com*

$$f^{(-1)}(y) = \begin{cases} \sup\{x \in [a,b]\ ;\ f(x) < y\} & \textit{si } f \textit{ és creixent} \\ \sup\{x \in [a,b]\ ;\ f(x) > y\} & \textit{si } f \textit{ és decreixent.} \end{cases}$$

Notem que per a les funcions que satisfan $f(0) = 0$ *(creixents) les dues definicions, cas continu i cas discret, són anàlogues, mentre que per a aquelles funcions en què* $f(n) = 0$ *(decreixents) s'ha optat per una definició alternativa que en el cas continu i per a funcions no constants i decreixents diria*

$$f^{(-1)}(y) = \inf\{x \in [a,b]\ ;\ f(x) < y\}.$$

La justificació d'això s'explica en l'Observació 3.1.16.

En l'exemple que ve a continuació es mostra la pseudoinversa per a una funció estrictament creixent.

Exemple 3.1.3 *Sigui* $f\colon \{0,1,2,3,4,5\} \to [0,+\infty)$ *la funció creixent sobre* L_5 *donada per* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$, $f(4) = 6$ *i* $f(5) = 10$.

En aquest cas és $f^{(-1)}(t) = \max\{i \in L\ ;\ f(i) \leqslant t\}$. *Així, si prenem* $t = 8.3$ *llavors* $f^{(-1)}(8.3) = 4$ *(ja que* $4 = \max\{i \in L :\ f(i) \leqslant 8.3\}$*). Es pot veure la representació gràfica de la funció i la seva pseudoinversa a la Figura 4 i a la Figura 5.*

La pseudoinversa és la funció inversa per l'esquerra de la funció f original. En canvi no ho és per la dreta.

Proposició 3.1.4 *Sigui* $f\colon L \to [0,+\infty)$ *una funció monòtona estricta amb* $f(0) = 0$ *o* $f(n) = 0$, *i sigui* $f^{(-1)}$ *la seva pseudoinversa. Aleshores:*

1. $f^{(-1)}(f(i)) = i$ *per a tot* $i \in L$.
2. $f(f^{(-1)}(t)) \leqslant t$ *per a tot* $t \in [0,+\infty)$.
3. $f(f^{(-1)}(t)) = t$ *si, i només si,* $t = f(i)$ *per algun* $i \in L$.

DEMOSTRACIÓ:
1. Trivial.
2. Es dedueix del fet que en la definició de la pseudoinversa s'exigeix $f(i) \leqslant t$ en tot moment.
3. Si $f(f^{(-1)}(t)) = t$ llavors $t = f(i)$ essent $i = f^{(-1)}(t) \in L$; recíprocament, si $t = f(i)$, aplicant $f^{(-1)}$ tenim que $f^{(-1)}(t) = i$ i, aplicant ara f, queda $f(f^{(-1)}(t)) = f(i) = t$. □

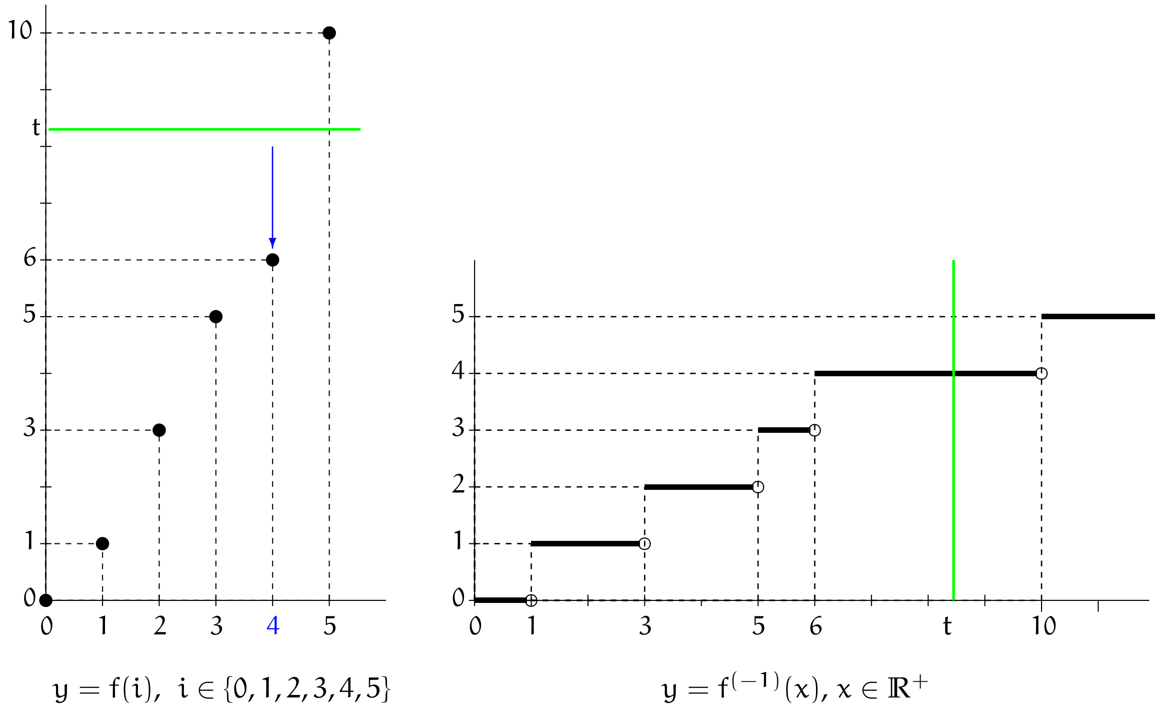


Figura 4. Representació gràfica de la funció estrictament creixent f i la seva pseudoinversa, també creixent, $f^{(-1)}$, essent $f = (0, 1, 3, 5, 6, 10)$

Proposició 3.1.5 *Sigui* $f\colon L \to [0, +\infty)$ *una funció monòtona estricta amb* $f(0) = 0$ *o* $f(n) = 0$, *i sigui* $f^{(-1)}$ *la seva pseudoinversa. Aleshores* f *i* $f^{(-1)}$ *són ambdues creixents o ambdues decreixents.*

Demostració: Siguin $t, t' \in \mathbb{R}$, $t \leqslant t'$, i siguin $A = \{i \in L : f(i) \leqslant t\}$ i $A' = \{i \in L : f(i) \leqslant t'\}$. Si f és creixent,

$$f^{(-1)}(t) = \max A \leqslant \max A' = f^{(-1)}(t').$$

En canvi, si f és decreixent,

$$f^{(-1)}(t) = \min A \geqslant \min A' = f^{(-1)}(t').$$

3.1.2 *Generador additiu de disjuncions i conjuncions*

Una funció $f\colon L \to [0, +\infty)$ d'algun dels tipus assenyalats i la corresponent pseudoinversa ens permeten obtenir disjuncions i conjuncions. La proposició que ve a continuació descriu com obtenir una operació binària generada per una d'aquestes funcions. Aquesta construcció serà utilitzada en tot el treball.

Proposició 3.1.6 *Sigui* $f\colon L \to [0, +\infty)$ *una funció monòtona estricta amb* $f(0) = 0$ *o* $f(n) = 0$, *i considerem la funció* $F_f\colon L \times L \to L$ *definida per*

$$F_f(i, j) = f^{(-1)}(f(i) + f(j)) \quad \forall i, j \in L.$$

Aleshores:

1. *Si* $f(0) = 0$ *(*f *creixent) llavors* F_f *és una disjunció sobre* L.
2. *Si* $f(n) = 0$ *(*f *decreixent) llavors* F_f *és una conjunció sobre* L.

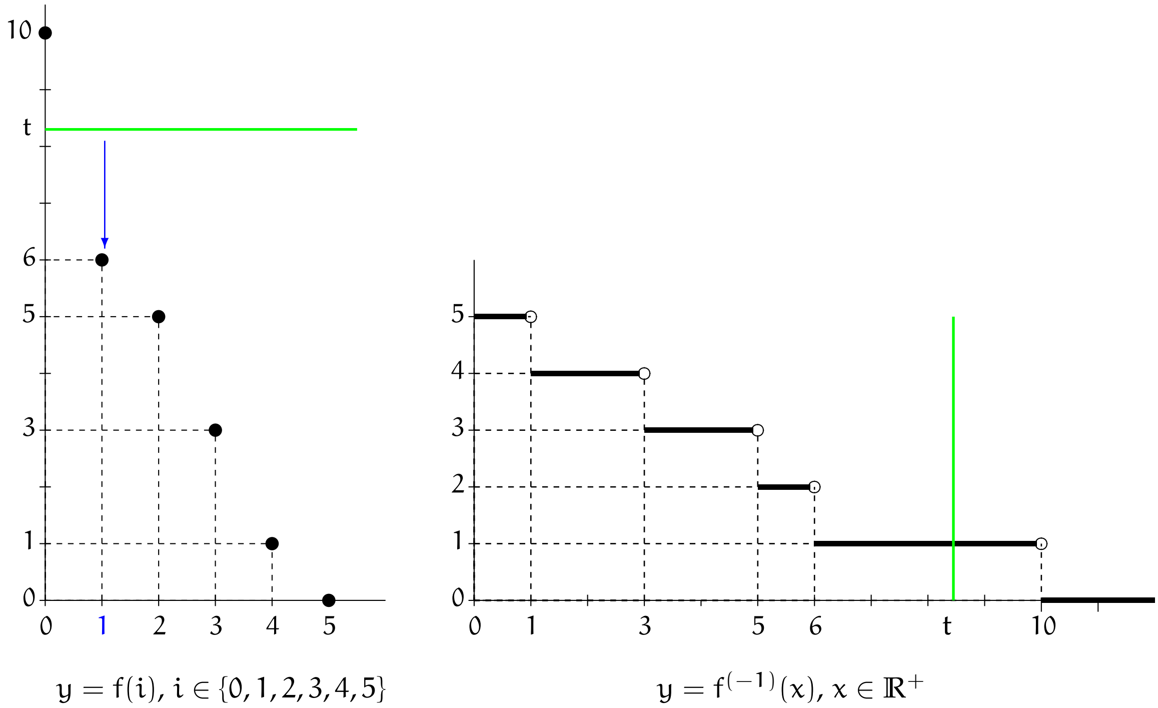


Figura 5. Representació gràfica de la funció estrictament decreixent f i la seva pseudoinversa, també decreixent, $f^{(-1)}$, essent $f = (10, 6, 5, 3, 1, 0)$

Demostració: 1. Observem que F_f està ben definida; per tant, només hem de comprovar que és commutatiu, creixent en cada variable i que té 0 com a neutre. La commutativitat s'observa clarament de la definició. I com que $f(0) = 0$ llavors F_f té l'element 0 com a neutre. Finalment, com que f és creixent, llavors per la proposició anterior $f^{(-1)}$ també ho és. Siguin, doncs, $i, i', j \in L$ amb $i \leqslant i'$. Com que f és creixent, $f(i) + f(j) \leqslant f(i') + f(j)$, i pel fet de ser-ho també la pseudoinversa, $F_f(i,j) \leqslant F_f(i',j)$.

2. De forma similar, la commutativitat se satisfà per construcció, i com que $f(n) = 0$ llavors F_f té l'element n com a neutre. A més, com que f és decreixent, novament per la proposició anterior tenim que $f^{(-1)}$ és també decreixent. I si ara es consideren $i, i', j \in L$ amb $i \leqslant i'$, llavors del decreixement de f tenim que $f(i) + f(j) \geqslant f(i') + f(j)$, i ara pel decreixement de la pseudoinversa tenim $F_f(i,j) \leqslant F_f(i',j)$. □

Aquesta proposició ens dóna peu a definir el concepte de generador additiu de disjuncions i conjuncions.

Generador additiu de disjuncions sobre L

Definició 3.1.7 *Sigui* D *una disjunció sobre* L *i sigui* $f\colon L \to [0, +\infty)$ *una funció estrictament creixent amb* $f(0) = 0$ *de manera que* $D = F_f$*, és a dir:*

$$D(i,j) = f^{(-1)}(f(i) + f(j)) \quad \forall i, j \in L. \tag{3.1}$$

En aquest cas direm que:

- *La disjunció* D *és generada additivament per* f*.*
- *La funció* $f\colon L \to [0, +\infty)$ *és un generador additiu de* D*.*

Denotarem aquest fet per $D = \langle f \rangle$*. Paral·lelament, direm que una disjunció* D *és additivament generable quan existeixi alguna funció* f *del tipus descrit de manera que* $D = \langle f \rangle$*.*

Per simplificar la notació, escriurem $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ on $a_i = f(i)$, $i \in L$. Per descomptat, i sempre que l'operació binària generada sigui una disjunció, s'entendrà que $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ amb $a_0 = 0$.

Proposició 3.1.8 *Sigui* $f\colon L \to [0, +\infty)$ *una funció estrictament creixent amb* $f(0) = 0$, $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ *amb* $a_i = f(i)$, $i \in L$. *Considerem la disjunció* D *generada additivament per* f

$$D(i,j) = f^{(-1)}(f(i) + f(j)) \quad \forall i,j \in L.$$

Aleshores:

1. *Si* $k < n$, $D(i,j) = k$ *si, i només si,* $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1}$.
2. $D(i,j) = n$ *si, i només si,* $a_n \leqslant a_i + a_j$.

Demostració: Vegem 1 i 2. Si $k < n$,

$$\begin{aligned} D(i,j) = k &\iff f^{(-1)}(f(i) + f(j)) = k \\ &\iff \max\{l \in L \ ; \ f(l) \leqslant f(i) + f(j)\} = k \\ &\iff a_k \leqslant a_i + a_j \ < a_{k+1}, \end{aligned}$$

mentre que

$$\begin{aligned} D(i,j) = n &\iff f^{(-1)}(f(i) + f(j)) = n \\ &\iff \max\{l \in L \ ; \ f(l) \leqslant f(i) + f(j)\} = n \\ &\iff a_n \leqslant a_i + a_j. \end{aligned}$$

Les tres t–conormes bàsiques són additivament generables.

Proposició 3.1.9

1. *Una funció* $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ *és un generador additiu de* S_M *si, i només si,* $a_0 = 0$ *i* $2a_i < a_{i+1}$ $\forall i = 1, \dots, n-1$.
2. *Una funció* $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ *és un generador additiu de* $S_Ł$ *si, i només si,* $a_0 = 0$ *i per a tot* $i, j \in L$ *es compleixen les condicions següents:*

$$\begin{array}{ll} a_{i+j} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j+1} & \textit{sempre que } i + j < n \\ a_n \leqslant a_i + a_j & \textit{sempre que } i + j \geqslant n, \end{array}$$

3. *Una funció* $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ *és un generador additiu de* S_D *si, i només si,* $a_0 = 0$ *i* $2a_1 \geqslant a_n$.

Demostració: 1. Si una funció $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ és un generador additiu de S_M llavors, com que $S_M(i,i) = i$, $a_i \leqslant 2a_i < a_{i+1}$ per a tot $i < n$. Recíprocament, si una funció $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ amb $a_0 = 0$ satisfà $2a_i < a_{i+1}$, $\forall i < n$, llavors és $F_f(i,i) = i$ per a tot $i \in L$ (perquè tendrem que $a_i \leqslant 2a_i < a_{i+1}$ per als $i < n$ i és clar que $F_f(n,n) = n$). Per tant, per la Proposició 2.1.3 ha de ser $F_f = S_M$.

2. Si una funció $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ és un generador additiu de $S_Ł$ llavors, en ser $S_Ł(i,j) = i + j$ sempre que $i + j < n$ llavors ha de ser $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j+1}$. En canvi, si $i + j \geqslant n$, com que $S_Ł(i,j) = n$ llavors ha de ser $a_n \leqslant a_i + a_j$. Recíprocament, si un generador f satisfà les propietats:

$$\begin{array}{ll} a_{i+j} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j+1} & \text{sempre que } i + j < n \\ a_n \leqslant a_i + a_j & \text{sempre que } i + j \geqslant n, \end{array}$$

llavors és clar que la disjunció generada F_f satisfà que $F_f(i,j) = i + j$ sempre que $i + j < n$ i que $F_f(i,j) = n$ sempre que $i + j \geqslant n$ i, per tant, $F_f = S_Ł$.

3. Si una funció $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ és un generador additiu de S_D, com que $S_D(1,1) = n$ llavors ha de ser $2a_1 \geqslant n$. Recíprocament, és clar que si una funció f satisfà $2a_1 \geqslant a_n$ llavors serà $F_f(1,1) = n$ i, per la monotonia de F_f serà $F_f = S_D$. □

Si consideram l'ordre producte sobre $\mathbb{Z}^{n+1}$: $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leqslant (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ si, i només si, $a_i \leqslant b_i$, $\forall i \in L$, llavors podem establir la proposició següent on es mostren generadors de les t–conormes bàsiques amb valors enters ($\mathrm{Ran}\ f \subset \mathbb{Z}$) i que són els mínims en aquest sentit respecte l'ordre producte. Anomenarem *generadors estàndard* de les t–conormes bàsiques a aquests generadors amb valors enters.

Proposició 3.1.10 *Els generadors estàndard de les t–conormes bàsiques són:*

1. *La t–conorma* S_M *té* $f = (0, 1, 3, 7, \ldots, 2^{n-1} - 1, 2^n - 1)$ *com a generador additiu.*
2. *La t–conorma* $S_Ł$ *està generada additivament per* $f = (0, 1, 2, 3, \ldots, n)$.
3. *La funció* $f = (0, n-1, n, n+1, \ldots, 2n-3, 2n-2)$ *és un generador additiu de* S_D.

Aquests generadors són els mínims d'entre els generadors amb $\mathrm{Ran}\ f \subset \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓ: Atesa la proposició anterior, els generadors que es presenten ho són de les t–conormes corresponents. A més, en prendre en cada cas el valor enter mínim possible, començant d'a_1 i fins a_n d'acord amb la proposició que caracteritza aquests generadors, els generadors mostrats són els mínims amb valors enters.

Exemple 3.1.11 *Sigui* $f = (0, 1, 2, 3, 5)$ *una funció* $f \colon L_4 \to [0, +\infty)$. *Observem que la disjunció generada per* f,

F_f	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	3	4
2	2	3	3	4	4
3	3	3	4	4	4
4	4	4	4	4	4

no és associativa. En efecte, $F_f(F_f(1,1),3) = F_f(2,3) = 4$ *mentre que, per una altra part,* $F_f(1, F_f(1,3)) = F_f(1,3) = 3$.

Per una altra part, no totes les disjuncions tenen generador additiu, tal com podem comprovar en l'exemple següent.

Exemple 3.1.12 *Sigui* D *la disjunció definida sobre* $L_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *següent:*

D	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	3	4	4
2	2	3	3	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

Aquesta disjunció no té cap generador additiu. En efecte, suposem que D *fos additivament generable per* $f = (0, a, b, c, d)$*. De la Proposició 3.1.8 se'n poden extreure, entre d'altres, les desigualtats següents:*

$$\begin{array}{lcl} D(1,1) = 1 & \longrightarrow & 2a < b \\ D(1,2) = 3 & \longrightarrow & a + b \geqslant c \\ D(2,2) = 3 & \longrightarrow & 2b < d \\ D(1,3) = 4 & \longrightarrow & a + c \geqslant d. \end{array}$$

Llavors, d'una banda, $2b < d \leqslant a + c$*, i per tant,* $b < \frac{a+c}{2}$*, i d'altra banda,* $2b > 2a + b \geqslant a + c$ *i així* $b > \frac{a+c}{2}$*, que ens porta a una contradicció.*

Observem a més que aquesta disjunció no és associativa: $D(D(1,1), 2) = D(1,2) = 3$*, però en canvi* $D(1, D(1,2)) = D(1,3) = 4$.

En resum, sabem que qualsevol funció $f \colon L \to [0, +\infty)$, queda determinada una vegada fixats els valors de $\mathrm{Ran} f = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, on $a_i = f(i)$, $i \in L$. Llavors:

1. Qualsevol llista estrictament creixent de nombres reals $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ amb $a_0 = 0$ és el generador d'una disjunció (no necessàriament associativa) sobre $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Fent abús de llenguatge, direm que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ és un generador.

2. Hi ha disjuncions sobre L que no són additivament generables.

En aquest treball, les funcions que generin operacions binàries associatives hi jugaran un paper important. Per això es considera la definició següent, vàlida tant per a funcions creixents (les quals generen disjuncions) com decreixents (ídem conjuncions).

Definició 3.1.13 *Sigui* $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *una funció monòtona estricta amb* $a_0 = 0$ *(respectivament* $a_n = 0$*). Direm que la funció* f *és associativa si la disjunció (respectivament conjunció) generada per* f*,* F_f*, ho és.*

Generador additiu de conjuncions sobre L

D'igual forma que hem fet amb les disjuncions es pot fer una construcció semblant per les conjuncions.

Definició 3.1.14 *Sigui* C *una conjunció sobre* L *i sigui* $f \colon L \to [0, +\infty)$ *una funció estrictament decreixent amb* $f(n) = 0$ *de manera que* $C = F_f$*, és a dir*

$$C(i,j) = f^{(-1)}(f(i) + f(j)) \quad \forall i, j \in L. \tag{3.2}$$

En aquest cas direm que:

- *La conjunció* C *és generada additivament per* f
- *La funció* $f \colon L \to [0, +\infty)$ *és un generador additiu de* C.

Denotarem aquest fet per $C = \langle f \rangle$*. A més, direm que una conjunció* C *és additivament generable quan exiteixi alguna funció* f *en aquests termes que la generi additivament.*

Per simplificar la notació, escriurem $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ on $a_i = f(i)$, $i \in L$. Per descomptat, i sempre que l'operació binària generada sigui una conjunció, s'entendrà que $a_0 > a_1 > \ldots > a_n$ amb $a_n = 0$.

Proposició 3.1.15 *Sigui* $f\colon L \to [0,+\infty)$ *una funció estrictament decreixent amb* $f(n) = 0$, $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *amb* $a_i = f(i)$, $i \in L$. *Considerem la conjunció* C *generada additivament per* f

$$C(i,j) = f^{(-1)}(f(i) + f(j)) \ \ \forall i,j \in L$$

Aleshores:

1. *Si* $k > 0$, $C(i,j) = k$ *si, i només si,* $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k-1}$.
2. $C(i,j) = 0$ *si, i només si,* $a_0 \leqslant a_i + a_j$.

DEMOSTRACIÓ: Si $k > 0$,

$$\begin{aligned} C(i,j) = k &\iff f^{(-1)}(f(i)+f(j)) = k \\ &\iff \min\{l \in L\,;\ f(l) \leqslant f(i)+f(j)\} = k \\ &\iff a_k \leqslant a_i + a_j \ < a_{k-1}, \end{aligned}$$

mentre que

$$\begin{aligned} C(i,j) = 0 &\iff f^{(-1)}(f(i)+f(j)) = 0 \\ &\iff \min\{l \in L\,;\ f(l) \leqslant f(i)+f(j)\} = 0 \\ &\iff a_0 \leqslant a_i + a_j. \end{aligned}$$

Observació 3.1.16 *Si per als generadors decreixents* $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *amb* $a_n = 0$ *la pseudoinversa fos*

$$f^{(-1)}(t) = \begin{cases} \max\{i \in L \ :\ a_i \geqslant t\} & \textit{si } t \leqslant a_0 \\ 0 & \textit{si } t > a_0, \end{cases}$$

només podríem generar additivament t–normes arquimedianes, tal com ocorre al cas continu. Amb la definició de pseudoinversa utilitzada en aquest treball, Definició 3.1.1, és possible generar t–normes no arquimedianes, entre elles la t–norma mínim.

No obstant això, aquesta altra definició de pseudoinversa és utilitzada en [31] per a calcular la residuació i biresiduació d'una t–norma sobre L, *tal com es mostra en la secció sobre indistingibilitats d'aquest treball.*

Vegem ara una altra manera de calcular $C(i,j)$ a partir del generador i sense fer ús de la pseudoinversa:

Proposició 3.1.17 *Sigui* C *la conjunció amb generador* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. *Aleshores,* $C(i,j)$ *és el nombre d'elements de* $\operatorname{Ran} f$ *majors estrictament que* $a_i + a_j$:

$$C(i,j) = |\{l \in L \ :\ a_l > a_i + a_j\}|.$$

DEMOSTRACIÓ: En efecte, si $k > 0$ i $C(i,j) = k$ llavors $a_{k-1} > a_i + a_j \geqslant a_k$. Per tant, $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ són els k elements de $\operatorname{Ran} f$ majors estrictament que $a_i + a_j$. En canvi, si $C(i,j) = 0$ llavors $a_i + a_j \geqslant a_0$ i també se satisfà l'enunciat. □

A continuació es mostren les caracteritzacions dels generadors de les t–normes bàsiques.

Proposició 3.1.18

1. *Una funció* $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *amb* $a_n = 0$ *és un generador additiu de* T_M *si, i només si,* $a_i > 2a_{i+1}$ $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1$.

2. *Una funció* $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ *amb* $a_n = 0$ *és un generador additiu de* $T_Ł$ *si, i només si, per a tot* $i, j \in L$ *es compleixen les condicions següents:*

$$\begin{array}{ll} a_{n-(i+j)} \leqslant a_{n-i} + a_{n-j} < a_{n-(i+j+1)} & \textit{sempre que } i+j < n \\ a_0 \leqslant a_{n-i} + a_{n-j} & \textit{sempre que } i+j \geqslant n. \end{array}$$

3. *Una funció* $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ *amb* $a_n = 0$ *és un generador additiu de* T_D *si, i només si,* $2a_{n-1} \geqslant a_0$.

DEMOSTRACIÓ: La demostració és similar a la de la Proposició 3.1.9, però resulta immediata aplicant la Proposició 3.1.20 que es mostra més endavant. □

D'acord amb aquesta proposició i considerant novament l'ordre producte sobre $\mathbb{Z}^{n+1}$, els generadors additius de les t–normes bàsiques amb $\mathrm{Ran}\ f \subset \mathbb{Z}$ que són mínims en aquest sentit (respecte l'ordre producte) són els següents. Anomenarem *generadors estàndard* de les t–normes bàsiques a aquests generadors amb valors enters.

Proposició 3.1.19 *Els generadors estàndard de les t–normes bàsiques són:*

1. *La t–norma* T_M *té* $f = (2^n - 1, \dots, 7, 3, 1, 0)$ *com a generador additiu.*

2. *La t–norma* $T_Ł$ *està generada per* $f = (n, n-1, \dots, 3, 2, 1, 0)$.

3. *La funció* $f = (2n-2, 2n-3, \dots, n+1, n, n-1, 0)$ *és un generador additiu de* T_D.

Aquests generadors són els mínims d'entre els generadors amb $\mathrm{Ran}\ f \subset \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓ: Atesa la proposició anterior, els generadors mostrats es corresponen amb els de les t–normes bàsiques, respectivament. A més, en prendre en cada cas el valor enter mínim possible, començant d'a_{n-1} i fins a_0 d'acord amb la proposició que caracteritza aquests generadors, els generadors mostrats són els mínims amb valors enters.

Generació additiva i dualitat

Els generadors d'una disjunció i d'una conjunció duals una de l'altra estan relacionats mitjançant l'única negació forta de què disposam per al cas discret. Així, els resultats que es vagin obtenint per a les disjuncions (i t–conormes) també seran aplicables i adaptables per a les conjuncions (i t–normes).

Proposició 3.1.20

1. *Sigui* $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ *amb* $a_0 = 0$ *i* $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ *un generador d'una disjunció* D*, i sigui* D^* *la conjunció dual de* D*. Aleshores* $g = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ *amb* $b_i = a_{n-i}$ *és un generador de* D^*.

2. *Sigui* $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ *amb* $a_n = 0$ *i* $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n$ *un generador d'una conjunció* C*, i sigui* C^* *la disjunció dual de* C*. Aleshores* $g = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ *amb* $b_i = a_{n-i}$ *és un generador de* C^*.

DEMOSTRACIÓ: 1. Sigui D una disjunció i sigui $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ amb $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ i $a_0 = 0$ un generador additiu seu. Vegem en primer lloc que $D^*(i,j) = k$ amb $k > 0$ si, i només si, $b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k-1}$:

$$\begin{aligned} D^*(i,j) = k &\Leftrightarrow n - D(n-i, n-j) = k \\ &\Leftrightarrow D(n-i, n-j) = n-k \\ &\Leftrightarrow a_{n-k} \leqslant a_{n-i} + a_{n-j} < a_{n-k+1} = a_{n-(k-1)} \\ &\Leftrightarrow b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k-1}. \end{aligned}$$

I vegem ara que $D^*(i,j) = 0$ si, i només si, $b_0 \leqslant b_i + b_j$:

$$\begin{aligned} D^*(i,j) = 0 &\Leftrightarrow n - D(n-i, n-j) = 0 \\ &\Leftrightarrow D(n-i, n-j) = n \\ &\Leftrightarrow a_n \leqslant a_{n-i} + a_{n-j} \\ &\Leftrightarrow b_0 \leqslant b_i + b_j. \end{aligned}$$

2. De forma similar, sigui C una conjunció i sigui $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ amb $a_0 > a_1 > \ldots > a_n$ i $a_n = 0$ un generador additiu seu. Vegem en primer lloc que $C^*(i,j) = k$ amb $k < n$ si, i només si, $b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}$:

$$\begin{aligned} C^*(i,j) = k &\Leftrightarrow n - C(n-i, n-j) = k \\ &\Leftrightarrow C(n-i, n-j) = n-k \\ &\Leftrightarrow a_{n-k} \leqslant a_{n-i} + a_{n-j} < a_{n-k-1} = a_{n-(k+1)} \\ &\Leftrightarrow b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}. \end{aligned}$$

I vegem ara que $C^*(i,j) = n$ si, i només si, $b_n \leqslant b_i + b_j$:

$$\begin{aligned} C^*(i,j) = 0 &\Leftrightarrow n - C(n-i, n-j) = n \\ &\Leftrightarrow C(n-i, n-j) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 \leqslant a_{n-i} + a_{n-j} \\ &\Leftrightarrow b_n \leqslant b_i + b_j. \end{aligned}$$

3.2 RESULTATS GENERALS

A continuació es presenten uns resultats bàsics sobre la generació additiva de les disjuncions.

Proposició 3.2.1 *Siguin $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ i $g = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ dues funcions estrictament creixents sobre L amb $a_0 = b_0 = 0$. Llavors $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ si, i només si, ocorre que $\forall i, j, k \in L$, $k < n$:*

1. $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1} \Longrightarrow b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}$
2. $a_i + a_j \geqslant a_n \Longrightarrow b_i + b_j \geqslant b_n$

DEMOSTRACIÓ: Perquè d'ambdós generadors s'obtengui la mateixa disjunció ha de passar que

$$f^{(-1)}(f(i) + f(j)) = g^{(-1)}(g(i) + g(j)) \quad \forall (i,j) \in L^2$$

I això, d'acord amb l'Observació 3.1.8 ocorrerà si, i només si, es compleixen les dues condicions següents:

1. $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1} \iff b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}$
2. $a_i + a_j \geqslant a_n \iff b_i + b_j \geqslant b_n$

Per tant, d'una banda, si $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ llavors

1. $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1} \implies b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}$
2. $a_i + a_j \geqslant a_n \implies b_i + b_j \geqslant b_n$

Suposem ara, doncs, que se satisfan les implicacions de la proposició i vegem que els recíprocs també han de satisfer-se. En efecte, del fet que

1. $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1} \implies b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}$
2. $a_i + a_j \geqslant a_n \implies b_i + b_j \geqslant b_n$

llavors tenim que

1. $\{(i,j) \in L^2 \ ; \ a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1}\} \subseteq \{(i,j) \in L^2 \ ; \ b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}\}$
2. $\{(i,j) \in L^2 \ ; \ a_n \leqslant a_i + a_j\} \subseteq \{(i,j) \in L^2 \ ; \ b_n \leqslant b_i + b_j\}$
3. Com que $F_f(i,j)$ no pot prendre dos valors diferents alhora, llavors si $0 \leqslant k < k'$, llavors els conjunts $\{(i,j) \in L^2 \ ; \ a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1}\}$ i $\{(i,j) \in L^2 \ ; \ a_{k'} \leqslant a_i + a_j < a_{k'+1}\}$ són disjunts, així com també ho són del conjunt $\{(i,j) \in L^2 \ ; \ a_n \leqslant a_i + a_j\}$. Aquests conjunts, a més, formen una partició del conjunt L^2.
4. Com que $F_f(i,j)$ no pot prendre dos valors diferents alhora, llavors si $0 \leqslant k < k'$, llavors els conjunts $\{(i,j) \in L^2 \ ; \ b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}\}$ i $\{(i,j) \in L^2 \ ; \ b_{k'} \leqslant b_i + b_j < b_{k'+1}\}$ són disjunts, així com també ho són del conjunt $\{(i,j) \in L^2 \ ; \ b_n \leqslant b_i + b_j\}$. Aquests conjunts, a més, formen també una partició del conjunt L^2.

Amb tot això, queda clar que ha de ser

$$\{(i,j) \in L^2 \ ; \ a_k = a_i + a_j < a_{k+1}\} = \{(i,j) \in L^2 \ ; \ b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}\}$$

i

$$\{(i,j) \in L^2 \ ; \ a_n \leqslant a_i + a_j\} = \{(i,j) \in L^2 \ ; \ b_n \leqslant b_i + b_j\}$$

i per tant,

1. $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1} \iff b_k \leqslant b_i + b_j < b_{k+1}$
2. $a_i + a_j \geqslant a_n \iff b_i + b_j \geqslant b_n$ $\square$

Corol·lari 3.2.2 *Si* $f : L \to [0, +\infty)$ *és estrictament creixent amb* $f(0) = 0$ *llavors* $\langle f \rangle = \langle \lambda f \rangle$ $\forall \lambda > 0$.

DEMOSTRACIÓ: És clar que

1. $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1} \implies \lambda a_k \leqslant \lambda a_i + \lambda a_j < \lambda a_{k+1}$
2. $a_i + a_j \geqslant a_n \implies \lambda a_i + \lambda a_j \geqslant \lambda a_n$ $\square$

Proposició 3.2.3 *Sigui* D *una disjunció additivament generable. Hi ha algun generador additiu* g *de* D *amb* $\mathrm{Ran}\ g \subset Z^+$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $a_0 = 0$, un generador additiu de D. A partir de la Proposició 3.2.2, només necessitam provar que D té un generador additiu g complint $g = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$, $b_0 = 0$ i $b_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$ (on $\mathbb{Q}$ representa el conjunt dels nombres racionals).

Considerem $\delta_t = \max\{a_t - (a_i + a_j) \ : \ i, j \in L, \ a_i + a_j < a_t\}$ amb $t = 0, 1, \ldots, n-1$, i sigui $\delta = \min\{a_1, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Considerem ara $\epsilon_t = \frac{\delta}{4^{n-t+1}}$, $t = 1, \ldots, n$. Així $\delta = 4\epsilon_n = 4^2\epsilon_{n-1} = 4^3\epsilon_{n-2} = \ldots = 4^n\epsilon_1$.

Ara, si per a cada $t = 1, 2, \ldots, n$ agafem $b_t \in (a_t - 4\epsilon_t, a_t - 2\epsilon_t) \cap Q$ podem veure que $g = (b_0 = 0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ és un generador additiu de D (observau que $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_n < a_n$).

A partir de la Proposició 3.2.1, només necessitam veure que les condicions 1. i 2. se satisfan.

Vegem 1. Suposem que $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1}$ amb $i \leqslant j < k < n$. Llavors

$$\begin{aligned} b_i + b_j &> a_i + a_j - 4(\epsilon_i + \epsilon_j) \\ &\geqslant a_i + a_j - 2\epsilon_k \qquad \text{(perquè } 4\epsilon_i, 4\epsilon_j \leqslant \epsilon_k \text{)} \\ &\geqslant a_k - 2\epsilon_k \\ &> b_k, \end{aligned}$$

i també,

$$\begin{aligned} b_i + b_j &< a_i + a_j \\ &< a_{k+1} - \delta \qquad \text{(per definició de } \delta \text{)} \\ &< a_{k+1} - 4\epsilon_k \\ &< b_k, \end{aligned}$$

i ja ho tenim provat.

En el cas $i \leqslant j = k < n$ és clar que $b_k \leqslant b_i + b_k$ i fent el mateix raonament, $b_i + b_k < a_i + a_k < a_{k+1} - \delta < b_{k+1}$.

Vegem ara 2. Suposem $a_i + a_j > a_n$ amb $i \leqslant j < n$ (la situació $i \leqslant j = n$ és trivial)

$$\begin{aligned} b_i + b_j &> a_i + a_j - 4(\epsilon_i + \epsilon_j) \\ &\geqslant a_n - 2\epsilon_k \\ &> b_n \end{aligned}$$

i tenim demostrat allò que preteníem. □

Observació 3.2.4 *D'acord amb la proposició anterior, quan convegui, es consideraran generadors enters (*$\mathrm{Ran}\ f \subset Z^+$*) sense que això suposi pèrdua de generalitat.*

Una de les dues línies de recerca principals del treball és caracteritzar aquelles disjuncions que són additivament generables. A continuació establim una caracterització d'aquestes en termes de t–conormes contínues arquimedianes no estrictes.

Proposició 3.2.5 *Una disjunció* D *sobre* $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ *és additivament generable si, i només si, existeix una t–conorma contínua arquimediana no estricta* S *sobre l'interval real* $[0, n]$ *de manera que* $D(i, j) = \lfloor S(i, j) \rfloor$ $\forall i, j \in L$, *on* $\lfloor z \rfloor$ *és la part entera per defecte de* z *(el major enter que és menor o igual que* z*).*

DEMOSTRACIÓ: Suposem primer de tot que D és una disjunció sobre L amb generador additiu $f : L \longrightarrow [0,+\infty)$. Sigui $\overline{f} : [0,n] \longrightarrow [0,+\infty)$ una extensió contínua estrictament creixent de f a l'interval real $[0,n]$ i sigui S la t–conorma arquimediana no estricta sobre $[0,n]$ generada per $\overline{f}$: $S(x,y) = \overline{f}^{(-1)}(\overline{f}(x) + \overline{f}(y))$ $\forall x,y \in [0,n]$ on $\overline{f}^{(-1)}$ és la pseudoinversa de $\overline{f}$, definida per $\overline{f}^{(-1)}(t) = \max\{z \in [0,n] \; ; \; \overline{f}(z) \leqslant t\}$, $t \in [0,+\infty)$. Evidentment, $f^{(-1)}(t) = \left\lfloor \overline{f}^{(-1)}(t) \right\rfloor$ $\forall t \in [0,+\infty)$. Per tant, $\forall i,j \in L$, podem escriure que
$D(i,j) = f^{(-1)}(f(i)+f(j)) = \left\lfloor \overline{f}^{(-1)}(f(i)+f(j)) \right\rfloor = \left\lfloor \overline{f}^{(-1)}(\overline{f}(i)+\overline{f}(j)) \right\rfloor = \lfloor S(i,j) \rfloor$.
Recíprocament, considerem D donada per $D(i,j) = \lfloor S(i,j) \rfloor$ $\forall i,j \in L$, essent S una t–conorma arquimediana no estricta sobre $[0,n]$. És fàcil veure que D verifica totes les condicions de la Definició 2.1.1, per tant D és una disjunció sobre L.

D'altra banda, sigui $\overline{f} : [0,n] \longrightarrow [0,+\infty)$ un generador additiu de S i sigui $f : L \longrightarrow [0,+\infty)$ la restricció de $\overline{f}$ a L: $f(i) = \overline{f}(i)$, $i \in L$. Tenim que $\forall i,j \in L$
$D(i,j) = \lfloor S(i,j) \rfloor = \left\lfloor \overline{f}^{(-1)}(\overline{f}(i)+\overline{f}(j)) \right\rfloor = \left\lfloor \overline{f}^{(-1)}(f(i)+f(j)) \right\rfloor = f^{(-1)}(f(i)+f(j))$.
En altres paraules, f és un generador additiu de D i per tant, D és additivament generable.$\square$

3.3 GENERACIÓ ADDITIVA ENVERS GENERACIÓ MULTIPLICATIVA

En la secció anterior s'ha definit el concepte de generador additiu per a disjuncions i conjuncions definides sobre L. Així, una disjunció o una conjunció pot obtenir-se a partir d'una funció f definida sobre L, només fent ús de la (pseudo)inversa i l'operació suma. Aquesta mateixa idea es pot dur a terme utilitzant l'operació producte. Anem a comprovar que les disjuncions i conjuncions que es poden generar additivament són les mateixes que les que es poden generar multiplicativament; per fer això caldrà distingir quan s'utilitzi un o altre tipus de generació. També en el cas continu es dóna aquest fet ([12], 68-81).

Malgrat la distinció entre generació additiva i multiplicativa que es pretén fer, la definició de pseudoinversa utilitzada en ambdós casos és la de la Definició 3.1.1.

Fins ara hem denotat per F_f la l'operació binària que s'obté a partir d'un generador $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, tant si $a_0 = 0$ (disjunció) com si $a_n = 0$ (conjunció). En aquesta secció, i només en aquesta, com que haurem de distingir entre els dos tipus de generador i del tipus d'operació binària generada, definim:

Definició 3.3.1 *Sigui* $f = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ *una llista estrictament monòtona de nombres reals no negatius. Aleshores:*

1. *Si* $a_0 = 0$ *(*f *és creixent) llavors direm que* f *és un generador additiu disjuntiu.*
2. *Si* $a_n = 0$ *(*f *és decreixent) llavors direm que* f *és un generador additiu conjuntiu.*

En qualsevol dels dos casos, denotarem per F_f^+ *la disjunció o conjunció generada additivament per aquest generador additiu* f.

A continuació es defineixen els conceptes de generador multiplicatiu d'una disjunció.

Proposició 3.3.2 *Sigui* $f \colon L \to [1,+\infty)$ *una funció creixent amb* $f(0) = 1$. *Aleshores l'operació binària sobre* L *donada per*

$$F_f^{\bullet}(i,j) = f^{(-1)}(f(i) \cdot f(j)) \quad \forall i,j \in L$$

és una disjunció sobre L.

DEMOSTRACIÓ: La commutativitat és clara en la definició de la funció $F_f^\bullet$. I en ser $f(0) = 1$, llavors és clar que a_0 és neutre per aquesta operació:

$$F_f^\bullet(0, i) = F_f^\bullet(i, 0) = f^{(-1)}(f(0) \cdot f(i)) = f^{(-1)}(1 \cdot f(i)) = i \quad \forall i \in L.$$

Finalment, si $i \leqslant i'$ llavors $f(i) \cdot f(j) \leqslant f(i') \cdot f(j)$ i, per tant, $F_f^\bullet(i, j) \leqslant F_f^\bullet(i', j)$. □

I ara definim el concepte de disjunció multiplicativament generable.

Definició 3.3.3 *Sigui* D *una disjunció sobre* L *i sigui* $f\colon L \to [1, +\infty)$ *una funció estrictament creixent amb* $f(0) = 1$ *de manera que*

$$D(i, j) = f^{(-1)}(f(i) \cdot f(j)) \quad \forall i, j \in L$$

En aquest cas direm que:

- *La disjunció* D *és generada multiplicativament per* f.
- *La funció* $f\colon L \to [1, +\infty)$ *és un generador multiplicatiu de* D.

I ara farem el mateix per a conjuncions.

Proposició 3.3.4 *Sigui* $f\colon L \to [1, +\infty)$ *una funció decreixent amb* $f(n) = 1$. *Aleshores l'operació binària sobre* L *donada per*

$$F_f^\bullet(i, j) = f^{(-1)}(f(i) \cdot f(j)) \quad \forall i, j \in L$$

és una conjunció sobre L.

DEMOSTRACIÓ: La commutativitat és clara en la definició de la funció $F_f^\bullet$. I en ser $f(n) = 1$, llavors és clar que a_n és neutre per aquesta operació:

$$F_f^\bullet(n, i) = F_f^\bullet(i, n) = f^{(-1)}(f(n) \cdot f(i)) = f^{(-1)}(1 \cdot f(i)) = i \quad \forall i \in L.$$

Finalment, si $i \leqslant i'$ llavors aplicant 3.1.5 tenim $f(i) \cdot f(j) \geqslant f(i') \cdot f(j)$ i, per tant, $F_f^\bullet(i, j) \leqslant F_f^\bullet(i', j)$. □

I ara definim el concepte de conjunció multiplicativament generable.

Definició 3.3.5 *Sigui* C *una conjunció sobre* L *i sigui* $f\colon L \to [1, +\infty)$ *una funció estrictament decreixent amb* $f(n) = 1$ *de manera que*

$$C(i, j) = f^{(-1)}(f(i) \cdot f(j)) \quad \forall i, j \in L$$

En aquest cas direm que:

- *La conjunció* C *és generada multiplicativament per* f.
- *La funció* $f\colon L \to [1, +\infty)$ *és un generador multiplicatiu de* C.

D'acord amb aquests resultats i definicions sobre els generadors multiplicatius, qualsevol llista de nombre reals monòtona estricta, $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, amb $a_0 = 1$ o $a_n = 1$ és el generador multiplicatiu d'una disjunció o conjunció, respectivament. Llavors, per tal de poder diferenciar clarament quan un generador multiplicatiu ho és d'un o altre tipus d'operació binària, definim, tal com hem fet amb els generadors additius:

Definició 3.3.6 *Sigui* $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *una llista estrictament monòtona de nombres reals majors o iguals que* 1. *Aleshores:*

1. *Si* $a_0 = 1$ *(*f *és creixent) llavors direm que* f *és un generador multiplicatiu disjuntiu.*

2. *Si* $a_n = 1$ *(*f *és decreixent) llavors direm que* f *és un generador multiplicatiu conjuntiu.*

En qualsevol dels dos casos, denotarem per $F_f^{\bullet}$ *l'operació binària generada multiplicativament per aquest generador multiplicatiu* f.

Vegem que donat un generador additiu d'una disjunció en podem construir un de multiplicatiu de la mateixa, i viceversa.

un generador additiu disjuntiu

Proposició 3.3.7 *Siguin* $f = (a_0, a_1, ..., a_n)$ *un generador additiu i* $g = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ *un generador multiplicatiu, ambdós disjuntius; per descomptat* $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. *Aleshores:*

1. *La funció* $f^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$ *definida per* $a_i^* = e^{a_i}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, *és un generador multiplicatiu disjuntiu.*

2. *La funció* $g^* = (b_0^*, b_1^*, \dots, b_n^*)$ *definida per* $b_i^* = \mathrm{Ln}(b_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, *(on* Ln *és la funció logarítmica natural) és un generador additiu disjuntiu.*

3. *A més,* $f^{**} = f$ *i* $g^{**} = g$, *entenent com a* f^{**} *el generador que resulta d'aplicar a* f *la funció exponencial, tal com s'indica en 1 (s'obtén així un generador multiplicatiu disjuntiu) i, seguidament, aplicar-li la funció logarítmica tal com s'indica al pas 2 (s'obtén novament un generador additiu disjuntiu). Igualment,* g^{**} *és el resultat d'aplicar a* g *els passos 2 i 1, en aquest ordre.*

DEMOSTRACIÓ:

1. Resulta del fet que $a_0^* = e^{a_0} = e^0 = 1$, i que la funció exponencial és estrictament creixent.

2. Resulta del fet que $b_0^* = \mathrm{Ln}(b_0) = \mathrm{Ln}(1) = 0$, i que la funció logarítmica és estrictament creixent.

3. Les funcions exponencial i logarítmica utilitzades són inversa una de l'altra. □

D'igual forma, les funcions exponencial i logarítmica ens permeten obtenir generadors multiplicatius conjuntius a partir de generadors additius conjuntius, i viceversa, respectivament.

Proposició 3.3.8 *Siguin* $f = (a_0, a_1, ..., a_n)$ *un generador additiu i* $g = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ *un generador multiplicatiu, ambdós conjuntius; per descomptat* $a_n = 0$, $b_n = 1$. *Aleshores:*

1. *La funció* $f^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$ *definida per* $a_i^* = e^{a_i}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, *és un generador multiplicatiu conjuntiu.*

2. *La funció* $g^* = (b_0^*, b_1^*, \dots, b_n^*)$ *definida per* $b_i^* = \mathrm{Ln}(b_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, *(on* Ln *és la funció logarítmica natural) és un generador additiu conjuntiu.*

3. *A més,* $f^{**} = f$ *i* $g^{**} = g$, *entenent com a* f^{**} *el generador que resulta d'aplicar a* f *la funció exponencial, tal com s'indica en 1 (s'obtén així un generador multiplicatiu conjuntiu) i, seguidament, aplicar-li la funció logarítmica tal com s'indica al pas 2 (s'obtén novament un generador additiu conjuntiu). Igualment,* g^{**} *és el resultat d'aplicar a* g *els passos 2 i 1, en aquest ordre.*

DEMOSTRACIÓ: La demostració és semblant a la de la proposició anterior. □

El resultat següent mostra que la generació additiva i multiplicativa tenen el mateix potencial. Així, si una disjunció o una conjunció pot generar-se additivament, també es podrà multiplicativament, i viceversa.

Proposició 3.3.9 *Sigui* $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *un generador additiu. Aleshores l'operació binària generada additivament per* f *és idèntica a la generada multiplicativament per* f^**:*

$$F_f^+ = F_{f^*}^\bullet$$

DEMOSTRACIÓ: Si f és un generador additiu disjuntiu, $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $a_0 = 0$, llavors el corresponent generador f^* és $f^* = \{1, e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{a_n}\}$. Vegem que $F_f^+ = F_{f^*}^\bullet$:

1. En el cas $F_f^+(i,j) = k < n$, tenim $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1}$. Aplicant-hi la funció exponencial $y = e^x$ resulta que $e^{a_k} \leqslant e^{a_i + a_j} < e^{a_{k+1}}$, és a dir, $e^{a_k} \leqslant e^{a_i} \cdot e^{a_j} < e^{a_{k+1}}$, que equival a dir $F_{f^*}^\bullet(i,j) = k$.

2. I si és $F_f^+(i,j) = n$, llavors és $a_n \leqslant a_i + a_j$. Novament, aplicant la funció exponencial a la desigualtat tenim $e^{a_n} \leqslant e^{a_i} \cdot e^{a_j}$ o, el que és el mateix, $F_{f^*}^\bullet(i,j) = n$. □

El cas en què f sigui un generador additiu conjuntiu $a_n = 0$, es comprova de forma similar.

De la mateixa manera, tenim el resultat anàleg.

Proposició 3.3.10 *Sigui* $g = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *un generador multiplicatiu. Aleshores l'operació binària generada multiplicativament per* g *és idèntica a la generada additivament per* g^**:*

$$F_g^\bullet = F_{g^*}^+$$

DEMOSTRACIÓ: La demostració és com l'anterior però aplicant ara la funció logarítmica en comptes de l'exponencial. □

La Proposició 3.1.20 estableix la relació entre el generador additiu d'una disjunció D i el de la seva conjunció dual D^*, així com la que hi ha entre els generadors additius d'una conjunció i la seva disjunció dual. Per altra part, les dues proposicions anteriors mostren com obtenir un generador additiu a partir d'un de multiplicatiu (i viceversa) que generin la mateixa operació binària. Vegem finalment la relació entre els generadors multiplicatius d'una operació binària, disjunció o conjunció, i la seva dual.

Proposició 3.3.11

1. *Sigui* $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ *i* $a_0 = 1$, *un generador multiplicatiu d'una disjunció* D, *i sigui* D^* *la conjunció dual de* D. *Aleshores* $g = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ *amb* $b_i = a_{n-i}$ *és un generador multiplicatiu de* D^*.

2. *Sigui* $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $a_0 > a_1 > \ldots > a_n$ *i* $a_n = 1$, *un generador multiplicatiu d'una conjunció* C, *i sigui* C^* *la disjunció dual de* C. *Aleshores* $g = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ *amb* $b_i = a_{n-i}$ *és un generador multiplicatiu de* C^*.

DEMOSTRACIÓ: Vegem *1*. Sigui D una disjunció i sigui $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ un generador multiplicatiu seu ($a_0 = 1$ i $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$). Vegem en primer lloc que $D^*(i,j) = k$ amb $k > 0$ si, i només si, $b_k \leqslant b_i \cdot b_j < b_{k-1}$:

$$\begin{aligned} D^*(i,j) = k &\Leftrightarrow n - D(n-i, n-j) = k \\ &\Leftrightarrow D(n-i, n-j) = n-k \\ &\Leftrightarrow a_{n-k} \leqslant a_{n-i} \cdot a_{n-j} < a_{n-k+1} = a_{n-(k-1)} \\ &\Leftrightarrow b_k \leqslant b_i \cdot b_j < b_{k-1}. \end{aligned}$$

I vegem ara que $D^*(i,j) = 0$ si, i només si, $b_0 \leqslant b_i \cdot b_j$:

$$\begin{aligned} D^*(i,j) = 0 \quad &\Leftrightarrow n - D(n-i, n-j) = 0 \\ &\Leftrightarrow D(n-i, n-j) = n \\ &\Leftrightarrow a_n \leqslant a_{n-i} \cdot a_{n-j} \\ &\Leftrightarrow b_0 \leqslant b_i \cdot b_j. \end{aligned}$$

I de forma similar es demostraria 2. □

La Figura 6 mostra en forma de diagrama commutatiu com passar d'un generador additiu a un de multiplicatiu, d'un generador d'una disjunció a un de la conjunció dual, i viceversa.

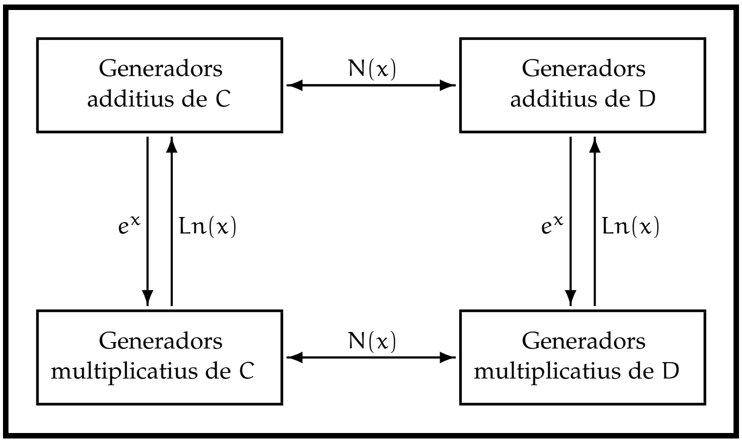


Figura 6. La relació entre els generadors additius i multiplicatius d'una conjunció C i la seva disjunció dual D

3.4 ALGORISME PER A DECIDIR QUAN UNA DISJUNCIÓ ÉS ADDITIVAMENT GENERABLE

Arribats a aquest punt construirem un mètode algorísmic que ens permeti saber si una disjunció té generador additiu o no. Per fer això transformarem el nostre problema d'existència de generador en el de resoldre un sistema d'inequacions lineals homogènies, el qual determinarà un con convex polièdric del que se n'extrauran els generadors del con dual. Així el problema quedarà reduït a determinar si un conjunt de vectors pertanyen al con dual o no. Per a determinar el con dual del con obtingut prèviament farem ús de l'algorisme Γ que trobarem en [10, 9].

Començarem introduint alguns conceptes i resultats bàsics sobre convexitat i cons convexos polièdrics, després reformularem el nostre problema en termes de pertinença a un con convex polièdric i acabarem mostrant l'algorisme que ens permetrà determinar si una disjunció és additivament generable o no.

3.4.1 *Preliminars: conjunts convexos en* R^n

Els conceptes i resultats següents provenen de la teoria de la convexitat ([32]). En aquest capítol treballarem sobre l'espai euclidià R^n format per n-tuples $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Denotarem el producte escalar estàndard de dos vectors $x, y \in R^n$ per $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

Definició 3.4.1 *Un subconjunt* C *de* $\mathbb{R}^n$ *es diu que és convex si* $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ *per a qualsevol* $x, y \in C$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Tots els conjunts afins són convexos. Notem que l'única condició perquè un conjunt sigui convex és que donats dos elements del conjunt, x i y, aquest també ha de contenir el segment entre x i y. Per descomptat, doncs, la intersecció de conjunts convexos és convex.

Els semiespais són exemples importants de conjunts convexos. Donat un vector no nul $a \in R^n$ i qualsevol $\alpha \in R$, els conjunts $\{x \in R^n : \langle a, x\rangle \leqslant \alpha\}$ i $\{x \in R^n : \langle a, x\rangle < \alpha\}$ s'anomenen semiespais tancat i obert, respectivament, corresponents a l'hiperplà $\{x \in R^n : \langle a, x\rangle = \alpha\}$.

Definició 3.4.2 *Un con convex polièdric (ccp) a* $\mathbb{R}^n$ *és la intersecció d'una col·lecció finita de semiespais tancats de* $\mathbb{R}^n$ *de manera que els seus hiperplans frontera passen per l'origen. Així doncs, un con convex polièdric és el conjunt de solucions d'algun sistema finit d'inequacions lineals dèbils (inequacions del tipus* $\leqslant$*) homogènies.*

Cada ccp té associat un con dual.

Proposició 3.4.3 *Sigui* K *un con convex polièdric. El conjunt*

$$K^o = \{x \in \mathbb{R}^k : \langle x, y\rangle \leqslant 0 \;,\; \forall y \in K\}$$

és també un ccp anomenat el con dual de K.

La proposició següent mostra que el con dual d'un ccp és el conjunt de combinacions lineals no negatives d'un conjunt de vectors no nuls.

Proposició 3.4.4 *Si* K *és el ccp de les solucions del sistema* $\langle a_i, x\rangle \leqslant 0$ $i = 1, \ldots, m$*, llavors* $K^o = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m : \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\}$.

Aquest conjunt, format per les combinacions lineals no negatives dels vectors $a_1, \ldots, a_m$, el denotarem per $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle_+$. En aquest cas direm que $a_1, \ldots, a_m$ són els generadors de $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle_+$.

Proposició 3.4.5 *Sigui* K *un con convex polièdric; aleshores* $K^{oo} = K$.

En particular $\{0\}^o = R^k$, $(R^k)^o = \{0\}$.

Corol·lari 3.4.6 *Qualsevol con convex polièdric* K *pot ser expressat com* $K = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle_+$ *per a determinats* $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$.

Demostració: En efecte, com que tot ccp és el dual del seu propi dual, llavors aplicant la proposició anterior ja tenim el resultat. □

Exemple 3.4.7 *En la figura 7 veim un con convex polièdric* K *sobre* $\mathbb{R}^2$ *generat per dos vectors* a_1 *i* a_2*. El con dual* K^o *és el con generat per dos vectors perpendiculars a* a_1 *i* a_2*. En la figura s'observa la figura cònica que té el conjunt de combinacions lineals no negatives d'aquests dos vectors.*

D'acord amb aquests resultats, establim quan és que un vector pertany a un con convex polihèdric.

Proposició 3.4.8 *Sigui* x *un vector de* $\mathbb{R}^n$*. Aleshores* $x \in \langle a_1, \ldots, a_m\rangle_+$ *si, i només si,* $\langle b_i, x\rangle \leqslant 0$ $i = 1, \ldots, s$*, on* $b_i \in \mathbb{R}^n$ *són els generadors del con* $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle_+^o$.

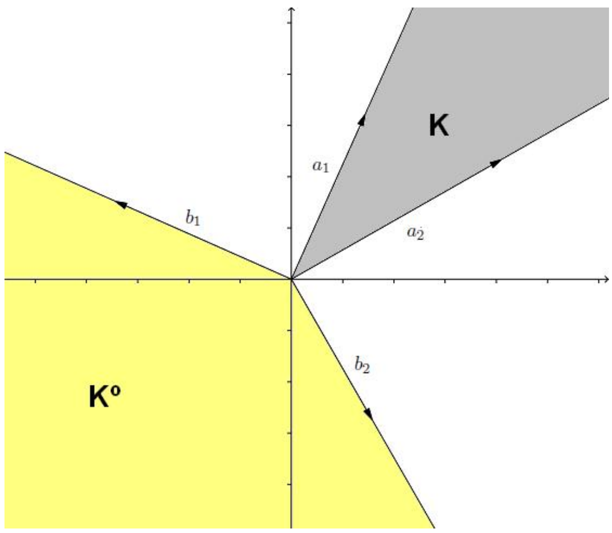


Figura 7. $K = \langle a_1, a_2 \rangle_+$ i $K^o = \langle b_1, b_2 \rangle_+$

Demostració: Si deim $K = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle_+$, llavors $K^o = \langle b_1, \ldots, b_s \rangle_+$ per a determinats $b_i \in R^n$ $i = 1, \ldots, s$. Com que $K = K^{oo}$ llavors $x \in \langle a_1, \ldots, a_m \rangle_+$ si, i només si, $x \in \langle b_1, \ldots, b_s \rangle_+^o = \{x \in R^n : \langle x, b_i \rangle \leqslant 0 \ i = 1, \ldots s\}$. □

Finalment, la proposició següent també serà útil més endavant.

Proposició 3.4.9 *Considerem* a_0, a_i, $i = 1, \ldots, m$, *vectors no nuls de* $\mathbb{R}^n$. *Sempre que* $\langle a_i, x \rangle \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$ *tenim que* $\langle a_0, x \rangle \leqslant 0$ *(es diu que* $\langle a_0, x \rangle \leqslant 0$ *és una conseqüència de* $\langle a_i, x \rangle \leqslant 0$, $i : 1, \ldots, m$ *) si, i només si,* $a_0 \in \langle a_1, \ldots, a_m \rangle_+$.

3.4.2 *Plantejament del problema en termes de convexitat*

En referència a la primera línia de treball (caracteritzar les disjuncions d'una determinada família que són additivament generables), anem a estudiar el problema més general, el de decidir si una disjunció qualsevol tengui generador additiu. En aquest apartat analitzarem el problema des d'un punt de vista diferent, transformant-ne d'existència en termes de la consistència d'un sistema d'inequacions lineals. Al final obtendrem un algorisme per a decidir quan una disjunció és additivament generable o no.

Una disjunció D sobre $L = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \geqslant 2$ està determinat pels seus valors sobre el conjunt Δ,

$$\Delta = \{(i, j) \in L \times L \ ; \ 0 < i \leqslant j < n\}.$$

Considerem

$$\Delta_k = \{(i, j) \in \Delta \ ; \ D(i, j) = k\} \quad k = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Indicarem per N_k i M_k els conjunts dels elements minimals i maximals de Δ_k, respectivament (respecte de l'ordre producte). Per descomptat que alguns dels Δ_k poden ser buits, com també

$$\Delta_n \neq \emptyset \Rightarrow M_n = \{(n-1, n-1)\}.$$

Considerarem la notació

$$\begin{aligned} N_k &= \{(a_\alpha, b_\alpha) \ ; \ \alpha = 1, \ldots, r\} \\ M_k &= \{(c_\beta, d_\beta) \ ; \ \beta = 1, \ldots, s\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

on

$$\begin{aligned} 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r \leqslant b_r < b_{r-1} < \ldots < b_1 < n \\ 0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_s \leqslant d_s < d_{s-1} < \ldots < d_1 < n \end{aligned} \tag{3.4}$$

Observació 3.4.10 *En aquests termes,* $D(i,j) = k$ *si, i només si, existeixen* $(a_\alpha, b_\alpha) \in N_k$, $(c_\beta, d_\beta) \in M_k$ *de manera que* $(a_\alpha, b_\alpha) \leqslant (i,j) \leqslant (c_\beta, d_\beta)$. *Dit altrament, tot element de la regió* k *és sempre comparable amb alguns dels minimals i maximals de la pròpia regió.*

D'altra banda, la condició d'existència de generador additiu

$$D(i,j) = f^{(-1)}(f(i) + f(j)), \ (i,j) \in L \times L$$

es pot escriure com

$$f(D(i,j)) \leqslant f(i) + f(j) < f(D(i,j) + 1), \ (i,j) \in \Delta$$

En altres paraules,

$$D(i,j) = k \Leftrightarrow f(k) \leqslant f(i) + f(j) < f(k+1), \ k = 1, 2, \ldots, n$$

(en el cas $k = n$ només considerarem la primera de les dues desigualtats, $f(n) \leqslant f(i) + f(j)$).

Pel creixement del generador f, les condicions $f(k) \leqslant f(i) + f(j) < f(k+1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ i $(i,j) \in \Delta_k$, un cop eliminada alguna redundància, poden escriure's com:

$$\begin{aligned} f(k) \leqslant f(a) + f(b) \text{ per a tot } (a,b) \in N_k, \ k = 2, \ldots, n \\ f(c) + f(d) < f(k+1) \text{ per a tot } (c,d) \in M_k, \ k = 1, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Així, donada una operació d'agregació disjuntiva D sobre L, el problema de l'existència d'un generador additiu f de D és equivalent al problema de la compatibilitat (consistència) d'un sistema d'inequacions lineals dèbils i estrictes. Així, si denotam $f = (x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on $x_k = f(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, aquest sistema té la forma següent:

$$\begin{aligned} & -x_1 < 0 \\ & x_1 - x_2 < 0 \\ & x_2 - x_3 < 0 \\ & \ldots \\ & x_{n-1} - x_n < 0 \\ & \left.\begin{aligned} & -x_{k+1} + f(c_1) + f(d_1) < 0 \\ & -x_{k+1} + f(c_2) + f(d_2) < 0 \\ & \ldots \\ & -x_{k+1} + f(c_s) + f(d_s) < 0 \end{aligned}\right\} \ k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ & \left.\begin{aligned} & x_k - f(a_1) - f(b_1) \leqslant 0 \\ & x_k - f(a_2) - f(b_2) \leqslant 0 \\ & \ldots \\ & x_k - f(a_r) - f(b_r) \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \ k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.6}$$

Observem que en el sistema (3.6), $-x_{k+1} + x_i + x_j < 0$ vol dir que $D(i,j) = k$ essent (i,j) un element maximal de Δ_k. Anàlogament, si (i,j) és un element minimal de Δ_k ($D(i,j) = k$) llavors en el sistema apareixerà la inequació $x_k - x_i - x_j \leqslant 0$.

Exemple 3.4.11 *Considerem* $L_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *i sigui* D *la funció d'agregació disjuntiva sobre* L *determinada pels seus valors sobre* $\Delta = \{(i, j) \in L \times L\ ;\ 0 < i \leqslant j < 4\}$*:* $D(1, 1) = D(1, 2) = 2$*,* $D(1, 3) = D(2, 2) = D(2, 3) = 3$*,* $D(3, 3) = 4$*:*

D	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	2	3	4
2	2	2	3	3	4
3	3	3	3	4	4
4	4	4	4	4	4

En aquest cas tenim:
$N_1 = M_1 = \emptyset$
$N_2 = \{(1, 1)\}$, $M_2 = \{(1, 2)\}$
$N_3 = \{(1, 3), (2, 2)\}$, $M_3 = \{(2, 3)\}$
$N_4 = M_4 = \{(3, 3)\}$
i el corresponent sistema, d'acord amb 3.6 i una vegada eliminades les inequacions redundants, és:

$$
\begin{aligned}
&-x_1 < 0\\
&x_1 - x_2 < 0\\
&x_2 - x_3 < 0\\
&x_3 - x_4 < 0\\
&-x_3 + x_1 + x_2 < 0\\
&-x_4 + x_2 + x_3 < 0\\
&x_2 - 2x_1 \leqslant 0\\
&x_3 - 2x_2 \leqslant 0\\
&x_4 - 2x_3 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

on $f = (x_0 = 0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ *amb* $x_k = f(k)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Observem que $f = (0, 1, 2, 4, 7)$ n'és una solució. Així la disjunció D té $f = (0, 1, 2, 4, 7)$ com a generador additiu. Observem també que D no és associativa (no és una t–conorma): $D(D(3, 2), 2) = D(3, 2) = 3$ i $D(3, D(2, 2)) = D(3, 3) = 4$.

Anem cap enrere al sistema (3.6) que, per abreujar, el denotarem com

$$
\begin{aligned}
&\langle a_i, x\rangle < 0, \quad i = 1, \dots, p\\
&\langle a_i, x\rangle \leqslant 0, \quad i = p + 1, \dots, m
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

on $\langle x, y\rangle$ és el producte escalar ordinari dels vectors x i y de R^n, p és el nombre d'inequacions estrictes del sistema i $a_i, x \in R^n$ $\forall i = 1, \dots, m$ amb $n \leqslant p \leqslant m$.

Els casos extrems $n = p$ i $p = m$ poden donar-se, però no ambdós alhora. Si tenim el primer cas, $n = p$, vol dir que dels maximals de la disjunció no se n'extreu cap inequació; com que una disjunció sempre té maximals, llavors l'única possibilitat és que només el conjunt de maximals M_n sigui no buit, ja que aquests no esdevenen inequacions rellevants. Aquest és el cas de la t–conorma dràstica S_D, i el sistema d'inequacions és

$-x_1 < 0$
$x_1 - x_2 < 0$
$\dots$
$x_{n-1} - x_n < 0$
$x_n - 2x_1 \leqslant 0$
on $f = (x_0 = 0, n-1, n, \dots, , 2n-3, 2n-2)$ amb $x_k = f(k)$ n'és una solució.

En canvi, si és $p = m$, com que una disjunció té sempre elements minimals, llavors ha de ser que d'aquests se n'obtenguin inequacions trivials. Això és, N_1 no pot ser buit i per tant, $D(1,1) = 1$ (si fos N_1 buit llavors $D(1,1) = j > 1$ i s'obtendria la inequació no trivial $x_j - 2x_1 \leqslant 0$). Pel mateix raonament, $D(i,i) = i$ per a tot i, ja que si fos $D(i,i) = j > i$ per algun i llavors tendríem $x_j - 2x_i \leqslant 0$. Així doncs, D ha de tenir tots els elements idempotents: $D = S_M$. En aquest cas el sistema d'inequacions és:
$-x_1 < 0$
$x_1 - x_2 < 0$
$\dots$
$x_{n-1} - x_n < 0$
$-x_2 + 2x_1 < 0$
$-x_3 + 2x_2 < 0$
$\dots$
$-x_n + 2x_{n-1} < 0$
on $f = (x_0 = 0, 1, 3, 7, \dots, 2^{n-1} - 1, 2^n - 1)$ amb $x_k = f(k)$ n'és una solució.

Observació 3.4.12 *Del fet que $D(i,j) \geqslant \max\{i,j\}$, llavors quan N_k sigui no buit per algun k tendrem una inequació del tipus $x_k - x_i - x_j \leqslant 0$ per a determinats $i, j < k$ (si és $i = k$ o $j = k$ llavors la inequació resultant és redundant). Per tant els vectors $a_{p+1}, \dots, a_m$ sempre tendran la forma*

$$(\dots, -1, \dots, -1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

$$(\dots, -2, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

on el valor positiu 1 és en la posició k, i la resta són zeros o espais inexistents. Si les desigualtats s'ordenen de forma creixent en k, llavors els vectors $a_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})$ $i = p+1, \dots, m$ del sistema (3.7) compliran que per a cada i existirà un j_i, complint tots ells $1 \leqslant j_{p+1} \leqslant j_{p+2} \leqslant \dots \leqslant j_m \leqslant n$, de tal manera que $a_{j_i,i} = 1$ i $a_{j,i} = 0$ $\forall j > j_i$

Aquest fet s'utilitzarà en l'Observació 3.4.14.

La proposició següent és un resultat important per a aquest treball, ja que ens aporta una condició necessària i suficient per tal que el nostre sistema d'inequacions sigui compatible. Aquest resultat es troba a [32].

Proposició 3.4.13 *El sistema (3.7) és compatible si, i només si, qualsevol solució $(y_1, \dots, y_m)$ amb $y_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$ del sistema lineal homogeni $A^T y = 0$ satisfà que $y_1 = \dots = y_p = 0$, on A és la matriu real $m \times n$ les files de les quals són $a_1, \dots, a_m$.*

D'acord amb aquesta proposició, hem d'analitzar les solucions $(y_1, \dots, y_m)$ amb $y_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$, del sistema lineal homogeni $A^T y = 0$, on:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,m} \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_{2,n+1} & \dots & a_{2,m} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_{3,n+1} & \dots & a_{3,m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{4,n+1} & \dots & a_{4,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2,n+1} & \dots & a_{n-2,m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & a_{n-1,n+1} & \dots & a_{n-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

Però aquest sistema de rang n pot ser fàcilment resolt (començant per y_n i acabant per y_1) de la forma següent:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{1,n+1}y_{n+1} + a_{1,n+2}y_{n+2} + \dots + a_{1,m}y_m + \dots + \\ &\quad + a_{n,n+1}y_{n+1} + a_{n,n+2}y_{n+2} + \dots + a_{n,m}y_m \\ \dots &\quad \dots \\ y_{n-1} &= a_{n-1,n+1}y_{n+1} + a_{n-1,n+2}y_{n+2} + \dots + a_{n-1,m}y_m + \\ &\quad + a_{n,n+1}y_{n+1} + a_{n,n+2}y_{n+2} + \dots + a_{n,m}y_m \\ y_n &= a_{n,n+1}y_{n+1} + a_{n,n+2}y_{n+2} + \dots + a_{n,m}y_m \end{aligned} \tag{3.8}$$

amb $y_{n+1}, \dots, y_m \in R$

Així doncs, el sistema (3.7) té solució si, i només si, per a tota solució $(y_1, \dots, y_m)$ amb $y_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$ tenim que $y_1 = \dots = y_p = 0$.

Facem un canvi de notació. Si indicam $s_{i,j} = a_{i,j} + \dots + a_{n,j}$ per a cada $i = 1, \dots, n$ i $j = n+1, \dots, m$, i consideram els vectors $s_1, \dots, s_m \in R^{m-n}$ definits per:

$$\begin{aligned} s_1 &= (s_{1,n+1}, \dots, s_{1,m}) \\ s_2 &= (s_{2,n+1}, \dots, s_{2,m}) \\ \dots &\quad \dots \\ s_n &= (s_{n,n+1}, \dots, s_{n,m}) \\ s_{n+1} &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ s_{n+2} &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \dots &\quad \dots \\ s_p &= (0, \dots, 1, \dots, 0) \\ \dots &\quad \dots \\ s_m &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Llavors el sistema (3.7) és compatible si, i només si, les solucions $y^* = (y_{n+1}, \dots, y_m) \in R^{m-n}$ del sistema $\langle s_i, y^* \rangle \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} s_{1,n+1}y_{n+1} + \dots + s_{1,m}y_m &\geqslant 0 \\ s_{2,n+1}y_{n+1} + \dots + s_{2,m}y_m &\geqslant 0 \\ \dots & \\ s_{n,n+1}y_{n+1} + \dots + s_{n,m}y_m &\geqslant 0 \\ y_{n+1} &\geqslant 0 \\ \dots & \\ y_p &\geqslant 0 \\ \dots & \\ y_m &\geqslant 0 \end{aligned}$$

es troben en la intersecció dels hiperplans $\langle s_i, y^* \rangle = 0$, $i = 1, \dots, p$.

Observació 3.4.14 *A partir de l'Observació 3.4.12 i tenint present la construcció dels vectors* $s_i = (s_{i,n+1}, \dots, s_{i,m})$, $i = 1, \dots, n$, *en podem seleccionar* r, *diguem-los* $s_{i_1}, \dots, s_{i_r}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_r < n$, *de tal manera que la matriu de les seves darreres* $m - p$ *coordenades tendria la forma següent:*

$$\begin{pmatrix}
1 & \dots & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & & \downarrow & & & & & & & & & & & & \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & \dots & & & \dots & & & \dots & & & \dots & & & \dots & & & \dots & \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & * & * & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & \downarrow & & & \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1
\end{pmatrix}$$

Això serà utilitzat en la prova de la Proposició 3.4.18.

Així podem establir la compatibilitat del sistema (3.7) com segueix.

Proposició 3.4.15 *El sistema (3.7) és compatible si, i només si, cada solució* $y^* \in R^{m-n}$ *del sistema* $\langle -s_i, y^* \rangle \leqslant 0$, $i = 1, \dots, m$ *és també una solució del sistema* $\langle s_i, y^* \rangle \leqslant 0$, $i = 1, \dots, p$

DEMOSTRACIÓ: En efecte, $\langle -s_i, y^* \rangle \leqslant 0$ és equivalent a $\langle s_i, y^* \rangle \geqslant 0$ i, en aquest cas, voler tenir $\langle s_i, y^* \rangle = 0$, $i = 1, \dots, p$ és el mateix que voler $\langle s_i, y^* \rangle \leqslant 0$ $\forall i = 1, \dots, p$.

Per tant, el que volem és que sempre que y^* satisfaci $\langle -s_i, y^* \rangle \leqslant 0$ llavors també satisfaci $\langle s_i, y^* \rangle \leqslant 0$, $i = 1, \dots, p$. D'acord amb la Proposició 3.4.9 podem establir quan és que una disjunció admet un generador additiu.

Proposició 3.4.16 *Sigui* D *una disjunció sobre* $L = \{0, 1, \dots, n\}$. *Aleshores* D *admet un generador additiu si, i només si,* $s_i \in \langle -s_1, \dots, -s_m \rangle_+$, $i = 1, \dots, p$.

Exemple 3.4.17 *Donada la disjunció* D *de l'exemple 3.4.11, on* $n = 4$, $p = 6$ *i* $m = 9$.

Els vectors a_i *són:*

$a_1 = (-1, 0, 0, 0)$

$a_2 = (1, -1, 0, 0)$

$a_3 = (0, 1, -1, 0)$

$a_4 = (0, 0, 1, -1)$

$a_5 = (1, 1, -1, 0)$

$a_6 = (0, 1, 1, -1)$

$a_7 = (-2, 1, 0, 0)$

$a_8 = (0, -2, 1, 0)$

$a_9 = (0, 0, -2, 1)$

Observau que els vectors es mostren d'acord amb l'Observació 3.4.12, de tal manera que per a a_7, a_8 *i* a_9 *tenim* $j_7 = 2$, $j_8 = 3$ *i* $j_9 = 4$ *que compleixen* $1 \leqslant j_7 \leqslant j_8 \leqslant j_9 \leqslant n$.

La matriu A^T *és*

$$A^T = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

i el sistema $A^T y = 0$, *on* $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9)$, *d'acord amb (3.8) té com a solucions*

$$y_1 = y_5 + y_6 - y_7 - y_8 - y_9$$
$$y_2 = y_6 + y_7 - y_8 - y_9$$
$$y_3 = -y_5 + y_8 - y_9$$
$$y_4 = -y_6 + y_9$$

Així, tal com es defineixen en (3.9), els vectors s_i, $i = 1, \dots, 6$, *són*

$$s_1 = (1, 1, -1, -1, -1)$$
$$s_2 = (0, 1, 1, -1, -1)$$
$$s_3 = (-1, 0, 0, 1, -1)$$
$$s_4 = (0, -1, 0, 0, 1)$$
$$s_5 = (1, 0, 0, 0, 0)$$
$$s_6 = (0, 1, 0, 0, 0)$$

i els vectors $-s_i$, $i = 1, \dots, 9$, *són*

$$-s_1 = (-1, -1, 1, 1, 1)$$
$$-s_2 = (0, -1, -1, 1, 1)$$
$$-s_3 = (1, 0, 0, -1, 1)$$
$$-s_4 = (0, 1, 0, 0, -1)$$
$$-s_5 = (-1, 0, 0, 0, 0)$$
$$-s_6 = (0, -1, 0, 0, 0)$$
$$-s_7 = (0, 0, -1, 0, 0)$$
$$-s_8 = (0, 0, 0, -1, 0)$$
$$-s_9 = (0, 0, 0, 0, -1)$$

En aquest cas, és possible veure que qualsevol vector s_i, $i = 1, \dots, 6$, *pot ser expressat com a combinació lineal no negativa dels* $-s_1, \dots, -s_9$:

$$s_1 = (-s_3) + (-s_4) + (-s_7) + (-s_9)$$
$$s_2 = (-s_1) + (-s_3) + 2(-s_4) + (-s_8) + (-s_9)$$
$$s_3 = (-s_1) + (-s_4) + (-s_7) + (-s_9)$$
$$s_4 = (-s_1) + (-s_3) + (-s_7) + (-s_9)$$

Finalment, refinarem la condició perquè una disjunció tengui o no generador additiu. Comencem amb la proposició següent.

Proposició 3.4.18 *Sigui* D *una disjunció sobre* $L = \{0, 1, \dots, n\}$. *Llavors* D *és additivament generable si, i només si,* $\langle -s_1, \dots, -s_m \rangle_+ = R^{m-n}$

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $\langle -s_1, \dots, -s_m \rangle_+ = R^{m-n}$, llavors per la Proposició 3.4.16 deduïm que D té algun generador additiu.

Recíprocament, si D és additivament generable, vegem que $\langle -s_1, \dots, -s_m \rangle_+ = R^{m-n}$ o, el que és el mateix, $\langle -s_1, \dots, -s_m \rangle_+^o = \{0\}$. Agafem $x = (\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_m) \in R^{m-n}$

un vector de $\langle -s_1, \ldots, -s_m \rangle_+^o$. Per la Proposició 3.4.8 tenim que $\langle x, -s_i \rangle \leqslant 0\ \forall i = 1, \ldots, m$. En particular $\langle x, -s_i \rangle \leqslant 0\ \forall i = n+1, \ldots, m$ i, per tant, $\lambda_i \geqslant 0$, $\forall i = n+1, \ldots, m$ (ja que $-\lambda_i = \langle x, -s_i \rangle\ \forall i = n+1, \ldots, m$).

D'altra banda, per la Proposició 3.4.16 sabem que $s_i \in \langle -s_1, \ldots, -s_m \rangle_+$ $i = 1, \ldots, p$. Aleshores, en primer lloc tenim $\langle x, s_i \rangle \leqslant 0$, $i = n+1, \ldots, p$ (Proposició 3.4.9) cosa que obliga que $\lambda_i \leqslant 0\ \forall i = n+1, \ldots, p$ (ja que $\langle x, s_i \rangle = \lambda_i$) i, per tant, $\lambda_i = 0\ \forall i = n+1, \ldots, p$. I en darrer lloc, de forma similar tenim que $\langle x, s_i \rangle \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ (Proposició 3.4.9) obliga que $\lambda_i \leqslant 0\ \forall i = 1, \ldots, n$ (Observació 3.4.14) i, per tant, $\lambda_i = 0\ \forall i = n+1, \ldots, p$.

En conclusió, $x = (0, 0, \ldots, 0)$ i, per tant, $\langle -s_1, \ldots, -s_m \rangle_+^o = \{0\}$. □

Però observem que aquesta condició darrera pot ser refinada una mica més.

Observació 3.4.19 *Observem que*

$$\langle -s_1, \ldots, -s_m \rangle_+ = -\langle s_1, \ldots, s_m \rangle_+ .$$

Per tant $\langle -s_1, \ldots, -s_m \rangle_+ = R^{m-n}$ *si, i només si,* $\langle s_1, \ldots, s_m \rangle_+ = R^{m-n}$.

Així, si tenim un mètode per obtenir els generadors del dual del con $\langle s_1, \ldots, s_m \rangle_+$, també tendrem un mètode per a decidir quan una funció d'agregació disjuntiva és additivament generable o no. Amb aquest objectiu, farem ús de l'algorisme Γ, que sequencialment obté el dual del con generat per $\{s_1, \ldots, s_h\} \subset R^{m-n}$, $h = 1, 2, \ldots$. Es poden trobar tots els detalls de l'algorisme Γ en [10, 9].

3.4.3 *L'algorisme*

Donada una disjunció D podem saber quan pot ser additivament generada i, en aquest cas, podem obtenir un generador additiu enter ($\mathrm{Ran}\ f \subset Z^+$) de D. Les passes d'aquest procediment són:

1. A partir de D, es determinen els conjunts N_k i M_k dels elements minimals i maximals, respectivament, i es calculen els vectors $\{s_1, \ldots, s_p, \ldots, s_m\}$ tal com es descriu en aquesta secció.

2. Aplicant l'algorisme Γ als vectors $\{s_1, \ldots, s_m\}$ s'obtenen els generadors del con dual, $\langle s_1, \ldots, s_m \rangle_+^o$.

3. D'acord amb la Proposició 3.4.18 i l'Observació 3.4.19, comprovam si el con dual és el subconjunt format únicament pel vector zero ($\langle s_1, \ldots, s_m \rangle_+ = R^{m-n}$) o no. En cas afirmatiu, continuam per la passa següent; en cas contrari mostrem el missatge "D no és additivament generable." i s'acaba el procediment.

4. Començant per $(0, 1, 2, \ldots, n)$, fem $x_n = n$ i provam si és un generador de D d'acord amb la Definició 3.1.7 (ho serà només si $D = S_{\mathcal{L}}$). En cas que no ho sigui, incrementam en una unitat x_n i anem provant totes les possibilitats $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ amb $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$, comprovant cada vegada si la nova llista obtinguda és el generador de D, novament d'acord amb la Definició 3.1.7. Si cap d'aquestes és la bona, incrementam una altra vegada x_n i seguim. El programa acaba mostrant un generador additiu enter de D.

Observem que la passa 4. sempre acaba perquè la passa anterior ens assegura que D és additivament generable i la Proposició 3.2.3 ens diu que tota disjunció amb generador additiu en té algun d'enter.

3.5 exemples de t–conormes generables i no generables

A continuació es mostren exemples de t–conormes additivament generables amb un generador cadascuna, i algunes que no ho són. Per aquestes darreres, es mostra que el sistema d'inequacions que s'extreu del conjunt de minimals i maximals és incompatible.

Proposició 3.5.1 *Tota t–conorma sobre L_n amb $n \leqslant 7$ té generador additiu. En el cas $n = 8$ hi ha exactament 3 t–conormes sense generador additiu que són les que es mostren a continuació (vegi's la taula 1).*

S_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	5	6	6	8	8	8	8
2	2	5	5	7	8	8	8	8	8
3	3	6	7	7	8	8	8	8	8
4	4	6	8	8	8	8	8	8	8
5	5	8	8	8	8	8	8	8	8
6	6	8	8	8	8	8	8	8	8
7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

S_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	5	5	5	7	8	8	8	8
2	2	5	6	6	7	8	8	8	8
3	3	5	6	8	8	8	8	8	8
4	4	7	7	8	8	8	8	8	8
5	5	8	8	8	8	8	8	8	8
6	6	8	8	8	8	8	8	8	8
7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

S_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	5	5	6	6	8	8	8	8
2	2	5	5	7	8	8	8	8	8
3	3	6	7	7	8	8	8	8	8
4	4	6	8	8	8	8	8	8	8
5	5	8	8	8	8	8	8	8	8
6	6	8	8	8	8	8	8	8	8
7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Taula 1. Les tres t–conormes sobre L_8 sense generador additiu

En la t–conorma S_1, un generador $(0, a, b, c, d, e, f, g, h)$ hauria de satisfer, a més de $0 < a < b < c < d < e < f < g < h$, les condicions següents, extretes dels minimals i maximals de les regions k de la taula:

$S(1,1) = 4 \longrightarrow d \leqslant 2a < e$
$S(1,2) = 5 \longrightarrow e \leqslant a + b$
$S(2,2) = 5 \longrightarrow 2b < f$
$S(1,3) = 6 \longrightarrow f \leqslant a + c$
$S(1,4) = 6 \longrightarrow a + d < g$
$S(2,3) = 7 \longrightarrow g \leqslant b + c$
$S(3,3) = 7 \longrightarrow 2c < h$
$S(1,5) = 8 \longrightarrow h \leqslant a + e$
$S(2,4) = 8 \longrightarrow h \leqslant b + d$

D'aquí, $a + b + h > a + b + 2c \geqslant f + g > a + 2b + d$, d'on tenim que $h > b + d$, que contradiu la darrera condició abans establerta.

Per altra banda, en la t–conorma S_2, un generador $(0, a, b, c, d, e, f, g, h)$ amb $0 < a < b < c < d < e < f < g < h$ hauria de satisfer les condicions següents, entre d'altres:

$S(1,3) = 5 \longrightarrow a + c < f$
$S(2,2) = 6 \longrightarrow 2b \geqslant f$
$S(2,3) = 6 \longrightarrow b + c < g$
$S(1,4) = 7 \longrightarrow a + d \geqslant g$
$S(2,4) = 7 \longrightarrow b + d < h$
$S(3,3) = 8 \longrightarrow 2c \geqslant h$

D'aquí, $a + b + h > a + 2b + d \geqslant f + g > a + b + 2c$, d'on tenim que $h > 2c$, que contradiu $2c \geqslant h$.

Finalment, un generador per a la t–conorma S_3 és $(0, a, b, c, d, e, f, g, h)$ de tal manera que $0 < a < b < c < d < e < f < g < h$ i també:
$S(2,2) = 5 \longrightarrow 2b < f$
$S(1,3) = 6 \longrightarrow a + c \geqslant f$
$S(1,4) = 6 \longrightarrow a + d < g$
$S(2,3) = 7 \longrightarrow b + c \geqslant g$
$S(3,3) = 7 \longrightarrow 2c < h$
$S(2,4) = 8 \longrightarrow b + d \geqslant h$
D'aquí, $a + b + h > a + b + 2c \geqslant f + g > a + 2b + d$, d'on tenim que $h > b + d$, que contradiu $b + d \geqslant h$, la darrera condició establerta.

Aquí teniu les 22 t–conormes sobre L_4 que hi ha, cadascuna amb un generador seu:

S_M	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	2	3	4
3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 3, 7, 15)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	2	3	4
3	3	3	3	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 3, 7, 11)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	2	4	4
3	3	3	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 3, 7, 9)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	3	3	4
3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 3, 5, 11)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	3	4	4
3	3	3	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 3, 5, 7)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	4	4	4
3	3	3	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 4, 6, 8)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	4	4
2	2	2	2	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 3, 7, 8)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	4	4
2	2	2	4	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 3, 5, 6)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	3	3	4
2	2	3	3	3	4
3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 3, 4, 9)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	3	3	4
2	2	3	4	4	4
3	3	3	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 3, 4, 6)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	4	4	4
2	2	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 2, 5, 6, 7)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	2	3	4
2	2	2	2	3	4
3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 2, 5, 11)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	2	3	4
2	2	2	2	3	4
3	3	3	3	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 2, 5, 8)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	2	4	4
2	2	2	2	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 2, 5, 6)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	3	4
2	2	3	3	3	4
3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 2, 3, 7)$

$S_Ł$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	4
2	2	3	4	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 1, 2, 3, 4)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	4	4	4
2	2	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 2, 4, 5, 6)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	3	3	3	4
2	2	3	3	3	4
3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 2, 3, 4, 9)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	3	3	4	4
2	2	3	3	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 3, 4, 6, 9)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	3	3	4	4
2	2	3	4	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 2, 3, 4, 6)$

S	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	3	4	4	4
2	2	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 2, 3, 4, 5)$

S_D	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	4	4	4	4
2	2	4	4	4	4
3	3	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

$f = (0, 3, 4, 5, 6)$

Taula 2. Les 22 t–conormes sobre L_4 són additivament generables

3.6 CÒPULES

Les còpules són funcions que permeten expressar una funció de distribució n-dimensional en termes de les seves funcions de distribució marginals (unidimensionals). En el cas bidimensional: Si H és una funció de distribució amb distribucions marginals F i G, aleshores existeix una còpula $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ de manera que $H(x,y) = C\big(F(x), G(y)\big)$. Recíprocament, si C és una còpula i F i G són funcions de distribució unidimensionals, aleshores la funció H definida per $H(x,y) = C\big(F(x), G(y)\big)$ és una funció de distribució amb marginals F i G. A partir d'aquest resultat [35] la teoria de còpules ha esdevingut important en el món de les probabilitats i l'estadística. Utilitzant la mateixa axiomàtica, s'ha desenvolupat la versió discreta de la teoria de còpules [23] amb resultats que mostren, com en el cas $[0,1]$, el caràcter conjuntiu de les còpules commutatives. Es pot trobar informació completa sobre còpules amb domini continu en [30].

Definició 3.6.1 *Una funció* $C : L \times L \to L$ *és una còpula sobre* L *si satisfà les condicions següents:*

(Cop 1) $C(i,0) = C(0,i) = 0 \quad \forall i \in L$

(Cop 2) $C(i,n) = C(n,i) = i \quad \forall i \in L$

(Cop 3) $C(i,j) + C(i',j') \geqslant C(i,j') + C(i',j)$ *si* $i \leqslant i'$ $, j \leqslant j'$

Exemple 3.6.2

1. *Les t–normes* T_M *i* $T_Ł$ *són còpules associatives i commutatives sobre* $L = \{0, 1, \ldots, n\}$.

2. *La funció* C *definida sobre* $L = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *per*

$$C(i,j) = \begin{cases} T_Ł(i,j) & si\ (i,j) \neq (2,3) \\ 1 & si\ (i,j) = (2,3) \end{cases}$$

C	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	2
3	0	0	1	1	2	3
4	0	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

és una còpula sobre L *que no és t–norma (no és commutativa).*

Igual que en les disjuncions i les conjuncions, les còpules satisfan una sèrie de propietats bàsiques.

Proposició 3.6.3 *Sigui* C *una còpula sobre* L*. Llavors se satisfà que:*

1. $T_Ł(i,j) \leqslant C(i,j) \leqslant T_M(i,j)$. *Així doncs, les t–normes de Łukasiewicz i mínim són la menor i la major de les còpules sobre* L*, respectivament.*

2. C *és creixent en cada variable.*

3. C *satisfà la condició de Lipschitz amb constant* 1 *(vegi's 2.3.3). Per tant, les còpules discretes són totes suaus:* $\forall i,j \in L$, $C(i+1,j) - C(i,j) \leqslant 1$ *si* $i < n$, *i* $C(i,j+1) - C(i,j) \leqslant 1$ *si* $j < n$.

4. *L'única còpula que satisfà* $C(i,i) = i$ *per a tot* $i \in L$ *és la t–norma* T_M.

5. *L'única còpula que satisfà* $C(i, n-i) = 0$ *(o* $C(n-i, i) = 0$*) per a tot* $i \in L$ *és la t–norma* $T_Ł$.

6. *Les còpules commutatives són conjuncions.*

El següent resultat situa les t–normes suaus com a subclasse de les còpules.

Proposició 3.6.4 *Les t–normes suaus són les còpules associatives.*

Com a conseqüència d'això tenim que les còpules associatives són commutatives, així com el resultat següent.

Proposició 3.6.5 *Les còpules associatives són additivament genenerables.*

Es pot veure totes aquestes relacions entre els diferents tipus de còpules a la Figura 8.

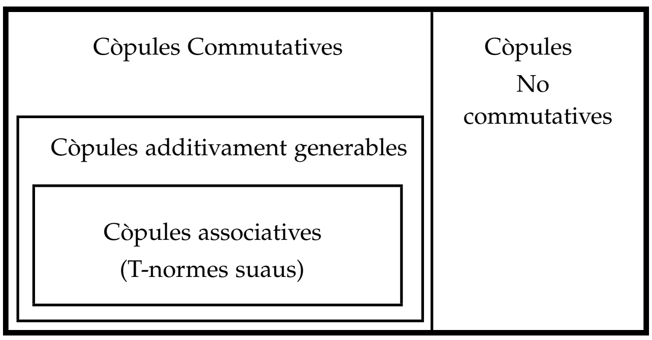


Figura 8. Classificació de les còpules discretes

D'altra banda, el nombre de còpules associatives (i commutatives) sobre L_n és 2^{n-1}, tantes com t–normes suaus sobre L_n hi ha. En canvi, el nombre total de còpules commutatives és

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^p(n-2p)!p!}.$$

Així, per a $n = 1,2,3,4,5$ tenim $1,2,4,10,26$ còpules commutatives.

Les còpules commutatives discretes són conjuncions sobre L_n. Les còpules sobre L_4 són additivament generables; es pot veure el llistat d'aquestes 10 còpules juntament amb el seu generador additiu a la Taula 4. En canvi, per $n \geqslant 5$, hi ha còpules commutatives que no són additivament generables. La demostració dels dos resultats que ara segueixen s'ha fet aplicant l'algorisme descrit en aquest capítol.

Proposició 3.6.6 *Totes les còpules commutatives sobre L_4 són additivament generables.*

Proposició 3.6.7 *Les conjuncions C i C' que es mostren a la Taula 3 són les úniques còpules commutatives sobre L_5, d'un total de 26, que no admeten generador additiu. Hi ha, per tant, 24 còpules commutatives sobre L_5 additivament generables.*

Demostració: Si $f = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ amb $a_5 = 0$ fos un generador additiu de C, aplicant la Proposició 3.1.15 tendrem, entre d'altres, les desigualtats següents:
$C(1,4) = 0 \longrightarrow a_1 + a_4 \geqslant a_0$
$C(2,2) = 1 \longrightarrow 2a_2 < a_0$
$C(2,4) = 1 \longrightarrow a_2 + a_4 \geqslant a_1$
$C(4,4) = 3 \longrightarrow 2a_4 < a_2$

Per tant, hauria de ser $a_0 \leqslant a_1 + a_4 \leqslant a_2 + 2a_4 < 2a_2 < a_0$, fet que és impossible.

La demostració és idèntica per a C', ja que se'n poden extreure les mateixes desigualtats, i arribar a contradicció de la mateixa manera.

C	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	1	2
3	0	0	1	1	2	3
4	0	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

C'	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	1	2
3	0	0	1	2	2	3
4	0	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

Taula 3. Les 2 còpules commutatives sobre L_5 que no admeten generador additiu

T_M	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

$f = (15,7,3,1,0)$

C_2	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

$f = (11,7,3,1,0)$

C_3	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

$f = (7,5,3,1,0)$

C_4	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	1	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

$f = (11,5,3,1,0)$

C_5	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
2	0	0	1	1	2
3	0	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4

$f = (7, 5, 3, 2, 0)$

C_6	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	1	1	2
3	0	1	1	2	3
4	0	1	2	3	4

$f = (7, 3, 2, 1, 0)$

C_7	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	2	3
4	0	1	2	3	4

$f = (11, 5, 2, 1, 0)$

C_8	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
2	0	1	2	2	2
3	0	1	2	2	3
4	0	1	2	3	4

$f = (8, 5, 2, 1, 0)$

C_9	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	2
3	0	1	1	2	3
4	0	1	2	3	4

$f = (8, 5, 4, 2, 0)$

$T_Ł$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	2
3	0	0	1	2	3
4	0	1	2	3	4

$f = (4, 3, 2, 1, 0)$

Taula 4. Les 10 còpules commutatives sobre L_4 són additivament generables

A continuació, a la Taula 5 es mostren les 24 còpules commutatives sobre L_5 que són additivament generables.

T_M	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (31, 15, 7, 3, 1, 0)$

C_2	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (23, 15, 7, 3, 1, 0)$

C_3	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
2	0	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (15, 11, 7, 3, 1, 0)$

C_4	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (23, 11, 7, 3, 1, 0)$

C_5	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	1	2	2
3	0	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (11, 8, 5, 3, 1, 0)$

C_6	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (15, 7, 5, 3, 1, 0)$

C_7	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	2	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (23, 11, 5, 3, 1, 0)$

C_8	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	2	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (17, 11, 5, 3, 1, 0)$

C_9	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	2	2
3	0	1	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (12, 8, 6, 3, 1, 0)$

C_{10}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	2	2
3	0	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (9, 7, 5, 3, 1, 0)$

C_{11}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2
3	0	1	1	2	2	3
4	0	1	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (15, 7, 5, 3, 2, 0)$

C_{12}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	2	2	3
4	0	1	2	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (15, 7, 3, 2, 1, 0)$

C_{13}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	2	2	3
4	0	1	2	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (11, 7, 3, 2, 1, 0)$

C_{14}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1	2
3	0	1	1	2	2	3
4	0	1	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (14, 9, 7, 4, 3, 0)$

C_{15}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1	2
3	0	0	1	2	2	3
4	0	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (9, 7, 5, 3, 2, 0)$

C_{16}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	2	3	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (23, 11, 5, 2, 1, 0)$

C_{17}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	2	3	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (17, 11, 5, 2, 1, 0)$

C_{18}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	1	2
3	0	0	0	1	2	3
4	0	1	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (10, 7, 6, 4, 2, 0)$

$T_Ł$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	2
3	0	0	0	1	2	3
4	0	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (5, 4, 3, 2, 1, 0)$

C_{20}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
2	0	0	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	2	3	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (11, 8, 5, 2, 1, 0)$

C_{21}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	1	1	2	2
3	0	0	1	1	2	3
4	0	1	2	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (11, 8, 5, 4, 2, 0)$

C_{22}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3
4	0	1	2	3	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (17, 8, 5, 2, 1, 0)$

C_{23}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	2	2
3	0	1	1	1	2	3
4	0	1	2	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (17, 8, 5, 4, 2, 0)$

C_{24}	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2
3	0	1	1	1	2	3
4	0	1	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	5

$f = (9, 4, 3, 2, 1, 0)$

Taula 5. Les 24 còpules commutatives sobre L_5 additivament generables

4

GENERACIÓ ADDITIVA D'ALGUNES FAMÍLIES DE T–CONORMES DISCRETES

En el cas $[0,1]$ apareixen els dos fets següents:

FET 1 Si $f\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ és una funció estrictament creixent, contínua per l'esquerra en $x = 1$, amb $f(0) = 0$ de manera que $\operatorname{Ran} f + \operatorname{Ran} f \subset \operatorname{Ran} f \cup [f(1^-), +\infty]$, llavors

$$S(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) \ \forall x, y \in [0,1]$$

és una t–conorma arquimediana sobre $[0,1]$.

FET 2 S és una t–conorma arquimediana contínua sobre $[0,1]$ si, i només si, existeix una funció $f\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ estrictament creixent i contínua amb $f(0) = 0$ de manera que

$$S(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)).$$

En aquesta secció s'estudien les similituds entre el cas continu $[0,1]$ i el cas discret $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ quan s'utilitza la condició d'estabilitat $\operatorname{Ran} f + \operatorname{Ran} f \subset \operatorname{Ran} f \cup [f(1^-), +\infty]$ adaptada al cas finit.

En primer lloc, el FET 1 s'ajusta bé al cas discret. Això respon al problema d'Abel de determinar condicions suficients perquè un generador sigui associatiu.

Proposició 4.0.8 *Sigui* $f\colon L \to [0,+\infty)$ *una funció creixent amb* $f(0) = 0$ *de manera que* $\operatorname{Ran} f + \operatorname{Ran} f \subset \operatorname{Ran} f \cup [f(n), +\infty)$*, llavors la disjunció* $D(i,j) = f^{(-1)}(f(i) + f(j)) \ \ \forall i, j \in L$ *és associativa (és una t–conorma) i arquimediana.*

DEMOSTRACIÓ: S'observa en primer lloc que amb la propietat que satisfà Rang f, la Proposició 3.1.4 estableix que $f(f^{(-1)})(t) = f^{(-1)}(f(t)) = t$ sempre que $t \leqslant f(n)$.

Pel que fa a l'associativitat, $\forall i, j, k \in L$, la condició $D(i, D(j,k)) = D(D(i,j),k)$ és equivalent a $f^{(-1)}\big(f(i) + ff^{(-1)}(f(j) + f(k))\big) = f^{(-1)}\big(ff^{(-1)}(f(i) + f(j)) + f(k)\big)$.

Siguin $A^- = f(i) + ff^{(-1)}(f(j) + f(k))$ i $A^+ = ff^{(-1)}(f(i) + f(j)) + f(k)$, s'analitzen 4 casos en funció que A^- i A^+ siguin o no menors que $f(n)$.

1. $A^- < f(n)$ i $A^+ < f(n)$. Com que $A^- < f(n)$, $ff^{(-1)}(f(j) + f(k)) = f(j) + f(k)$ i, per tant, $D(i, D(j,k)) = f^{(-1)}(f(i) + f(j) + f(k))$. Igualment, com que $A^+ < f(n)$, $D(D(i,j),k) = f^{(-1)}(f(i) + f(j) + f(k))$.

2. $A^- < f(n)$ i $A^+ \geqslant f(n)$. Com que $A < f(n)$, $A^- = f(i) + f(j) + f(k) < f(n)$. D'altra banda, com que $A^+ \geqslant f(n)$, sorgeixen dues possibilitats:
   Possibilitat 2.1. $f(i) + f(j) \geqslant f(n)$, que no és possible.
   Possibilitat 2.2. $f(i) + f(j) < f(n)$, que llavors seria $A^+ = f(i) + f(j) + f(k) \geqslant f(n)$, que tampoc no pot ser.

3. $A^- \geqslant f(n)$ i $A^+ < f(n)$: igual que el cas anterior.

4. $A^- \geqslant f(n)$ i $A^+ \geqslant f(n)$. Com que $A^- \geqslant f(n)$ i $A^+ \geqslant f(n)$, llavors $D(i, D(j, k)) = 1$ i $D(D(i, j), k) = 1$.

Per acabar, si $i \in L$, $i < 1$, com que $D(i, i) = f^{(-1)}(2f(i)) = i$, llavors $2f(i) = f(i)$ i, per tant, $i = 0$. Per tot això, D és arquimediana. □

Definició 4.0.9 *Un conjunt finit* $A \subset \mathbb{N}$ *de nombres naturals és tancat per la suma quan* $A + A \subset A \cup [\max A, +\infty)$.

Així doncs, una condició suficient perquè la disjunció generada per f sigui una t–conorma és que $A = \text{Ran } f$ sigui tancat per la suma. Aquesta és una contribució a la segona línia de recerca, dedicada a la caracterització de generadors additius de t–conormes, que pot ser enunciada ara de la forma següent:

Sigui A *un subconjunt finit de nombres naturals tal que* $0 \in A$, *i sigui l'operació* $*\colon A \times A \to A$ *definida per*

$$x * y = \max\{z \in A : z \leqslant x + y\}. \tag{4.1}$$

Caracteritzar quins generadors additius f *sobre* L_n *generen t–conormes és equivalent a estudiar per a quins conjunts* A *esmentats abans el parell* $(A, *)$ *és un semigrup (l'operació* $*$ *és associativa sobre* A*).*

D'aquest problema, se'n mostraran diverses contribucions, a més de la que s'acaba d'establir sobre l'estabilitat de $\mathrm{Ran}\ f$ respecte de la suma. Per exemple, per a un tipus de generadors en concret, els convexos, s'ha obtingut una caracterizació dels que són associatius.

L'altra línia de recerca és, per diferents famílies de disjuncions discretes, caracteritzar aquelles que són additivament generables (amb el subproblema annex de caracterizar les t–conormes que ho són). Una primera contribució dins aquesta línia fa referència a què la suma ordinal és una construcció que conserva la propietat de ser additivament generable (la suma ordinal ho és si les disjuncions de partida ho són). També en aquest capítol es mostra un mètode de construcció de noves t–conormes que generalitza la suma ordinal i que en alguns casos manté la generació additiva. Una altra contribució és mostrar una sèrie de famílies de t–conormes additivament generables, les quals compleixen determinades propietats. La taula següent anticipa el tipus de t–conormes que s'estudien d'acord amb les seves propietats.

	Suau a L	Suau a L*	arquimediana	No arquimediana
S.O. $\langle S_1, S_2 \rangle$	S_1 i S_2 suaus	S_1 suau sobre L^* i S_2 suau	no	sempre
$[S : S_D]$	S suau i S_D sobre L_2	S suau L^* i S_D sobre L_2	no	sempre
$[S : S_M]$	S suau	S suau a L^*	no	sempre
$[S : S_L]$	no	no	no	sempre
S_k	S_{-1}, S_0	$k = -1, 0, \ldots, n-2$	$k \geqslant 0$	$k = -1$
$S^{\alpha}_{n,r}$	$\alpha = r = 1$ i $n = 2$	$\alpha = r = n - 1$	$\alpha > r, \forall n$	$\alpha = r, \forall n$

4.1 SUMA ORDINAL DE T–CONORMES

La suma ordinal de dues disjuncions és una nova disjunció obtinguda a partir de les altres dues. Es demostra que si les inicials tenen generador additiu llavors la nova disjunció també en té; a més, es mostra com es pot obtenir. Com a conseqüència d'això, la suma ordinal de dues t–conormes additivament generables és també additivament generable.

Així, a partir de les t–conormes que s'ha comprovat que són additivament generables (Proposició 3.5.1) i d'altres que es mostren en aquest capítol (família S_k i bivalents (BV_r^α), entre d'altres), se'n poden construir de noves usant aquest procediment.

Aquesta secció té un interès especial, ja que en el cas continu cap t–conorma no arquimediana és additivament generable. Les sumes ordinals de t–conormes, arquimedianes o no, són t–conormes noves no arquimedianes. No obstant això, en el cas discret aquestes tenen generador additiu si les primeres també en tenen.

La proposició següent mostra que la suma ordinal de dues disjuncions additivament generables també ho és.

Proposició 4.1.1 *Sigui* $f_1 = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ *un generador additiu de la disjunció* D_1 *sobre* $L_m = \{0, 1, \ldots, m\}$ *i sigui* $f_2 = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ *un generador additiu de la disjunció* D_2 *sobre* $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$*, amb* $a_0 = b_0 = 0$*, llavors*

$$f = (a_0, a_1, \ldots, a_m, (2a_m + 1)b_1, (2a_m + 1)b_2, \ldots, (2a_m + 1)b_n)$$

és un generador additiu de la disjunció suma ordinal de D_1 *i* D_2*.*

Demostració: Sigui D la suma ordinal de les disjuncions D_1 i D_2. De la Definició 2.2.6, n'hi ha prou a estudiar tres casos:

1. Si $0 \leqslant i, j \leqslant m$ llavors és $D(i, j) = D_1(i, j)$. D'altra banda,

$$\begin{aligned} D(i,j) &= f^{(-1)}(f(i) + f(j)) \\ &= f^{(-1)}(a_i + a_j) \\ &= f_1^{(-1)}(a_i + a_j) \\ &= f_1^{(-1)}(f_1(i) + f_1(j)) \\ &= D_1(i,j) \ , \end{aligned}$$

   i queda demostrat en aquest cas.

2. Si $m \leqslant i, j \leqslant m + n$ llavors és $D(i, j) = m + D_2(i - m, j - m)$. Pel que fa a la generació additiva,

$$\begin{aligned} D(i,j) &= f^{(-1)}(f(i) + f(j)) \\ &= f^{(-1)}((2a_m + 1)b_i + (2a_m + 1)b_j) \\ &= m + f_2^{(-1)}(b_i + b_j) \\ &= m + f_2^{(-1)}(f_2(i) + f_2(j)) \\ &= m + D_2(i - m, j - m) \ , \end{aligned}$$

   i queda demostrat també en aquest supòsit.

3. Finalment, si $0 \leqslant i \leqslant m \leqslant j \leqslant m + n$ llavors és $D(i, j) = j = \max\{i, j\}$, i també es compleix:

$$\begin{aligned} D(i,j) &= f^{(-1)}(f(i) + f(j)) \\ &= f^{(-1)}(a_i + (2a_m + 1)b_j) \\ &= j \ . \end{aligned}$$

Així doncs, la suma ordinal de t–conormes additivament generables és una nova t–conorma additivament generable.

D'acord amb el resultat anterior i la Proposició 2.3.5, tenim el resultat següent.

Proposició 4.1.2 *Qualsevol t–conorma suau sobre* L *és additivament generable.*

DEMOSTRACIÓ: Una t–conorma suau és suma ordinal de t–conormes de Łukasiewicz i aquestes són additivament generables, tal com s'estableix en la Proposició 3.1.10. □

A més, si S és una t–conorma suau sobre L_{n+m}, suma ordinal de dues t–conormes de Łukasiewicz S_1 i S_2 sobre L_m i L_n respectivament, llavors un generador seu serà:

$$f = \big(0, 1, \ \ldots \ , m, 2m+1, 2(2m+1), 3(2m+1), \ \ldots \ , n\cdot(2m+1)\big) \tag{4.2}$$

4.2 ANIDAMENT DE T–CONORMES

En aquesta secció introduirem un nou mètode per construir t–conormes. En [5] es fa una construcció semblant a la que ve a continuació, però per a còpules. Els continguts que mostram a continuació van ser objecte de la publicació [16].

Definició 4.2.1 *Donada una t–conorma* S_2 *sobre* $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ *i una altra t–conorma* S_1 *sobre* $\{r, r+1, \ldots, s\}$*, amb* $0 \leqslant r < s \leqslant n$*, es defineix una operació binària* S *sobre* L *de la manera següent:*

$$S(i,j) = \begin{cases} S_1(i,j) & \textit{si } r \leqslant i,j \leqslant s, \\ S_2(i,j) & \textit{altrament}. \end{cases} \tag{4.3}$$

L'operació S *és l'anidament (nesting) de* S_1 *dins* S_2 *(fixats* r *i* s*); es denota per* $S = [S_1, S_2]$*.*

Depenent dels valors de r i s, es distingeixen tres casos diferents, d'acord amb la Figura 9.

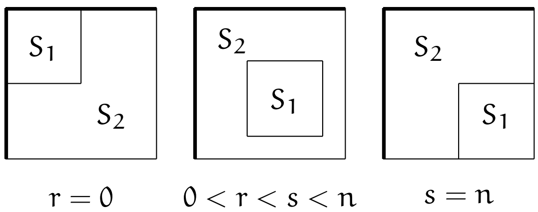


Figura 9. Els tres tipus diferents d'anidament

Per a qualssevol t–conormes S_1 i S_2, $S = [S_1, S_2]$ és commutativa amb 0 i n com a elements neutre i absorbent, respectivament. Interessa obtenir un nou mètode de construcció de t–conormes, per la qual cosa s'enuncia la proposició següent.

Proposició 4.2.2 *Siguin una t–conorma* S_2 *sobre* $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ *i una t–conorma* S_1 *sobre* $\{r, r+1, \ldots, s\}$ *amb* $0 \leqslant r < s \leqslant n$*, l'anidament* $S = [S_1, S_2]$ *és una t–conorma si, i només si, es donen les condicions següents (quan siguin aplicables):*

$$S_2(S_1(i,j), k) = S_2(S_2(i,j), k), \ \ \forall i,j,k : r \leqslant i,j \leqslant s < k, \tag{4.4}$$

$$S_2(i,j) = \max\{i,j\}, \ \ \forall i,j : i < r \leqslant j \leqslant s. \tag{4.5}$$

DEMOSTRACIÓ: 1. S és una t–conorma. En primer lloc, l'associativitat de S i l'associativitat de S_2 impliquen la condició (4.4). En segon lloc, per la monotonia de S i les condicions frontera de S_1 i S_2 es dóna que $S(0,j) \leqslant S(i,j) \leqslant S(r,j)$. Així, per a $i < r \leqslant j \leqslant s$, $j = S_2(0,j) \leqslant S_2(i,j) \leqslant S_1(r,j) = j$. Per tant, $S_2(i,j) = \max\{i,j\} = j$ i la condició (4.5) se satisfà.

2. La condició (4.5) implica que S és monòtona. L'associativitat de S es dedueix de les condicions (4.4) i (4.5). □

Observació 4.2.3

1. *En el cas $r = 0$, destaca que si $S_2(s,j) = \max\{s,j\}$ per a tot j, la condició (4.4) se satisfà trivialment. A més, $S = [S_1, S_2]$ és exactament la suma ordinal $\langle S_1, S_2' \rangle$, en la qual S_2' és la t–conorma sobre $\{0, 1, \ldots, n-s\}$ definida per $S_2'(i,j) = S_2(i+s, j+s) - s$.*

   D'altra banda, qualsevol suma ordinal de t–conormes $S = \langle S_1, S_2 \rangle$ és trivialment un anidament d'aquest tipus: $S = [S_1, S]$.

   És també interessant observar que, si $S = [S_1, S_2]$ és una t–conorma, aleshores és no arquimediana (s és un element idempotent no trivial de S). Recíprocament, si S és una t–conorma no arquimediana sobre $\{0, 1, \ldots, n\}$ amb s com a element idempotent no trivial, llavors S és l'anidament $[S_1, S]$, en el qual S_1 és la restricció de S a $\{0, 1, \ldots, s\}$. Així, la classe de les t–conormes no arquimedianes sobre $\{0, 1, \ldots, n\}$ és igual a la classe dels anidaments sobre el mateix domini que satisfan la condició (4.4).

2. *Si $0 < r < s < n$, la condició (4.5) fa que que la restricció de $S = [S_1, S_2]$ a $\{0, 1, \ldots, s\}^2$, $S|_{\{0,1,\ldots,s\}^2}$, sigui una t–conorma. Per tant, $S = [S|_{\{0,1,\ldots,s\}^2}, S_2]$ és un anidament del tipus anterior.*

3. *A partir de la condició (4.5), la t–conorma que resulta del cas $s = n$ és també una suma ordinal. És per això que poden ser interpretats com anidaments del primer tipus.*

D'ara en endavant, estudiarem només els anidaments del tipus $r = 0$, ja que, com s'ha vist, s'hi redueixen. A continuació s'estudia la generació additiva de S_1 i S_2 per als casos en què $[S_1, S_2]$ és additivament generable.

Proposició 4.2.4 *Siguin S_2 una t–conorma sobre $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ i S_1 una t–conorma sobre $\{0, \ldots, s\}$, amb $0 < s < n$. Si $S = [S_1, S_2]$ és una t–conorma additivament generable llavors S_1 també ho és.*

DEMOSTRACIÓ: Si $(a_0, a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_n)$ amb $a_0 = 0$ és un generador additiu de $S = [S_1, S_2]$, llavors $2a_s + 1 \leqslant a_{s+1}$ ja que $S(s,s) = s$. Així doncs, $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$ és un generador additiu de S_1. □

Segons aquesta proposició, si un anidament $S = [S_1, S_2]$ és una t–conorma i S_1 no és additivament generable, llavors S és una t–conorma no arquimediana no additivament generable. Més endavant es demostrarà que anidant en la t–conorma dràstica es poden construir t–conormes sobre L_n, $n \geqslant 9$, no arquimedianes i no additivament generables.

D'altra banda, del fet que un anidament $[S_1, S_2]$ sigui additivament generable no pot deduir-se que S_2 ho hagi de ser. En l'exemple següent es mostra l'anidament de la t–conorma S_D definida sobre L_4 en la t–conorma S_1 de la Taula 1, que no és additivament generable. Aquest anidament té generador additiu $(0, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20)$.

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	4	4	4	4	8	8	8	8
2	2	4	4	4	4	8	8	8	8
3	3	4	4	4	4	8	8	8	8
4	4	4	4	4	4	8	8	8	8
5	5	8	8	8	8	8	8	8	8
6	6	8	8	8	8	8	8	8	8
7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

$S = \langle(0, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20)\rangle$

Les subseccions que segueixen mostren com obtenir noves t–conormes per anidament dins les t–conormes màxim, dràstica i Łukasiewicz, així com l'existència de generador additiu de l'anidament quan la t–conorma anidada en té.

4.2.1 *Anidament en la t–conorma màxim*

Tal com es diu en l'Observació 4.2.3 (1), els anidaments dins la t–conorma màxim són exactament les sumes ordinals.

Proposició 4.2.5 *Sigui S_1 una t–conorma definida sobre $\{0, 1, \ldots, s\}$ i S_M la t–conorma màxim definida sobre $\{0, 1, \ldots, n\}$, $s < n$, i sigui S'_M la t–conorma màxim sobre $\{0, 1, \ldots, n - s\}$. Llavors $[S_1, S_M]$ és una t–conorma que satisfà $[S_1, S_M] = \langle S_1, S'_M\rangle$.*

Així doncs, anidant una t–conorma S_1 dins la t–conorma màxim, obtenim una nova t–conorma additivament generable si S_1 també ho és.

4.2.2 *Anidament en la t–conorma dràstica*

Els anidaments en la t–conorma dràstica tenen la forma de la Figura 10. L'existència d'un generador additiu per a un anidament d'aquest tipus depèn que la t–conorma anidada en tengui.

Proposició 4.2.6 *L'anidament $[S_1, S_D]$ d'una t–conorma S_1 dins la t-conorma dràstica S_D és una t–conorma (Figura 10). És més, si $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$ amb $a_0 = 0$ és un generador additiu de S_1, aleshores $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ és un generador additiu de $[S_1, S_D]$, en el qual:*

- $b_m = (n - s)a_m \qquad m = 0, \ldots, s$
- $b_m = 2b_s + m - s \quad m = s + 1, \ldots, n$

DEMOSTRACIÓ: Com que els b_m, $m = 1, \ldots, s$, són múltiples dels a_i i $b_{s+1} = 2b_s + 1$ (b_s és idempotent), només es necessita provar que $b_1 + b_{s+1} \geqslant b_n$. En efecte,

$$b_1 + b_{s+1} = (n - s)a_1 + 2b_s + 1 > 2b_s + n - s = b_n.$$

En els casos trivials, $[S_1, S_D]$ és una t–conorma no arquimediana que no és suma ordinal. A més, aquesta construcció pot ser iterada. Així es poden considerar

$$[S_1, S_D], \quad [[S_1, S_D], S_D], \quad \ldots, \quad [\ldots[[S_1, S_D], S_D], \ldots, S_D],$$

i s'obtenen noves t–conormes additivament generables (si S_1 també ho és).

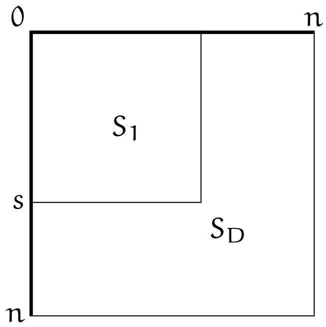


Figura 10. L'anidament $[S_1, S_D]$

4.2.3 *Anidament en la t–conorma Łukasiewicz*

L'anidament en la t–conorma de Łukasiewicz és diferent dels altres dos ja estudiats. Aquí S_1 ha de satisfer algunes condicions per tal que l'anidament sigui una t–conorma.

Proposició 4.2.7 *Siguin* S_1 *una t–conorma sobre* $\{0, 1, \ldots, s\}$ *i* $S_Ł$ *la t–conorma de Łukasiewicz sobre* $\{0, 1, \ldots, n\}$*, amb* $s < n$*. L'anidament* $[S_1, S_Ł]$ *és una t–conorma si, i només si, se satisfan les condicions següents:*

1. $s > \frac{n-2}{2}$,
2. $S_1(i, j) = i + j$ *si* $i + j < n - s - 1$,
3. $S_1(i, j) \geqslant n - s - 1$ *si* $i + j \geqslant n - s - 1$.

Aquestes condicions es reflecteixen en la Figura 11.

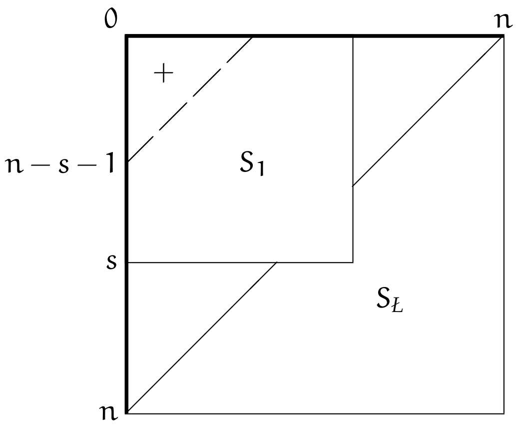


Figura 11. Les condicions de la Proposició 4.2.7

Demostració: Per començar, la condició (4.4) pot ser escrita com

$$\min\{S_1(i, j) + k, n\} = \min\{i + j + k, n\} \;\; \forall i, j \leqslant s, \; \forall k > s \tag{4.6}$$

En el cas que $[S_1, S_Ł]$ sigui una t–conorma, quan es pren $i = s$, $j = 1$ i $k = s + 1$, aquesta condició és

$$\min\{S_1(s, 1) + s + 1, n\} = \min\{2s + 2, n\}.$$

1. Si $s < \frac{n-2}{2}$, aleshores $S_1(s,1)+s+1 = 2s+2$, la qual cosa és una contradicció, perquè $S_1(s,1) = s$. I si $s = \frac{n-2}{2}$, llavors $S_1(s,1)+s+1 \geqslant n$. Així $S_1(s,1) \geqslant n-s-1 = s+1$ la qual cosa és novament una contradicció. Conseqüentment, $s > \frac{n-2}{2}$.

2. Si $k = s+1$, si $i+j+s+1 < n$, aleshores, a partir de (4.6), tenim $S_1(i,j)+s+1 = i+j+s+1$ i, per tant, $S_1(i,j) = i+j$ per a tot i,j de manera que $i+j < n-s-1$.

3. Si $k = s+1$ i i,j de manera que $i+j+s+1 = n$, la condició (4.6) implica $S_1(i,j)+s+1 \geqslant n$ i, conseqüentment, $S_1(i,j) \geqslant n-s-1$ per a tot i,j amb $i+j = n-s-1$; finalment, per monotonia, es té (3).

Recíprocament, si (1), (2) i (3) se satisfan, i es prenen $i,j \leqslant s$ i $k > s$, llavors:

- Si $i+j+k < n$ llavors $i+j+s+1 < n$ i també $i+j < n-s-1$. Per tant, de (2) es dedueix $S_1(i,j) = i+j$ i la condició (4.6) se satisfà.

- Si $i+j+k \geqslant n$, s'ha de provar $S_1(i,j)+k \geqslant n$. Si $i+j < n-s-1$ aleshores

  $$S_1(i,j)+k = i+j+k \geqslant n$$

  i, si $i+j \geqslant n-s-1$,

  $$S_1(i,j)+k \geqslant n-s-1+s+1 = n$$

  i la condició (4.6) se satisfà. □

La proposició següent mostra com es pot obtenir un generador additiu de $[S_1, S_Ł]$ a partir d'un de S_1.

Proposició 4.2.8 *Sigui S_1 una t–conorma sobre L_s amb generador additiu $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$ amb $a_0 = 0$, llavors $(b_0, b_1, \ldots, b_s, b_{s+1} \ldots, b_n)$ és un generador additiu de $[S_1, S_Ł]$, en el qual:*

- $b_m = a_m \qquad m = 1, \ldots, s$
- $b_{s+1} = 2a_s + 1$
- $b_m = 2a_s + 2 + a_{m-s-2} \qquad m = s+2, \ldots, n$

Demostració: Com que $b_m = a_m$, $m = 0, \ldots, s$, i d'acord amb el punt (2) de la Proposició 3.1.9, només s'ha de provar que

$$b_i * b_j = b_{\min\{i+j,n\}}, \quad \forall\, i,j : \; 0 \leqslant i \leqslant s < j \leqslant n, \tag{4.7}$$

on $*$ és l'operació binària considerada en (4.1).

Per començar, $b_i * b_j = b_{i+j}$ $\forall i,j \leqslant n-s-2$ de manera que $i+j \leqslant n-s-2$, perquè S_1 satisfà les condicions descrites a dalt. Això vol dir que $b_{i+j} \leqslant b_i + b_j < b_{i+j+1}$ $\forall i,j \leqslant n-s-2$ de manera que $i+j \leqslant n-s-2$.

Hem d'estudiar els tres casos següents:

1. En primer lloc, $b_i * b_{s+1} = b_{i+s+1}$ sempre que $1 \leqslant i \leqslant n-s-2$. En efecte, $b_1 * b_{s+1} = b_{s+2}$ perquè $2a_s + 2 \leqslant a_1 + 2a_s + 1 < 2a_s + 2 + a_1$, i, per tant, $b_{s+2} \leqslant b_1 + b_{s+1} < b_{s+3}$. Si es pren $i \geqslant 2$ tenim que $2a_s + 2 + a_{i-1} \leqslant a_i + 2a_s + 1 < 2a_s + 2 + a_i$. És a dir $b_{s+i+1} \leqslant b_i + b_{s+1} < b_{s+i+2}$. Aleshores, $b_i * b_{s+1} = b_{s+i+1}$ i la condició (4.7) se satisfà.

2. Si $n-s-1 \leqslant i \leqslant s$, llavors $b_i + b_{s+1} \geqslant b_{n-s-1} + b_{s+1} = 2a_s + 1 + a_{n-s-1} \geqslant 2a_s + 2 + a_{n-s-2} = b_n$. Per tant, $b_i * b_{s+1} = b_n$ i la condició (4.7) se satisfà.

3. Finalment, per veure que $b_i * b_{s+p} = b_{\min\{s+i+p,n\}}$, $p \geqslant 2$, es tracten dos subcasos:
   - Si $i+p-2 \leqslant n-s-2$, és a dir $i+s+p \leqslant n$, llavors $a_{i+p-2} \leqslant a_i + a_{p-2} < a_{i+p-1}$. Conseqüentment, $2a_s + 2 + a_{i+p-2} \leqslant a_i + 2a_s + 2 + a_{p-2} < 2a_s + 2 + a_{i+p-1}$ i $b_i * b_{s+p} = b_{i+s+p}$.
   - I si $i+p-2 \geqslant n-s-1$, és a dir $i+s+p \geqslant n+1$, llavors $a_i + a_{p-2} > a_i + a_{n-s-i-2} = a_{n-s-2}$. Conseqüentment, $2a_s + 2 + a_{n-s-2} < a_i + 2a_s + 2 + a_{p-2}$ i $b_i * b_{s+p} = b_n$.

   En ambdós casos la condició (4.7) també se satisfà. □

4.3 T-CONORMES SUAUS I ESTRICTAMENT CREIXENTS EN L^* (FAMÍLIA S_k)

Tal i com es comenta a l'inici d'aquest capítol, una condició suficient perquè la disjunció generada per f sigui una t–conorma és que el conjunt $A = \text{Ran } f$ sigui tancat per la suma. En aquest sentit abans hem demostrat que si un conjunt A és tancat per la suma llavors l'operació $*$ definida sobre A en 4.1 és associativa sobre A. Anem a mostrar una família de t–conormes que el rang del seu generador satisfà aquesta propietat.

Agafem generadors formats per termes consecutius d'una progressió aritmètica llevat del primer element, que serà sempre zero.

- $f_0 = (0, d, 2d, \ldots, nd)$.
- $f_1 = (0, 2d, 3d, \ldots, (n+1)d)$.
  $\vdots$
- $f_k = (0, (k+1)d, (k+2)d, \ldots, (k+n)d)$ amb $0 \leqslant k \leqslant n-2$.
  $\vdots$
- $f_{n-2} = (0, (n-1)d, (k+2)d, \ldots, (2n-2)d)$ amb $0 \leqslant k \leqslant n-2$.

Observem que tots ells tenen $n+1$ elements i són tancats per la suma. Observem a més que f_0 és un generador de la t–conorma de Łukasiewicz i f_{n-2} és un generador de la t–conorma dràstica (Exemple 3.1.10 i Proposició 3.2.2). Anem a veure com són les t–conormes que resulten d'aquests generadors.

Definició 4.3.1 *Donat $n \geqslant 2$, considerem la classe de funcions d'agregació definides sobre $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ de la manera següent:*

$$S_k(i,j) = \min\{i+j+k, n\} \tag{4.8}$$

on $k = 0, 1, \ldots, n-2$.

Aquestes operacions binàries són t–conormes sobre L.

Proposició 4.3.2 *S_k és una t–conorma sobre L, per a tot $0 \leqslant k \leqslant n-2$.*

Exemple 4.3.3

1. *S_0 i S_{n-2} són, respectivament, les t–conormes de Łukasiewicz i la dràstica.*

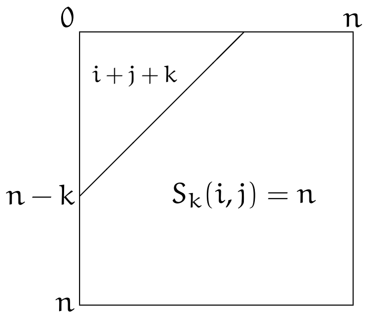


Figura 12. La t–conorma S_k

2. *Aquí teniu les t–conormes* S_0 *i* S_3 *sobre* L_8

S_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	8
2	2	3	4	5	6	7	8	8	8
3	3	4	5	6	7	8	8	8	8
4	4	5	6	7	8	8	8	8	8
5	5	6	7	8	8	8	8	8	8
6	6	7	8	8	8	8	8	8	8
7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

S_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	5	6	7	8	8	8	8	8
2	2	6	7	8	8	8	8	8	8
3	3	7	8	8	8	8	8	8	8
4	4	8	8	8	8	8	8	8	8
5	5	8	8	8	8	8	8	8	8
6	6	8	8	8	8	8	8	8	8
7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Observació 4.3.4 *La similitud entre la definició de les* S_k *i la definició de la t–conorma de Łukasiewicz (Exemple 2.1.2) queda palesa en la taula de les* S_k *(vegi's l'exemple) i mostra que les t–conormes* S_k *són de tipus Łukasiewicz amb un desplaçament de la regió* n *(Vegi's Figura 12).*

El generador f_k considerat abans és el de la t–conorma S_k tal com es demostra en la proposició següent.

Proposició 4.3.5 *Cada t–conorma* S_k *ve generada per*

$$f_k = \big(0, (k+1)d, (k+2)d, \dots, (k+n)d\big), \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-2.$$

Demostració: De la definició de les S_k s'observa que, fixat un $0 \leqslant k \leqslant n-2$, un generador per a S_k és $f = (a_0 = 0, a_1, \dots, a_n)$ complint

$$\begin{array}{ll} a_{i+j+k} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j+k+1} & \text{sempre que } i+j+k < n \\ a_n \leqslant a_i + a_j & \text{en cas contrari.} \end{array} \tag{4.9}$$

Com que $a_r = (k+r)d\ \forall r \leqslant n$, llavors si $i+j+k < n$, $a_{i+j+k} = a_i + a_j$ i la primera condició se satisfà. I si $i+j+k \geqslant n$ llavors $a_i + a_j = (2k+i+j)d \geqslant (k+n)d$ i la segona condició també se satisfà. □

Així doncs, la funció $f = \big(0, (k+1)d, (k+2)d, \dots, (k+n)d\big)$, progressió aritmètica de diferència d, és un generador de S_k que és tancat per la suma. Però aquesta darrera exigència no és necessària, de fet. Vegem en quines condicions les progressions aritmètiques són generadors de les S_k.

Proposició 4.3.6 *Sigui* $0 \leqslant k \leqslant n-2$ *i sigui* $a_1, \ldots, a_n$ *una progressió aritmètica de diferència* d. *Aleshores* $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ *és un generador de la t–conorma* S_k *si, i només si,* $\lfloor \frac{a_1}{d} \rfloor = k+1$

Demostració: Suposem primer que

$$f = \big(0, a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d\big)$$

amb $a, d > 0$ és un generador de S_k. Siguin i,j tals que $i+j+l < n$. Degut que f satisfà (4.9), podem escriure

$$a + (i+j+k-1)d \leqslant a + (i-1)d + a + (j-1)d < a + (i+j+k)d$$

d'on s'obté que $(k+1)d \leqslant a < (k+2)d$, és a dir, $\lfloor \frac{a}{d} \rfloor = k+1$.

Recíprocament, vegem que f satisfà (4.9). En efecte, per a la primera part basta refer el procés anterior a l'inrevés. Quant a la segona part, si $i+j+k \geqslant n$ llavors $a_i + a_j = 2a + (i+j-2)d \geqslant 2a + (n-k-2)d$ que, per l'hipòtesi de treball, resulta ser $a_i + a_j \geqslant a + (n-1)d = a_n$. □

A continuació es mostra una caracterització de les t–conormes S_k.

Proposició 4.3.7 *Una t–conorma* S *sobre* L *és arquimediana, suau sobre* $L^* = L - \{0\}$ *i estrictament creixent fora de la regió* n *si, i només si,* $S = S_k$ *per algun enter positiu* $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$.

Demostració: Demostrarem primer el recíproc: les t–conormes S_k són arquimedianes, suaus sobre $L^* = L - \{0\}$ i estrictament creixents fora de la regió n.

En efecte, si fos $S_k(i,i) = i$ amb $0 < i < n$ llavors seria $\min\{n, 2i+k\} = i$ que no pot ser.

En segon lloc, si $S_k(i,j) < n$ llavors és $i+j+k < n$. Llavors és clar que $S_k(i,j) < S_k(i',j)$ tant si $S_k(i+1,j)$ val n o $i+1+j+k$.

Per acabar vegem que les S_k són suaus sobre L^* ($S_k(i+1,j) - S_k(i,j) \leqslant 1$). Observem que

$$S_k(i+1,j) - S_k(i,j) = \min\{n, i+1+j+k\} - \min\{n, i+j+k\}$$

El cas $S_k(i,j) = n$ és obvi, ja que també seria $S_k(i+1,j) = n$. Si fos $S_k(i+1,j) = i+1+j+k$ llavors $S_k(i,j) = i+j+k$ i també es compliria la condició. Finalment si $S_k(i+1,j) = n$ i $S_k(i,j) < n$ hauria de ser $i+j+k+1 = n$ per la qual cosa $S_k(i+1,j) - S_k(i,j) = 1$.

Vegem ara que si una t–conorma és arquimediana sobre L, suaus sobre $L^* = L - \{0\}$ i estrictament creixent fora de la regió n llavors és alguna de les S_k. Sigui S una t–conorma amb aquestes característiques i considerem $k = S(1,1) - 2$. Llavors $S_k(1,1) = \min\{n, 2+k\} = \min\{n, S(1,1)\} = S(1,1)$. Essent S estrictament creixent fora de la regió n i suau en L^*, podem escriure:

$$S(i+1,j) = S(i,j+1) = S(i,j) + 1$$

sempre que $S(i,j) < n$. Llavors S està determinada pel valor en $(1,1)$ i aquestes dues condicions i, per tant, $S = S_k$. □

Observació 4.3.8 *De la demostració anterior sabem una característica més de les t–conormes* S_k, *i és la relació entre el valor del paràmetre* k *i* $S(1,1)$: $k = S(1,1) - 2$.

Exemple 4.3.9

1. *La t–conorma* S_k *sobre* L_n *té com a generador additiu*

$$f = (0, k+1, k+2, k+3, \ldots, k+n).$$

2. *La t–conorma* S_3 *de l'exemple 4.3.3 definida sobre* L_8 *té generador additiu*

$$f = (0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11).$$

Observació 4.3.10 *Respecte a FET 2, amb la família* S_k *hem comprovat que:*
S és una t–conorma arquimediana sobre L, suau sobre L^* i estrictament creixent fora de la regió n si, i només si, admet un generador additiu de la forma $f = \big(0, a, a+d, ..., a+(n-1)d\big)$ amb a i d enters positius tals que la part entera per defecte de $\frac{a}{d}$ està compresa entre 1 i $n-1$.

I com en totes les famílies, sempre hi ha una ovella negra. En aquesta és el cas $k = -1$, $S_{-1}(i,j) = \min\{i+j-1, n\}$, una possibilitat no considerada fins ara. La taula 6 mostra la t–conorma per a $n = 8$.

S_{-1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	2	3	4	5	6	7	8	8
3	3	3	4	5	6	7	8	8	8
4	4	4	5	6	7	8	8	8	8
5	5	5	6	7	8	8	8	8	8
6	6	6	7	8	8	8	8	8	8
7	7	7	8	8	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Taula 6. La t–conorma S_{-1} per al cas $n = 8$.

Aquestes operacions S_{-1} sobre L_n són també t–conormes. Aquest cas s'ha exclòs de la família anterior per no complir la propietat de ser arquimediana, encara que són suaus i estrictament creixents fora de la regió n (per tant no es regeixen per la caracterització mostrada), i perquè un generador additiu per a S_{-1} no s'adapta tampoc al model de la Proposició 4.3.5 ni al model de la Proposició 4.3.6. Aquestes t–conormes, però, són també additivament generables.

Proposició 4.3.11 *Sigui* $d > 2$. *Aleshores* $f = \big(0, 1, d, 2d, 3d, \ldots, (n-1)d\big)$ *és un generador de* S_{-1}.

DEMOSTRACIÓ: Sigui S la disjunció generada per f. Vegem $S = S_{-1}$. Hem de veure quatre coses:

1. $S(1,1) = 1$. Cert perquè $d > 2$.

2. $S(i,j) = \max\{i,j\}$ sempre que $\min\{i,j\} = 1$. En efecte, $S(1,j) = \max\{k \in L_n \; : \; f(k) \leqslant 1 + f(j)\} = j$ $(d > 2)$.

3. Si $i, j > 1$, $S(i,j) = i+j-1$ sempre que $i+j-1 < n$. En efecte, si $i+j-1 < n$,

$$\begin{aligned} S(i,j) &= \max\{k \in L_n \; : \; f(k) \leqslant f(i) + f(j)\} \\ &= \max\{k \in L_n \; : \; f(k) \leqslant (i+j-2)d\} \\ &= i+j-1. \end{aligned}$$

4. Si $i, j > 1$, $S(i, j) = n$ sempre que $i + j - 1 \geqslant n$. En efecte, si $i + j - 1 \geqslant n$,

$$\begin{aligned} S(i,j) &= \max\{k \in L_n \ : \ f(k) \leqslant f(i) + f(j)\} \\ &= \max\{k \in L_n \ : \ f(k) \leqslant (n-1)d\} \\ &= n. \end{aligned}$$

Aquesta t–conorma, S_{-1}, és de fet la suma ordinal de dues t–conormes S_k. Les t–conormes que s'obtenen en fer sumes ordinals d'aquestes s'estudien i es mostren a continuació.

4.3.1 *La família S_k ampliada*

Com que les t–conormes S_k són additivament generables, a partir de la Proposició 4.1.1, podem enunciar la proposició següent.

Proposició 4.3.12 *Qualsevol suma ordinal de t–conormes S_k té generador additiu.*

Per tant ja tenim una família de t–conormes additivament generables: les t-conormes S_k i les sumes ordinals d'aquestes.

Observació 4.3.13 *Si denotam per S_k^n la t–conorma sobre $L_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ corresponent al valor k ($k = 0, 1, \ldots, n-2$), aleshores, fixats $i_0 = 0 < i_1 < \ldots < i_r < i_{r+1} = n$, podem considerar t–conormes sobre L que siguin sumes ordinals $S = \langle S_{k_1}^{n_1}, S_{k_2}^{n_2}, \ldots, S_{k_{r+1}}^{n_{r+1}} \rangle$ on $n_j = i_j - i_{j-1} \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, r+1$, i $k_j = 0, 1, \ldots, n_j - 2$.*

Així, podem construir tantes t–conormes com $N = \prod_{j \in J}(n_j - 1)$ on $J = \{j; n_j \geqslant 2\}$. Només una d'elles és suau. Totes aquestes t–conormes tenen generador additiu.

Exemple 4.3.14 $S = \langle S_0^3, S_1^5 \rangle$ *és la t–conorma sobre $L_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ suma ordinal de S_0^3 i S_1^5 (vegi's la Taula 7). Un generador additiu de S és $(0, 1, 2, 3, 14, 21, 28, 35, 42)$. En efecte, com que $(0, 1, 2, 3)$ és un generador de S_0^3 i $(0, 2, 3, 4, 5, 6)$ ho és de S_1^5, llavors aplicant la proposició 4.1.1 s'obté el generador indicat.*

$\langle S_0^3, S_1^5 \rangle$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	3	4	5	6	7	8
2	2	3	3	3	4	5	6	7	8
3	3	3	3	3	4	5	6	7	8
4	4	4	4	4	6	7	8	8	8
5	5	5	5	5	7	8	8	8	8
6	6	6	6	6	8	8	8	8	8
7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Taula 7. La t–conorma $\langle S_0^3, S_1^5 \rangle$.

I ara vegem que la t–conorma S_k amb $k = -1$ és, de fet, una d'aquestes t–conormes.

Proposició 4.3.15 *La t–conorma S_{-1} sobre L_n es pot obtenir fent*

$$S_{-1} = \langle S_0^1\ ,\ S_0^{n-1} \rangle.$$

DEMOSTRACIÓ: La demostració és immediata, només cal fer la construcció que s'indica.

4.4 GENERADORS CONCAUS I GENERADORS CONVEXOS

Els generadors del tipus $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ són simplement una llista de nombres reals (o enters quan es considereren generadors enters). Una forma d'estudiar-los és considerar la diferència que hi ha entre ells: $d_i = a_i - a_{i-1}$. En la secció anterior, la família S_k resulta de considerar generadors complint que d_1 és qualsevol i la successió $d_2, d_3, \ldots, d_n$ és una successió constant. Ara ens plantejam la possibilitat que aquesta successió de diferències sigui una successió monòtona creixent o monòtona decreixent, obtenint-se així generadors convexos i concaus, respectivament.

Com a resultats, avancem que dels convexos s'obtenen disjuncions suaus i que en veurem una caracterització d'aquells que són associatius. Els concaus, en canvi, generen disjuncions arquimedianes.

Aquests generadors, convexos i concaus, resulten útils per a la construcció de funcions d'implicació que satisfacin les propietats $I(a, b) = n \Leftrightarrow a \leqslant b$, i $I(a, a) = n$, $\forall a, b \in L$, tal com veurem en el capítol següent.

4.4.1 *Generadors concaus: disjuncions arquimedianes*

Començam introduïnt el concepte de generador concau.

Definició 4.4.1 *Un generador $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ direm que és concau quan satisfaci*

$$a_1 \geqslant a_2 - a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant a_n - a_{n-1}$$

Observació 4.4.2 *Fixat n, hi ha una correspondència biunívoca entre el conjunt dels generadors concaus $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i el de les llistes n–dimensionals decreixents de termes positius $d = (d_1, \ldots, d_n)$. Aquesta correspondència ve donada per $d_i = a_i - a_{i-1}, i = 1, \ldots, n$. S'observa que el generador concau que correspon a $(d_1, \ldots, d_n)$ és $a_i = d_1 + \ldots + d_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

El nom li ve a la forma que presenten en una representació gràfica seva.

Exemple 4.4.3

Els generadors del tipus $\big(0, (k+1)d, \ldots, (k+n)d\big)$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, que generen les t–conormes del tipus S_k, són generadors concaus.

Un generador $f = \big(0, a, a+d, \ldots, a+(i-1)d \ldots, a+(n-1)d\big)$ és concau si, i només si, $a \geqslant d$, és a dir, $\frac{a}{d} \geqslant 1$. D'acord amb la Proposició 4.3.6, que estableix la relació entre a, d i k, les t–conormes del tipus S_k que tenen f com a generador concau són les que satisfan $k+1 = \lfloor \frac{a}{d} \rfloor \geqslant 1$, és a dir $k \geqslant 0$ i, per tant, totes elles.

En particular, els generadors de les t–conormes de Łukasiewicz, $f_0 = (0, 1, \ldots, n)$, i dràstica, $f_{n-2} = (0, n-1, n, \ldots, 2n-2)$, sòn concaus $\forall n \geqslant 2$.

A partir d'aquests tipus de generadors s'obtenen disjuncions sense elements idempotents no trivials.

Proposició 4.4.4 *Sigui $f = (0, a_1, a_2, \ \ldots\ , a_n)$ un generador concau. Aleshores la disjunció D generada additivament per f té com a únics idempotents 0 i n.*

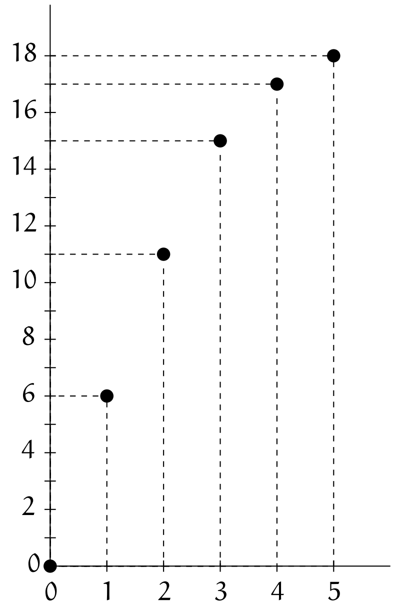


Figura 13. El generador concau amb $f = (0, 6, 11, 15, 17, 18)$

Demostració: Sigui $0 < i < n$; es veurà que $D(i, i) > i$. En efecte, si fos $D(i, i) = i$ llavors seria $2a_i < a_{i+1}$, és a dir, $2(d_1 + \ldots + d_i) < d_1 + \ldots + d_{i+1}$ i, per tant, hauria de ser $d_1 + \ldots + d_i < d_{i+1}$, impossible doncs $d_i \geqslant d_{i+1}$. □

4.4.2 *Generadors convexos: t–conormes suaus*

La definició de generador convex és:

Definició 4.4.5 *Un generador* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *direm que és convex si satisfà*

$$a_1 \leqslant a_2 - a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{n-1} - a_{n-2} \leqslant a_n - a_{n-1}$$

Observació 4.4.6 *Fixat* n, *hi ha una correspondència biunívoca entre el conjunt dels generadors convexos* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *i el de les llistes* n*–dimensionals creixents de termes positius* $d = (d_1, \ldots, d_n)$. *Aquesta correspondència ve donada per* $d_i = a_i - a_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. *S'observa que el generador concau que correspon a* $(d_1, \ldots, d_n)$ *és* $a_i = d_1 + \ldots + d_i$, $i = 1, \ldots, n$.

El nom, com en el cas dels concaus, també li ve a la forma que presenten aquests generadors en una representació gràfica seva (vegi's Figura 14).

Exemple 4.4.7

1. *El generador de la t–conorma màxim,* $f = (0, 1, 3, 7, \ldots, 2^n - 1)$, *és convex* $\forall n \geqslant 1$.

2. *Hi ha progressions aritmètiques que són generadors convexos; només cal que se satisfaci la primera desigualtat de la definició,* $a_1 \leqslant a_2 - a_1$, *doncs les demés se satisfan trivialment. Així, un generador* $f = \big(0, a, a + d, \ldots, a + (i-1)d \ldots, a + (n-1)d\big)$ *és convex si, i només si,* $a \leqslant d$, *és a dir,* $\frac{a}{d} \leqslant 1$. *D'acord amb la Proposició 4.3.6, les t–conormes del tipus* S_k *que tenen* f *com a generador convex són les que satisfan* $k + 1 = \lfloor \frac{a}{d} \rfloor \leqslant 1$, *és a dir* $k \leqslant 0$ *i, per tant, només* $S_Ł$.

A partir d'aquests tipus de generadors s'obtenen disjuncions suaus.

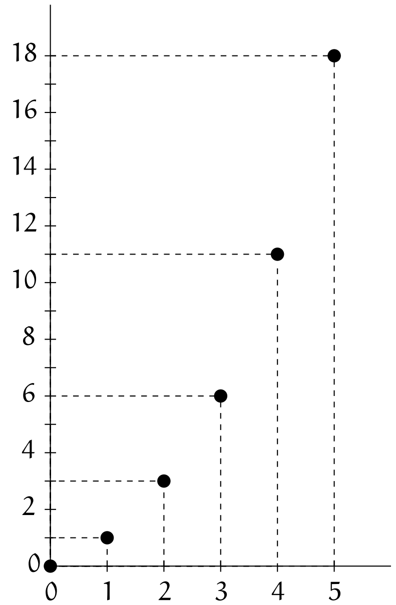


Figura 14. El generador convex amb $f = (0, 1, 3, 6, 11, 18)$

Proposició 4.4.8 *Sigui* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *un generador convex. Aleshores la disjunció* D *generada additivament per* f *és suau.*

DEMOSTRACIÓ: En efecte, posem que $a_i = d_1 + \ldots + d_i$ $\forall i \geqslant 1$ amb $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Observem que $D(i, j) = k < n$ si, i només si,

$$d_1 + \ldots + d_k \leqslant d_1 + \ldots + d_i + d_1 + \ldots + d_j < d_1 + \ldots + d_{k+1},$$

i que $D(i, j) = k = n$ si, i només si,

$$d_1 + \ldots + d_n \leqslant d_1 + \ldots + d_i + d_1 + \ldots + d_j.$$

En qualsevol cas,

$$d_{j+1} + \ldots + d_k \leqslant d_1 + \ldots + d_i. \tag{4.10}$$

Suposem doncs que $S(i, j) = k$ i que $S(i, j-1) = k-2$ per a un cert $2 < k \leqslant n$ i vegem que no pot ser. Si fos $S(i, j-1) = k-2$ llavors tendríem

$$d_j + \ldots + d_{k-2} \leqslant d_1 + \ldots + d_i < d_j + \ldots + d_{k-1}.$$

Però com que $d_k \geqslant d_j$ llavors seria

$$d_1 + \ldots + d_i < d_{j+1} + \ldots + d_k$$

que contradiu (4.10). □

A continuació es mostra una caracterització dels generadors convexos que determinen t–conormes. Per la proposició anterior, aquestes t–conormes són suaus i, per tant, additivament generables. Aquesta caracterització que segueix se situa en el marc de la segona línia de recerca (caracterització dels generadors que són associatius).

Proposició 4.4.9 *Sigui* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *un generador convex, amb* $a_i = d_1 + \ldots + d_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *amb* $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. *Aleshores, la disjunció generada per* f, F_f, *és associativa si, i només si, existeixen* $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_r = n$, *amb* $r \geqslant 1$, $i_1, \ldots, i_{r-1} \in L$ *de tal manera que el generador presenta una sèrie de blocs on* $\forall k: \ 0 \leqslant k \leqslant r-1, \forall j: \ i_k < j \leqslant i_{k+1}$*:*

$$\begin{aligned} & a_{i_k} < d_{i_k+1} \leqslant \ldots \leqslant d_{i_{k+1}} < a_{i_k+1}, \\ & a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{j} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}-(j-i_k)}^{i_{k+1}} d_s \end{aligned} \tag{4.11}$$

obtenint-se un generador que satisfà:

$$0 < \overbrace{d_1 = \ldots = d_{i_1}} < a_{i_1} < \overbrace{d_{i_1+1} \leqslant \ldots \leqslant d_{i_2}} < a_{i_1+1} < \ldots < a_{i_{r-1}} < \overbrace{d_{i_{r-1}+1} \leqslant \ldots \leqslant d_{i_r}} < a_{i_{r-1}+1}$$

Observem que quan $k = 0$, la condició $a_{i_k} < d_{i_k+1} \leqslant \ldots \leqslant d_{i_{k+1}} < a_{i_k+1}$ és $0 < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_{i_1} \leqslant d_1$ i, per tant, tot són igualtats.

D'altra banda, el fet que $a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{j} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}-(j-i_k)}^{i_{k+1}} d_s$ és, per a tot $k = 0, \ldots, r-1$:

$j = i_k: \ a_{i_k} + d_{i_k+1} \geqslant d_{i_{k+1}}$

$j = i_k + 1: \ a_{i_k} + d_{i_k+1} + d_{i_k+2} \geqslant d_{i_{k+1}-1} + d_{i_{k+1}}$

$j = i_k + 2: \ a_{i_k} + d_{i_k+1} + d_{i_k+2} + d_{i_k+3} \geqslant d_{i_{k+1}-2} + d_{i_{k+1}-1} + d_{i_{k+1}}$

etc.

DEMOSTRACIÓ: Vegem en primer lloc que un generador convex complint (4.11) genera una disjunció associativa suau, és a dir, una suma ordinal de t–conormes de Łukasiewicz. Si prenem un conjunt $i_1, \ldots, i_{r-1} \in L$, $r \geqslant 1$, $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_r = n$, i $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ un generador additiu convex complint 4.11, llavors

$$F_f(i,j) = \begin{cases} \min\{i+j, i_1\} & \text{si } 0 \leqslant i,j \leqslant i_1 \\ \min\{i+j-i_1, i_2\} & \text{si } i_1 \leqslant i,j \leqslant i_2 \\ \ldots & \ldots \\ \min\{i+j-i_k, i_{k+1}\} & \text{si } i_k \leqslant i,j \leqslant i_{k+1} \\ \ldots & \ldots \\ \min\{i+j-i_{r-1}, n\} & \text{si } i_{r-1} \leqslant i,j \leqslant n \\ \max\{i,j\} & \text{altrament,} \end{cases}$$

(una suma ordinal de t–conormes de Łukasiewicz).

En efecte, si $0 \leqslant i,j \leqslant i_1$ llavors és $a_i = id_1$, $a_j = jd_1$ i, per tant, $a_i + a_j = (i+j)d_1$. Es distingeixen dos casos. Si $i+j < i_1$ llavors és $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j+1}$. I si és $i+j \geqslant i_1$ llavors $a_{i_1} \leqslant a_i + a_j < a_{i_1} + a_{i_1} < a_{i_1+1}$. En qualsevol cas, $F_f(i,j) = \min\{i+j, i_1\}$.

Si és $i_k < i \leqslant j \leqslant i_{k+1}$, amb $1 \leqslant ik \leqslant r-1$. Es distingeixen dos casos. En primer lloc, si $i+j-i_k < i_{k+1}$ llavors $F_f(i,j) = i+j-i_k$ si, i només si,

$$a_{i+j-i_k} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j-i_k+1},$$

si, i només si,

$$d_{j+1} + \ldots d_{i+j-i_k} \leqslant a_{i_k} + d_{i_k+1} + \ldots + d_i < d_{j+1} + \ldots + d_{i+j-i_k+1}.$$

Però $d_{j+1} + \ldots d_{i+j-i_k} \leqslant a_{i_k} + d_{i_k+1} + \ldots + d_i$ (condició 4.11) i $a_{i_k} + d_{i_k+1} + \ldots + d_i < d_{j+1} + \ldots + d_{i+j-i_k+1}$ perquè un a un els termes del segon membre són majors o iguals que els del primer membre, amb $a_{i_k} < d_{j+1}$ (desigualtat estricta).

En segon lloc, si $i + j - i_k \geqslant i_{k+1}$ llavors $F_f(i,k) = i_{k+1}$ si, i només si, $a_{i_k+1} \leqslant a_i + a_j$, si, i només si,

$$d_{j+1} + \ldots + d_{i_{k+1}} \leqslant a_{i_k} + d_{i_k+1} + \ldots + d_i,$$

però com que $d_{j+1} + \ldots + d_{i_{k+1}} < d_j + \ldots + d_{i_{k+1}} \leqslant a_{i_k} + d_{i_k+1} + \ldots + d_i$ (la darrera desigualtat per la condició 4.11), tenim demostrat el que volíem, també en aquest cas.

Finalment, si és $i < i_k \leqslant i'_k \leqslant j$ o $i \leqslant i_k \leqslant i'_k < j$ llavors $a_j \leqslant a_i + a_j < a_j + d_{j+1} = a_{j+1}$. Per tant, $F_f(i,j) = \max\{i,j\}$.

Així doncs, amb aquest tipus de generadors s'obté una disjunció que és suma ordinal de t–conormes de Łukasiewicz. Per tant, aquests generadors generen t–conormes suaus.

Recíprocament, anem a determinar condicions necessàries perquè un generador convex sigui associatiu. Considerem f un generador convex d'acord amb l'Observació 4.4.6 i suposem que la disjunció que genera és associativa (és una t–conorma). Notem en primer lloc que si fos $d_1 = \ldots = d_n$ llavors resultaria la t–conorma de Łukasiewicz. Deixant de banda aquest cas, distingirem dos casos: $d_1 < d_2$ i $d_1 = d_2$.

Si és $d_1 = d_2$ llavors és $i_1 = 1$ i $0 < d_1 = a_1 < d_2$. I ja tenim fixat i_1.

En canvi, si és $d_1 = d_2$ llavors suposarem que $d_1 = d_2 = \ldots = d_{i_1} < d_{i_1+1}$ per algun $2 \leqslant i_1 < n$ (ja hem descartat la possiblitat que $d_1 = \ldots = d_n$). Vegem que ha de ser $d_{i_1+1} > i_1 \cdot d_{i_1}$. En efecte, si la disjunció generada per f ha de ser associativa, llavors $F_f(F_f(1,1),i_1) = F_f(1,F_f(1,i_1))$. És a dir, $F_f(2,i_1) = F_f(1,i_1)$ i, per tant, $F_f(2,i_1) = i_1$ i, per tant, $d_{i_1+1} > 2 \cdot d_{i_1}$. Repetint el procés (si escau) per a cada $k : 3 \leqslant k \leqslant i_1$, tendrem que $F_f(k-1,1) = k$ i que $F_f(k-1,i_1) = i_1$. Novament aplicant l'associativitat, ha de ser $F_f(F_f(k-1,1),i_1) = F_f(k-1,F_f(1,i_1))$, d'on s'obté que $F_f(k,i_1) = i_1$ i, per tant, $d_{i_1+1} > k \cdot d_{i_1}$. En conclusió, $0 < d_1 = \ldots = d_{i_1} < a_{i_1} (= i \cdot d_{i_1}) < d_{i_1+1}$ i ja tenim fixat i_1. Fixem-nos que $2a_{i_1} < a_{i_1+1}$ o, el que és el mateix, $F_f(i_1,i_1) = i_1$.

Suposem determinats $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ i anem a determinar el valor de i_k. Suposem que

$$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_{i_{k-1}} < a_{i_{k-2}+1} \leqslant a_{i_{k-1}} < d_{i_{k-1}+1}; \tag{4.12}$$

□

distingirem tres casos: $i_{k-1} + 1 = n$ (cas 1), $d_{i_{k-1}+2} > d_1 + \ldots + d_{i_{k-1}+1}$ (cas 2) i $d_{i_{k-1}+2} \leqslant d_1 + \ldots + d_{i_{k-1}+1}$ (cas 3).

Ve't aquí els 3 casos:

1. Si $i_{k-1} + 1 = n$, llavors prenem $i_k = i_{k-1} + 1$ i ja hem acabat.

2. Si $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_{i_{k-1}} \leqslant a_{i_{k-2}+1} < d_{i_{k-1}+1} < a_{i_{k-1}+1} < d_{i_{k-1}+2}$ llavors és $i_k = i_{k-1} + 1$ i $F_f(i_k+1, i_k+1) = i_k + 1$ (perquè $2a_{i_k+1} < a_{i_k+1} + d_{i_k+2} = a_{i_k+2}$, i ja tenim fixat i_k complint la condició 4.12 (perquè $a_{i_{k-1}+1} = a_{i_k}$).

3. Distingim dos subcasos.
   - $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_{i_{k-1}} < a_{i_{k-2}+1} \leqslant a_{i_{k-1}} < d_{i_{k-1}+1} \leqslant d_{i_{k-1}+2} \leqslant \ldots \leqslant d_n < a_{i_{k-1}+1}$, llavors serà $i_k = n$ i ja haurem acabat.
   - $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_{i_{k-1}} < a_{i_{k-2}+1} \leqslant a_{i_{k-1}} < d_{i_{k-1}+1} \leqslant d_{i_{k-1}+2} \leqslant \ldots \leqslant d_{i_{k-1}+p} < a_{i_{k-1}+1} < d_{i_{k-1}+p+1}$ per algun $p \geqslant 2$ amb $i_{k-1} + p < n$. Considerem $i_k = i_{k-1} + p$; si veiem que $a_{i_k} < d_{i_k+1}$ llavors es complirà 4.12. En efecte, $S(i_{k-1} +$

$1, i_k) = i_k$, doncs $a_{i_{k-1}+1} + a_{i_k} < d_{i_k+1} + a_{i_k} = a_{i_k+1}$. Com que S és associativa, llavors tendrem

$$\begin{aligned} F_f(i_{k-1}+2, i_k) &= F_f(F_f(i_{k-1}+1, i_{k-1}+1), i_k) \\ &= F_f(i_{k-1}+1, F_f(i_{k-1}+1, i_k)) \\ &= F_f(i_{k-1}+1, i_k) \\ &= i_k. \end{aligned}$$

De la mateixa manera, $F_f(i_{k-1}+3, i_k) = i_k$, ..., $F_f(i_{k-1}+p, i_k) = i_k$, és a dir, $F_f(i_k, i_k) = i_k$. D'aquí tenim que $2a_{i_k} < a_{i_k+1}$ i, per tant, $a_{i_k} < d_{i_k+1}$.

El procés d'anàlisi dels tres casos es repeteix cada vegada que es determina un nou element, i_k, sempre i quan $i_k < n$.

Finalment, del fet que f sigui un generador associatiu convex fa que F_f hagi de ser del tipus suma ordinal de t–conormes de Łukasiewicz (Proposició 2.3.5). Per tant, sempre que $i_k < i \leqslant j \leqslant i_{k+1}$ amb $i + j - i_k < i_{k+1}$ llavors ha de ser $S(i, j) = i + j - i_k$. Per tant, ha de ser $a_{i+j-i_k} \leqslant a_i + a_j$ per a tot i, j en aquestes condicions. En particular $j = i_{k+1} + i_k - i$, és a dir,

$$a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{i} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}-(i-i_k)}^{i_{k+1}} d_s \quad \forall k:\ 1 \leqslant k \leqslant r-1\ \forall i:\ i_k < i \leqslant i_{k+1}$$

La segona condició de les dues descrites en (4.11) es pot escriure de forma més senzilla.

Observació 4.4.10 *Sigui* $k:\ 0 \leqslant k \leqslant r-1$;

- *Si* $i_{k+1} - (i_k + 1)$ *és senar, llavors la cadena* $i_k + 1, \ldots, i_{k+1}$ *es divideix en dues subcadenes d'igual cardinal:*

$$\begin{aligned} \{i_k+1, \ldots, i_{k+1}\} &= \{i_k+1, \ldots, \lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor\} \cup \{\lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor + 1, \ldots, i_{k+1}\} \\ &= \{i_k+1, \ldots, \lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor\} \cup \{i_{k+1} + i_k - \lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor, \ldots, i_{k+1}\}. \end{aligned}$$

- *Si* $i_{k+1} - (i_k + 1)$ *és parell, llavors la cadena* $i_k + 1, \ldots, i_{k+1}$ *es divideix en tres subcadenes, la primera i la darrera d'igual cardinal:*

$$\begin{aligned} \{i_k+1, \ldots, i_{k+1}\} &= \{i_k+1, \ldots, \lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor\} \cup \{\lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor + 1\} \cup \\ &\quad \cup \{\lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor + 2, \ldots, i_{k+1}\} \\ &= \{i_k+1, \ldots, \lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor\} \cup \{\lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor + 1\} \cup \\ &\quad \cup \{i_{k+1} + i_k - \lfloor \tfrac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor, \ldots, i_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Proposició 4.4.11 *Sigui* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *un generador convex i siguin* $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_r = n$, *amb* $r \geqslant 1$, $i_1, \ldots, i_{r-1} \in L$ *d'acord amb les condicions de la proposició anterior. Aleshores les tres condicions següents són equivalents:*

1. $a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{j} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}-(j-i_k)}^{i_{k+1}} d_s$, $\forall k:\ 0 \leqslant k \leqslant r-1, \forall j:\ i_k < j \leqslant i_{k+1}$
2. $a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{j} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}-(j-i_k)}^{i_{k+1}} d_s$,
$\forall k:\ 0 \leqslant k \leqslant r-1, \forall j:\ i_k < j \leqslant \lfloor \frac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor$
3. $a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{\lfloor \frac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}+i_k-\lfloor \frac{i_k+i_{k+1}}{2} \rfloor}^{i_{k+1}} d_s$, $\forall k:\ 0 \leqslant k \leqslant r-1$

DEMOSTRACIÓ: Considerem $k:\ 0 \leqslant k \leqslant r-1$, fixat. Atenent l'observació anterior, tenim:

2. $\Rightarrow$ 1. Sigui $j:\ \lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor < j \leqslant i_{k+1}$ (altrament la demostració és directa). Aleshores

$$\sum_{s=\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor+1}^{j} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}+i_k-j}^{i_{k+1}+i_k-\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor-1} d_s$$

i, per tant,

$$a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor} d_s + \sum_{s=\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor+1}^{j} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}+i_k-j}^{i_{k+1}+i_k-\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor-1} d_s + \sum_{s=i_{k+1}+i_k-\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor}^{i_{k+1}} d_s$$

és a dir,

$$a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{j} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}-(j-i_k)}^{i_{k+1}} d_s.$$

3. $\Rightarrow$ 2. Sigui $j:\ i_k < j \leqslant \lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor$. Aleshores

$$\sum_{j+1}^{\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor} d_s \leqslant \sum_{s=i_{k+1}+i_k-\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor}^{i_{k+1}-j-1} d_s$$

i, per tant,

$$a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor} d_s - \sum_{j+1}^{\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}+i_k-\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor}^{i_{k+1}} d_s - \sum_{s=i_{k+1}+i_k-\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor}^{i_{k+1}-j-1} d_s,$$

és a dir,

$$a_{i_k} + \sum_{s=i_k+1}^{j} d_s \geqslant \sum_{s=i_{k+1}-(j-i_k)}^{i_{k+1}} d_s.$$

1. $\Rightarrow$ 3. Evident. □

D'acord amb aquesta proposició, establim finalment la següent

Proposició 4.4.12 *Sigui* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *un generador convex, amb* $a_i = d_1 + \ldots + d_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *amb* $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, *d'acord amb l'Observació 4.4.6. Aleshores,* F_f *és una disjunció associativa si, i només si, existeixen* $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_r = n$, *amb* $r \geqslant 1$, $i_1, \ldots, i_{r-1} \in L$ *de tal manera que el generador presenta una sèrie de blocs on* $\forall k:\ 0 \leqslant k \leqslant r-1$*:*

$$\begin{aligned} &a_{i_k} < d_{i_k+1} \leqslant \ldots \leqslant d_{i_{k+1}} < a_{i_k+1}, \\ &a_{i_k} + d_{i_k+1} + \ldots + d_{\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor} \geqslant d_{i_{k+1}-\lfloor\frac{i_k+i_{k+1}}{2}\rfloor} + \ldots + d_{i_{k+1}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

obtenint-se un generador que satisfà:

$0 < \overbrace{d_1 = \ldots = d_{i_1}} < a_{i_1} < \overbrace{d_{i_1+1} \leqslant \ldots \leqslant d_{i_2}} < a_{i_1+1} < \ldots < a_{i_{r-1}} < \overbrace{d_{i_{r-1}+1} \leqslant \ldots \leqslant d_{i_r}} < a_{i_{r-1}+1}$

Exemple 4.4.13

1. *Si prenem* $i_1 = n$ *llavors* $f = (0, d, 2d, 3d, \ldots, nd)$, $d > 0$, *és un generador de la t–conorma de Łukasiewicz.*

2. *Si prenem* $0 = i_0 < i_1 < i_2 = n$ *amb tots els blocs de* d_i*'s que siguin igualtats, tenim un generador del tipus*

$$f = \big(0, \underbrace{d, 2d, \ldots, md}, \underbrace{2md+1, 3md+2, \ldots, nmd+(n-1)}\big)$$

que té com a successió de diferències

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_m = d < md+1 = d_{m+1} = \ldots = d_{m+n}$$

i que genera una t–conorma S *sobre* L_{m+n} *suma ordinal de t–conormes de Łukasiewicz sobre* L_m *i* L_n*:* $S = \langle S_0^m, S_0^n \rangle$ *(on* S_0^k *denota la t–conorma de Łuckasiewicz sobre* L_k *d'acord amb la notació de l'Observació 4.3.13).*

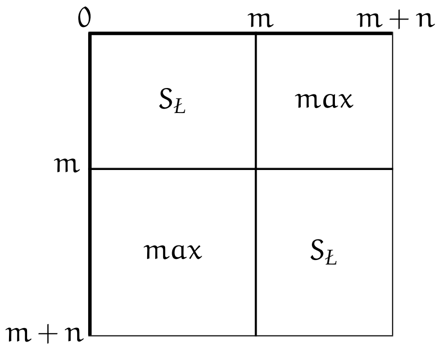


Figura 15. Una t–conorma suau obtinguda amb un generador de la forma descrita en 4.11

3. *Generadors i successions de diferències.*

Generador associatiu															
d = (	1,	3,	3,	3,	11,	12,	13,	14,	65,	70,	75,	80,	85,	90,	95)
f = (0,	1,	4,	7,	10,	21,	33,	46,	60,	125,	195,	270,	350,	435,	525,	620)

Aquest generador té com la llista de diferències formada per quatre blocs ($r = 4$*,* $i_0 = 0, i_1 = 1; i_2 = 4, i_3 = 8, i_4 = 15$*) d'un, de tres, de quatre i de set elements respectivament. En cada cas, s'observa que a l'inici de cada bloc, la diferència primera és major que el darrer element del generador del bloc anterior (marcats tots ells en negreta): la diferència* $d_2 = 3$ *és major que* $a_1 = 1$*, la diferència* $d_5 = 11$ *és major que* $a_4 = 7$*, i la diferència* $d_9 = 65$ *és major que* $a_8 = 60$*. Finalment, observem també que en el bloc 3 de la successió de diferències,* $33 = a_4 + d_5 + d_6 \geqslant d_7 + d_8 = 27$*, i en el bloc 4,* $270 = a_8 + d_9 + d_{10} + d_{11} \geqslant d_{12} + d_{13} + d_{14} = 270$*.*

En canvi, els generadors que mostrem a continuació no són associatius.

Generadors no associatius															
d^1 = (	1,	3,	3,	3,	11,	12,	13,	14,	60,	65,	70,	75,	80,	85,	90)
f = (0,	1,	4,	7,	10,	21,	33,	46,	60,	120,	185,	255,	330,	410,	495,	585)
d^2 = (	1,	3,	3,	11,	12,	13,	14,	65,	70,	75,	80,	85,	90,	95)	
f = (0,	1,	4,	7,	18,	30,	43,	57,	122,	192,	267,	347,	432,	522,	617)	
d^3 = (	1,	3,	4,	5,	15,	16,	17,	18,	80,	85,	90,	95,	100,	105,	110)
f = (0,	1,	4,	8,	13,	28,	44,	61,	79,	159,	244,	334,	429,	529,	634,	744)

En el primer d'ells, $d_9 \not> a_8$. En el segon, amb un element menys ($n = 14$), $267 = a_7 + d_8 + d_9 + d_{10} < d_{12} + d_{13} + d_{14} = 270$. En el tercer, $4 = a_1 + d_2 < d_4 = 5$. Observem que la diferència entre aquests exemples (no associatius) i l'anterior (associatiu) és petita, però determinant.

Observació 4.4.14 *Observem que, d'una banda, un generador que sigui concau i convex alhora ha de satisfer que $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$, amb la qual cosa s'obté el generador de la t–conorma de Łukasiewicz, $(0, d, 2d, \ldots, nd)$. I per altra banda, aquesta t–conorma és l'única arquimediana suau.*

Per altra part, la t–conorma de Łukasiewicz pot ser additivament generada per generadors diferents, dels quals només aquells del tipus $(0, d, 2d, \ldots, nd)$ són convexos. En canvi, aquesta t–conorma té diversos generadors concaus: $\big(0, a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-2)d, a_n\big)$, amb $\lfloor \frac{a}{d} \rfloor = 1$ i $2a + (n-3)d + 1 \leqslant a_n \leqslant a + (n-1)d$. En efecte, aquests generadors satisfan les condicions descrites en la Proposició 3.1.9. Se'n poden veure algunes representacions en la Figura 16.

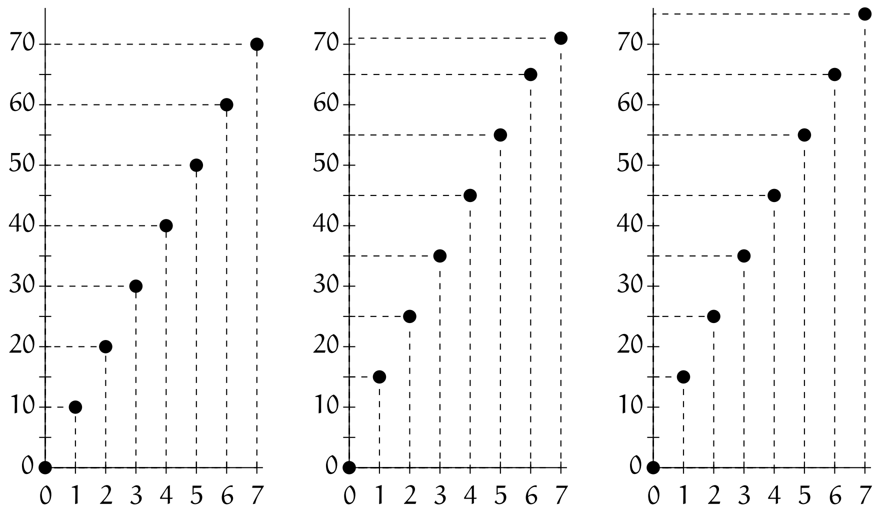


Figura 16. Els generadors $f_1 = (0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70)$, $f_2 = (0, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 71)$ i $f_3 = (0, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75)$ de la t–conorma de Łukasiewicz

Els generadors concaus i convexos esdevendran part important al final d'aquest treball. La proposició següent mostra com obtenir un generador d'un tipus a partir d'un de l'altre tipus.

Proposició 4.4.15 *Sigui $f = (a_0 = 0, a_1, \ldots, a_n)$ un generador convex (respectivament concau). Llavors el generador $f^* = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ donat per $b_i = a_n - a_{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, és concau (respectivament convex).*

Demostració: En efecte, si $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ és un generador, convex o concau, llavors per a tot $i = 1, \ldots, n$

$$b_i - b_{i-1} = a_n - a_{n-i} - (a_n - a_{n-i+1}) = a_{n-i+1} - a_{n-i}.$$

Per tant, si les diferències $a_i - a_{i-1}$ decreixen les diferències $b_i - b_{i-1}$ decreixen i recíprocament. □

4.5 T-CONORMES SUAUS I BIVALENTS EN $L_n^* = \{1, 2, \ldots, n\}$

En referència al nostre problema de caracteritzar les t–conormes que són additivament generables, es centrarà ara l'atenció en aquelles que siguin suaus en L_n^*. Aquestes, que per a $n \leqslant 8$ han resultat ser additivament generables, ja podem avançar que no ho són en general, tai i com es pot observar en la Taula 8 i en la proposició que segueix.

n	suaus en L_n^*	add. gen.
4	5	5
5	19	19
6	64	64
7	217	217
8	773	773
9	3044	3040

Taula 8. Relació entre el nombre total de t–conormes suaus sobre L^* i no suaus sobre L i el nombre de les que són additivament generables

Ja sabem que per $n \leqslant 7$ totes les t–conormes admeten generador additiu, mentre que per a $n = 8$ n'hi ha exactament tres que no, que resulten ser no suaus sobre L_8^* (vegi's la Taula 1, pàg. 41). A això cal afegir que

Proposició 4.5.1 *Hi ha* 3044 *t–conormes sobre* L_9 *suaus sobre* L_9^**, quatre de les quals no són additivament generables. Aquestes t–conormes són les de la Taula 9.*

DEMOSTRACIÓ: Per a les t–conormes que tenen generador additiu, s'ha aplicat l'algorisme descrit en 3.4.3 i se n'ha obtingut el corresponent generador. En canvi, en aplicar l'algorisme a aquestes quatre t–conormes, han donat un resultat negatiu en la prova Gamma, per la qual cosa no poden admetre cap generador additiu. Comprovem-ho a partir de les desigualtats del sistema d'inequacions que en resulten.

Un generador de S_4 seria una funció $f_4 = (0, a_1, a_2, \ldots, a_9)$ de manera que se satisfessin les desigualtats següents, extretes dels minimals i maximals de les diferents regions de la taula:

$S_4(1,1) = 5 \longrightarrow a_5 \leqslant 2a_1 < a_6$
$S_4(1,2) = 6 \longrightarrow a_6 \leqslant a_1 + a_2$
$S_4(1,3) = 6 \longrightarrow a_1 + a_3 < a_7{}^*$
$S_4(1,4) = 7 \longrightarrow a_7 \leqslant a_1 + a_4$
$S_4(2,2) = 7 \longrightarrow a_7 \leqslant 2a_2{}^*$
$S_4(2,4) = 7 \longrightarrow a_2 + a_4 < a_8{}^*$
$S_4(1,5) = 8 \longrightarrow a_8 \leqslant a_1 + a_5{}^*$
$S_4(3,3) = 8 \longrightarrow a_8 \leqslant 2a_3{}^*$
$S_4(1,6) = 8 \longrightarrow a_1 + a_6 < a_9$
$S_4(3,5) = 8 \longrightarrow a_3 + a_5 < a_9{}^*$
$S_4(1,7) = 9 \longrightarrow a_9 \leqslant a_1 + a_7$
$S_4(2,6) = 9 \longrightarrow a_9 \leqslant a_2 + a_6$
$S_4(4,4) = 9 \longrightarrow a_9 \leqslant 2a_4{}^*$

D'aquestes desigualtats extraiem $a_7 + a_9 \leqslant 2a_2 + 2a_4 < 2a_8 \leqslant a_1 + 2a_3 + a_5 < a_7 + a_9$, que no pot ser. S'indiquen amb asterisc (*) les condicions utilitzades per a arribar a

S_4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	5	6	6	7	8	8	9	9	9
2	2	6	7	7	7	8	9	9	9	9
3	3	6	7	8	8	8	9	9	9	9
4	4	7	7	8	9	9	9	9	9	9
5	5	8	8	8	9	9	9	9	9	9
6	6	8	9	9	9	9	9	9	9	9
7	7	9	9	9	9	9	9	9	9	9
8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

S_5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	5	6	7	7	7	8	9	9	9
2	2	6	6	7	8	8	8	9	9	9
3	3	7	7	7	8	9	9	9	9	9
4	4	7	8	8	8	9	9	9	9	9
5	5	7	8	9	9	9	9	9	9	9
6	6	8	8	9	9	9	9	9	9	9
7	7	9	9	9	9	9	9	9	9	9
8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9
9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9

S_6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	6	6	6	7	8	9	9	9	9
2	2	6	7	7	7	8	9	9	9	9
3	3	6	7	8	8	8	9	9	9	9
4	4	7	7	8	9	9	9	9	9	9
5	5	8	8	8	9	9	9	9	9	9
6	6	9	9	9	9	9	9	9	9	9
7	7	9	9	9	9	9	9	9	9	9
8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

S_7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	6	6	7	7	7	8	9	9	9
2	2	6	6	7	8	8	8	9	9	9
3	3	7	7	7	8	9	9	9	9	9
4	4	7	8	8	8	9	9	9	9	9
5	5	7	8	9	9	9	9	9	9	9
6	6	8	8	9	9	9	9	9	9	9
7	7	9	9	9	9	9	9	9	9	9
8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9
9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Taula 9. Les t–conormes suaus sobre L_9^* sense generador additiu

contradicció que, com es pot comprovar, no són totes. D'ara en endavant s'enumeraran només aquelles condicions que siguin rellevants en aquest sentit.

Un generador de S_6 seria una funció $f_6 = (0, a_1, a_2, \ldots, a_9)$ de manera que se satisfessin, entre d'altres, les condicions següents extretes dels minimals i maximals de les diferents regions de la taula:

$S_6(1,3) = 6 \longrightarrow a_1 + a_3 < a_7$
$S_6(2,2) = 7 \longrightarrow a_7 \leqslant 2a_2$
$S_6(2,4) = 7 \longrightarrow a_2 + a_4 < a_8$
$S_6(3,3) = 8 \longrightarrow a_8 \leqslant 2a_3$
$S_6(1,5) = 8 \longrightarrow a_8 \leqslant a_1 + a_5$
$S_6(3,5) = 8 \longrightarrow a_3 + a_5 < a_9$
$S_6(4,4) = 9 \longrightarrow a_9 \leqslant 2a_4$

D'aquestes desigualtats extraiem $a_7 + a_9 \leqslant 2a_2 + 2a_4 < 2a_8 \leqslant a_1 + 2a_3 + a_5 < a_7 + a_9$. Contradicció.

Observem que en ambdós casos s'utilitzen les mateixes desigualtats; és a dir, S_4 i S_6 tenen en comú una sèrie de minimals i maximals que dónen lloc a una idèntica col·lecció de desigualtats que resulta ser incompatible. També amb les t–conormes S_5 i S_7, les desigualtats que resulten ser incompatibles són les mateixes per a una i altra. Així, un generador de S_5 o de S_7 seria una funció $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_9)$ creixent de manera que se satisfessin les condicions següents, entre d'altres, extretes dels minimals i maximals de les diferents regions de la taula:

$S(2,2) = 6 \longrightarrow 2a_2 < a_7$

$S(1,3) = 7 \longrightarrow a_7 \leqslant a_1 + a_3$
$S(2,4) = 7 \longrightarrow a_1 + a_5 < a_8$
$S(3,3) = 7 \longrightarrow 2a_3 < a_8$
$S(1,5) = 8 \longrightarrow a_8 \leqslant a_2 + a_4$
$S(4,4) = 8 \longrightarrow 2a_4 < a_9$
$S(3,5) = 9 \longrightarrow a_9 \leqslant a_3 + a_5$

D'aquestes n'extraiem $a_7 + a_9 \leqslant a_1 + 2a_3 + a_5 < 2a_8 \leqslant 2a_2 + 2a_4 < a_7 + a_9$. Contradicció. □

Observació 4.5.2 *Com s'ha indicat abans, el subsistema incompatible de desigualtats extret d'alguns dels minimals i maximals d'aquestes quatre t–conormes és el mateix per a S_4 i S_6 d'una banda, i per S_5 i S_7 de l'altra. Aquests minimals i maximals de les t–conormes S_4 i S_6 són els corresponents maximals i minimals de S_5 i S_7, és a dir, estan situats exactament en les mateixa posició en les quatre t–conormes i les desiguatats que s'obtenen d'uns i altres són "les mateixes", només intercanviant $\leqslant$ per $>$ i també $<$ per $\geqslant$. Vegi's la Taula 10. És per això que s'obté cada vegada "la mateixa" cadena de desigualtats contradictòria.*

	T-conormes S_4 i S_6	T-conormes S_5 i S_7
(1,3)	Maximal regió 6	minimal regió 7
	$a_1 + a_3 < a_7$	$a_7 \leqslant a_1 + a_3$
(2,2)	minimal regió 7	Maximal regió 6
	$a_7 \leqslant 2a_2$	$2a_2 < a_7$
(2,4)	Maximal regió 7	minimal regió 8
	$a_2 + a_4 < a_8$	$a_8 \leqslant a_2 + a_4$
(3,3)	minimal regió 8	Maximal regió 7
	$a_8 \leqslant 2a_3$	$2a_3 < a_8$
(1,5)	minimal regió 8	Maximal regió 7
	$a_8 \leqslant a_1 + a_5$	$a_1 + a_5 < a_8$
(3,5)	Maximal regió 8	minimal regió 9
	$a_3 + a_5 < a_9$	$a_9 \leqslant a_3 + a_5$
(4,4)	minimal regió 9	Maximal regió 8
	$a_9 \leqslant 2a_4$	$2a_4 < a_9$

Taula 10. Relació de minimals i maximals de les t–conormes suaus sobre L^* que no admeten generador additiu

Malgrat que no totes les t–conormes suaus sobre L^* siguin additivament generables, seria bo obtenir una caracterització de les que sí ho són. En aquest sentit, seguidament s'estudia la família de disjuncions i t–conormes suaus sobre $L^* = \{1, 2, \ldots, n\}$ que pren valors per sobre de $n-1$ ($D(1,1) \geqslant n-1$)). Són, llevat de la dràstica, t–conormes bivalents (només prenen els valors $n-1$ i n), frontera a part). Vegi's la Taula 11.

D'ara en endavant ens centrarem en les disjuncions amb $D(1,1) = n-1$. El seu estudi mereix una secció a part, no només per la seva extensió, sinó també per l'estratègia que se segueix per demostrar que són additivament generables. En aquesta secció es caracteritzen les disjuncions bivalents i suaus sobre L^* que són t–conormes, es demostra que totes,

D	0	1	...	$n-1$	n
0	0	1	...	$n-1$	n
1	1	$n-1$	...	$n-1/n$	n
...	...	...	...	...	...
$n-1$	$n-1$	$n-1/n$	...	$n-1/n$	n
n	n	n	...	n	n

Taula 11. Les disjuncions suaus i bivalents sobre L^*

disjuncions i t–conormes, admeten generador additiu i s'aconsegueix un algorisme que permet construir (en comptes de cercar) un generador de l'operació binària donada.

Proposició 4.5.3 *Sigui* D *una disjunció sobre* L *amb* $D(1,1) = n-1$. *Aleshores* D *és associativa i arquimediana si, i només si,* $D(1, n-1) = n$.

Demostració: Veurem les dues implicacions. Suposem que D és associativa i arquimediana. Aleshores, si fos $D(1, n-1) = n-1$, llavors, en utilitzar que D és associativa, seria

$$n-1 = D(1,n-1) = D(1, D(1,n-1)) = D(D(1,1), n-1) = D(n-1,n-1)$$

i, per tant, D no podria ser arquimediana.

Suposem ara $D(1,n-1) = n$ i vegem que D és associativa, primer, i arquimediana, després. En primer lloc, siguin $1 \leqslant i,j,k \leqslant n-1$ (els altres casos són trivials) i vegem que en ser D creixent en cada variable llavors $D(i, D(j,k)) = D(D(i,j),k) = n$:

- $n \geqslant D(i, D(j,k)) \geqslant D(i, n-1) \geqslant D(1, n-1) = n$
- $n \geqslant D(D(i,j),k)) \geqslant D(n-1,k) \geqslant D(n-1,1) = n$

Vegem ara que D és arquimediana. En ser $D(1,1) = n-1$, és clar que $D(i,i) > i$ $i = 1,\ldots,n-1$. A més, $D(n-1,n-1) = D(D(1,1),n-1) = D(1,D(1,n-1)) = D(1,n) = n$.□

Com a conseqüència d'aquest resultats fem les següents observacions.

Observació 4.5.4 *Amb el supòsit que* $D(1,1) = n-1$, *tenim:*

1. *Si una disjunció* D *és associativa de manera que* $D(1,n-1) = n-1$ *llavors* $D(i,n-1) = n-1$ $i = 0,\ldots,n-1$. *En particular,* $D(n-1,n-1) = n-1$ *i, per tant,* D *és no arquimediana.*

2. *Només hi ha una t–conorma que satisfaci* $D(1,n-1) = n-1$*: la suma ordinal de la t–conorma dràstica sobre* L_{n-1} *amb l'única t–conorma sobre* L_1. *També pot interpretar-se com l'anidament de la t–conorma dràstica sobre* L_{n-1} *en qualsevol t–conorma sobre* L_n.

D	0	1	2	...	$n-1$	n
0	0	1	2	...	$n-1$	n
1	1	$n-1$	$n-1$	...	$n-1$	n
2	2	$n-1$	$n-1$	...	$n-1$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	...	$n-1$	n
n	n	n	n	...	n	n

3. *Les disjuncions* D *que satisfan* $D(1,n-1) = n-1$ *i* $D(n-1,n-1) = n$ *són les no associatives d'entre totes les que satisfan* $D(1,1) = n-1$.

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	7	7	7	7	7	7	7	8
2	2	7	7	7	7	7	7	7	8
3	3	7	7	7	7	8	8	8	8
4	4	7	7	7	7	8	8	8	8
5	5	7	7	8	8	8	8	8	8
6	6	7	7	8	8	8	8	8	8
7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
8	8	7	7	8	8	8	8	8	8

Taula 12. Hi ha disjuncions bivalents que no són associatives: $D(1,n-1) = n-1$ mentre que $D(n-1,n-1) = n$

4. *En el cas* $D(1,n-1) = n$, *totes les disjuncions són t–conormes (arquimedianes):*

D	0	1	...	$n-2$	$n-1$	n
0	0	1	...	$n-2$	$n-1$	n
1	1	$n-1$	...	$n-1/n$	n	n
...	...	...	...	...	...	...
$n-2$	$n-2$	$n-1/n$	...	$n-1/n$	n	n
$n-1$	$n-1$	n	...	n	n	n
n	n	n	...	n	n	n

De la demostració de la proposició anterior es pot extreure el següent resultat, que cau fora del nostre supòsit $D(1,1) = n-1$.

Proposició 4.5.5 *Sigui* S *una t–conorma sobre* L *amb* $S(1,1) = S(1,k) = k < n$. *Aleshores* $S(i,k) = k,\ i = 0,\ldots,k$. *En particular,* $S(k,k) = k$ *i, per tant,* S *no és arquimediana.*

DEMOSTRACIÓ: Com que $S(1,1) = S(1,k) = k$, llavors $k = S(1,k) = S(1,S(1,k)) = S(S(1,1),k) = S(k,k)$. I pel creixement de S, $S(1,k) \leqslant S(i,k) \leqslant S(k,k)$, $i = 1,\ldots,k$.

S	0	1	2	...	k	k+1	...	n
0	0	1	2	...	k	k+1	...	n
1	1	k	k	...	k	*	...	n
2	2	k	k	...	k	*	...	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	n
k	k	k	k	...	k	*	...	n
k+1	k+1	*	*	...	*	*	...	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋱	n
n	n	n	n	...	n	n	...	n

Anem ara a mostrar el nombre de t–conormes S que satisfan $S(1,1) = n-1$ i $S(1, n-1) = n$. Aquestes t–conormes es demostrarà que són additivament generables.

Proposició 4.5.6 *Sigui* $n \geqslant 3$*; aleshores hi ha* $2^{n-2} - 1$ *t–conormes* S *sobre* L_n *que satisfan* $S(1,1) = n-1$ *i* $S(1, n-1) = n$.

DEMOSTRACIÓ: Com que aquestes t–conormes només contenen les regions $n-1$ i n, per a fer el recompte d'aquestes t–conormes només cal considerar totes les possibilitats d'establir els elements maximals de la regió $n-1$ dins els quadrat $\{1, 2, \dots, n-2\}^2$ de la taula d'acord amb les notacions (3.3) i (3.4) del capítol anterior. Veurem, doncs, per inducció sobre n, que el nombre de possibilitats és $2^{n-2} - 1$.

- En el cas $n = 3$, només hi ha una t–conorma S satisfent $S(1, 2) = 3$, per la qual cosa és certa la proposició.
- Suposem ara cert per a n. Vegem-ho per a $n+1$.
  Així, per al cas de les t–conormes S_n sobre L_n, sabem que hi ha $2^{n-2} - 1$ maneres d'establir regions $n-1$ dins el quadrat $\{1, 2, \dots, n-2\}^2$ (color blau) de la taula de l'operació:

S_n	0	1	2	…	$n-2$	$n-1$	n
0	0	1	2	…	$n-2$	$n-1$	n
1	1	$n-1$	$*$	…	$*$	n	n
2	2	$*$	$*$	…	$*$	n	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮
$n-2$	$n-2$	$*$	$*$	…	$*$	n	n
$n-1$	$n-1$	n	n	…	n	n	n
n	n	n	n	…	n	n	n

  El que volem és demostrar que el nombre de maneres d'establir regions n dins el quadrat $\{1, 2, \dots, n\}^2$ de les t–conormes S_{n+1} sobre L_{n+1} complint $S_{n+1}(1,1) = n$ i $S_{n+1}(1, n) = n+1$ és $2^{n-1} - 1$:

S_{n+1}	0	1	2	…	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$
0	0	1	2	…	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$
1	1	n	$*$	…	$*$	$*$	$n+1$	$n+1$
2	2	$*$	$*$	…	$*$	$*$	$n+1$	$n+1$
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$n-2$	$n-2$	$*$	$*$	…	$*$	$*$	$n+1$	$n+1$
$n-1$	$n-1$	$*$	$*$	…	$*$	$*$	$n+1$	$n+1$
n	n	$n+1$	$n+1$	…	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$
$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	…	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$

  Aleshores, n'hi ha prou en observar que:

  1. De les t–conormes S_{n+1} sobre L_{n+1} satisfent $S_{n+1}(1, n-1) = n+1$ n'hi ha $2^{n-2} - 1$, doncs és la mateixa situació que la de determinar el nombre de regions $n-1$ per a les t–conormes S_n sobre L_n, i que és conegut per hipòtesi d'inducció.
  2. Hi ha una sola t–conorma S_{n+1} sobre L_{n+1} complint $S_{n+1}(1, n-1) = n$ i $S_{n+1}(2,2) = n+1$.

3. Hi ha $2^{n-2} - 1$ t–conormes S_{n+1} sobre L_{n+1} que satisfacin que $S_{n+1}(1, n-1) = S_{n+1}(2, 2) = n$, per raons semblants a l'apartat 1 d'aquesta demostració.

Així, com que qualsevol t–conorma S_{n+1} sobre L_{n+1} complint $S_{n+1}(1, 1) = n$ i $S_{n+1}(1, n) = n+1$ es troba en un, i només un, d'aquests tres supòsits, hi ha en total

$$(2^{n-2} - 1) + 1 + (2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} - 1$$

t–conormes d'aquest tipus. □

Corol·lari 4.5.7 *Sigui $n \geqslant 3$; aleshores hi ha $2^{n-2} + 1$ t–conormes S sobre L_n que satisfan* $S(1, 1) \geqslant n - 1$.

Demostració: Al recompte de la proposició anterior, s'hi han d'afegir la t–conorma considerada en l'observació 4.5.4 apartat 1 i la t–conorma dràstica.

Anem ara a demostrar que les t–conormes S tal que $S(1, 1) = n-1$ són additivament generables. Com que aquelles que $S(1, n-1) = n-1$ resulten una suma ordinal de dues additivament generables, la t–conorma dràstica sobre L_{n-1} amb la t–conorma única sobre L_2, llavors ens ocuparem només del cas en què $S(1, n-1) = n$. Per fer-ho agafarem la disjunció i els elements minimals i maximals de les dues úniques regions, $n-1$ i n, que contenen. D'una banda, la regió $n-1$ té $(1, 1)$ com a element minimal, i en seran els elements maximals els que la determinin. Fixats aquests, els minimals de la regió n queden també determinats (com es podrà veure a la Proposició 4.5.8) i, per tant, també queda completament determinada tota la regió n, doncs aquesta no té cap element maximal significatiu (l'element maximal trivial (n, n) no aporta cap tipus de condició al plantejament del problema de la generació additiva en termes d'un sistema de desigualtats).

D'acord amb 3.3 i 3.4, considerem $\Delta = \{(i, j) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1\}$ així com també els subconjunts $Max_{n-1} = \{(u_i, v_i) \in \Delta \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$, els maximals de la regió $n-1$, i $Min_n = \{(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j) \in \Delta \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$, els minimals de la regió n. Un generador additiu per a aquestes t–conormes serà una funció creixent $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ que satisfaci

1. $2a_1 \geqslant a_{n-1}$
2. $a_{u_i} + a_{v_i} < a_n \ \forall i : \ 1 \leqslant i \leqslant r$
3. $a_{\tilde{u}_j} + a_{\tilde{v}_j} \geqslant a_n \ \forall j : \ 1 \leqslant j \leqslant s$

de manera que $S = F_f$. Observem que, en particular $a_1 + a_{n-1} \geqslant a_n$.

De fet, si S és una t–conorma que satisfà $S(1, 1) = n-1$, podem determinar els maximals de la regió $n-1$, Max_{n-1}, a partir dels minimals de la regió n, Min_n, i viceversa. El que ara ve també és vàlid per a disjuncions en general, tal i com s'establirà en les Proposicions 4.5.8 i 4.5.9.

Així, si tenim $Max_{n-1} = \{(u_i, v_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$ és el conjunt dels maximals de la regió $n-1$, $u_1 < \ldots < u_r \leqslant v_r < \ldots < v_1$, llavors podem obtenir els s elements minimals de la regió n, Min_n, de la forma següent:

- $(u_1, v_1) \in Max_{n-1} \Rightarrow (1, v_1 + 1) \in Min_n$
- $\forall i : \ 2 \leqslant i \leqslant r$, $(u_i, v_i) \in Max_{n-1} \Rightarrow (u_{i-1} + 1, v_i + 1) \in Min_n$. Així,

$$\begin{array}{l}(u_2, v_2) \in Max_{n-1} \Rightarrow (u_1 + 1, v_2 + 1) \in Min_n \\ (u_3, v_3) \in Max_{n-1} \Rightarrow (u_2 + 1, v_3 + 1) \in Min_n \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ (u_r, v_r) \in Max_{n-1} \Rightarrow (u_{r-1} + 1, v_r + 1) \in Min_n\end{array}$$

- Si $u_r < v_r$ llavors també $(u_r + 1, u_r + 1) \in Min_n$

d'on es dedueix que o $s = r$, en el cas que Max_{n-1} té un element de la diagonal, o bé $s = r + 1$, quan no és el cas.

S	0	$\cdots$	$\{u_1, u_2, u_3, v_3\}$	$v_3 + 1$	$\cdots$	v_2	$v_2 + 1$	$\cdots$	v_1	$v_1 + 1$	$\cdots$	n
0	0	$\cdots$	$\{u_1, u_2, u_3.v_3\}$	$v_3 + 1$	$\cdots$	v_2	$v_2 + 1$	$\cdots$	v_1	$v_1 + 1$	$\cdots$	n
1	1	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
u_1	u_1	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n
$u_1 + 1$	$u_1 + 1$	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n	n	$\cdots$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
u_2	u_2	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n	n	$\cdots$	n
$u_2 + 1$	$u_2 + 1$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n	n	$\cdots$	n	n	$\cdots$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$

Taula 13. Minimals de la regió n d'una disjunció bivalent a partir dels maximals de regió $n-1$: $Max_{n-1} = \{(u_i, v_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$

Proposició 4.5.8 *Sigui* $\Delta = \{(i,j) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1\}$ *i sigui* D *una disjunció sobre* L_n*, i sigui* $Max_{n-1} = \{(u_i, v_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$ *el conjunt de maximals de la regió* $n-1$ *ordenats d'acord amb la condició 3.4, llavors el conjunt* Min_n *dels minimals de la regió* n *és, segons el cas, el següent:*

- *Si* $u_r = v_r$ *(la regió* $n-1$ *té un maximal a la diagonal),*

$$Min_n = \big(\{(1, v_1 + 1)\} \cup \{(u_i + 1, v_{i+1} + 1) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k-1\}\big)$$

- *Si* $u_r < v_r$*,*

$$Min_n = \big(\{(1, v_1 + 1), (u_{r_1} + 1, u_{r_1} + 1)\} \cup \{(u_i + 1, v_{i+1} + 1) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant r-1\}\big)$$

De forma semblant es pot obtenir Max_{n-1} a partir de Min_n. Cal observar prèviament que la regió n sempre tendrà un element minimal de la forma $(1, k)$, per algun $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Així, si $Min_n = (\{(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$ és el conjunt dels minimals de la regió n, $1 = \tilde{u}_1 < \ldots < \tilde{u}_s \leqslant \tilde{v}_s < \ldots < \tilde{v}_1$, llavors podem obtenir els r_1 elements maximals de la regió $n-1$, Max_{n-1}, de la forma següent:

- $(\tilde{u}_1 = 1, \tilde{v}_1), (\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) \in Min_n \Rightarrow (\tilde{u}_2 - 1, \tilde{v}_1 - 1) \in Max_{n-1}$
- $\forall i: \ 3 \leqslant i \leqslant r_2$, $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) \in Min_n \Rightarrow (\tilde{u}_i - 1, \tilde{v}_{i-1} - 1) \in Max_{n-1}$. Així,
  $(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3) \in Min_n \Rightarrow (\tilde{u}_3 - 1, \tilde{v}_2 - 1) \in Max_{n-1}$
  $(\tilde{u}_4, \tilde{v}_4) \in Min_n \Rightarrow (\tilde{u}_4 - 1, \tilde{v}_3 - 1) \in Max_{n-1}$
  $\vdots \qquad\qquad \vdots$
  $(\tilde{u}_s, \tilde{v}_s) \in Min_n \Rightarrow (\tilde{u}_s - 1, \tilde{v}_{s-1} - 1) \in Max_{n-1}$
- Si $\tilde{u}_s < \tilde{v}_s$ llavors $(\tilde{v}_s - 1, \tilde{v}_s - 1) \in Max_{n-1}$

S	0	$\cdots$	$\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{v}_3 - 1\}$	$\tilde{v}_3$	$\cdots$	$\tilde{v}_2 - 1$	$\tilde{v}_2$	$\cdots$	$\tilde{v}_1 - 1$	$\tilde{v}_1$	$\cdots$	n
0	0	$\cdots$	$\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{v}_3 - 1\}$	$\tilde{v}_3$	$\cdots$	$\tilde{v}_2 - 1$	$\tilde{v}_2$	$\cdots$	$\tilde{v}_1 - 1$	$\tilde{v}_1$	$\cdots$	n
$\tilde{u}_1 = 1$	1	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\tilde{u}_2 - 1$	$\tilde{u}_2 - 1$	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n
$\tilde{u}_2$	$\tilde{u}_2$	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n	n	$\cdots$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\tilde{u}_3 - 1$	$\tilde{u}_3 - 1$	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n	n	$\cdots$	n
$\tilde{u}_3$	$\tilde{u}_3$	$\cdots$	$n-1$	n	$\cdots$	n	n	$\cdots$	n	n	$\cdots$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$

Taula 14. Maximals de la regió $n-1$ d'una disjunció bivalent a partir dels minimals de regió n: $\mathrm{Min}_n = \{(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$

d'on novament es dedueix que $s = r$ (en el cas que Min_n no té cap element de la diagonal) o $s = r + 1$ (quan no és el cas).

En efecte, Com que $(1, \tilde{v}_1)$ i $(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$ són dos minimals "consecutius" de la regió n de tal manera que $(1, \tilde{v}_1) \nleq (\tilde{u}_2 - 1, \tilde{v}_1 - 1)$ i $(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) \nleq (\tilde{u}_2 - 1, \tilde{v}_1 - 1)$, llavors ha de ser $S(\tilde{u}_2 - 1, \tilde{v}_1 - 1) = n - 1$ d'acord amb l'observació 3.4.10. A més, ha de ser clarament un maximal, perquè $(\tilde{u}_2, \tilde{v}_1 - 1)$ i $(\tilde{u}_2 - 1, \tilde{v}_1)$ ja pertanyen a la regió n. Igualment es justifica que els demés elements maximals de la regió $n-1$ ho són. El cas especial de justificar que $(\tilde{v}_s - 1, \tilde{v}_s - 1)$ és un maximal de la regió $n-1$ quan $\tilde{u}_s < \tilde{v}_s$, és evident doncs si fos $S(\tilde{v}_s - 1, \tilde{v}_s - 1) = n$ tendríem un nou minimal de la regió n. I que ha de ser un maximal resulta de no ser comparable amb cap dels anteriors maximals obtinguts.

Proposició 4.5.9 *Sigui D una disjunció sobre L_n, i sigui $\mathrm{Min}_n = \{(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$ el conjunt de minimals de la regió n ordenats d'acord amb la condició 3.4, llavors el conjunt Max_{n-1} dels maximals de la regió $n-1$ és, segons el cas, el següent:*

- *Si $\tilde{u}_s = \tilde{v}_s$ (la regió n té un minimal a la diagonal),*

$$\mathrm{Max}_{n-1} = \{(\tilde{u}_j - 1, \tilde{v}_{j+1} - 1) \ : \ 1 \leqslant j \leqslant s\}$$

- *Si $\tilde{u}_s < \tilde{v}_s$,*

$$\mathrm{Max}_{n-1} = \{(\tilde{u}_{r_2} - 1, \tilde{u}_{r_2} - 1)\} \cup \{(\tilde{u}_j - 1, \tilde{v}_{j+1} - 1) \ : \ 1 \leqslant j \leqslant s\}$$

Observació 4.5.10 *Els elements minimals de la regió n poden escriure's com:*

amb element idempotent	*sense element idempotent*
$(1, \tilde{v}_1)$	$(1, \tilde{v}_1)$
$(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$	$(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$
$(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3)$	$(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3)$
$\vdots$	$\vdots$
$(\tilde{u}_{s-1}, \tilde{v}_{s-1})$	$(\tilde{u}_s, \tilde{v}_s)$
$(\tilde{v}_s, \tilde{v}_s)$	

que, afegits els corresponents maximals de la regió $n-1$, la llista es completa com:

tipus	*amb element idempotent*	*sense element idempotent*
minimal	$(1, \tilde{v}_1)$	$(1, \tilde{v}_1)$
maximal	$(\tilde{u}_2 - 1, \tilde{v}_1 - 1)$	$(\tilde{u}_2 - 1, \tilde{v}_1 - 1)$
minimal	$(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$	$(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$
maximal	$(\tilde{u}_3 - 1, \tilde{v}_2 - 1)$	$(\tilde{u}_3 - 1, \tilde{v}_2 - 1)$
minimal	$(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3)$	$(\tilde{u}_3, \tilde{v}_3)$
maximal	$(\tilde{u}_4 - 1, \tilde{v}_3 - 1)$	$(\tilde{u}_4 - 1, \tilde{v}_3 - 1)$
	$\vdots$	$\vdots$
maximal	$(\tilde{u}_{s-1} - 1, \tilde{v}_{s-2} - 1)$	$(\tilde{u}_s - 1, \tilde{v}_{s-1} - 1)$
minimal	$(\tilde{u}_{s-1}, \tilde{v}_{s-1})$	$(\tilde{u}_s, \tilde{v}_s)$
maximal	$(\tilde{u}_s - 1, \tilde{v}_{s-1} - 1)$	$(\tilde{v}_s - 1, \tilde{v}_s - 1)$
minimal	$(\tilde{v}_s, \tilde{v}_s)$	

on $1 < \tilde{u}_2 < \ldots < \tilde{u}_s \leqslant \tilde{v}_s < \tilde{v}_{s-1} < \tilde{v}_1$. *Per tant, els elements del conjunt*

$$\mathrm{Max}_{n-1} \cup \mathrm{Min}_n = \{(\alpha_i, \beta_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant t = r + s\}$$

poden ordenar-se de manera que

$$1 = \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_t = \beta_t \leqslant \ldots \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1$$

on $(\alpha_1 = 1, \beta_1)$ *és un minimal,* (α_2, β_2) *és un maximal,* (α_3, β_3) *és un minimal,* (α_4, β_4) *és un maximal, i així successivament (índex senar, minimal; índex parell, maximal).*

La construcció d'un generador per a una d'aquestes t–conormes es farà de manera que es satisfacin dues condicions:

1. $a_i + a_j = a_n$ per a tot parell (i, j) element minimal de la regió n.
2. $a_i + a_j = a_n - 1$ per a tot parell (i, j) element maximal de la regió $n - 1$.

Això no és possible per norma general, però en canvi és un fet plausible en aquest tipus de disjuncions ($D(1, 1) = n - 1$) i és, a més, la base per establir un algorisme que permeti la construcció d'un generador per a D de forma directa en comptes d'haver d'aplicar l'algorisme Gamma i fer una una cerca posterior (Secció 3.4.3).

Proposició 4.5.11 *Sigui* $n \geqslant 3$ *i sigui* S *una t–conorma sobre* L_n *complint* $S(1, 1) = n - 1$ *i* $S(1, n - 1) = n$. *Considerem* $\mathrm{Max}_{n-1} = \{(u_i, v_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$ *el conjunt dels maximals de la regió* $n - 1$, *i sigui* $\mathrm{Min}_n = \{(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$ *el conjunt dels minimals de la regió* n. *Si* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *satisfà que*

- $a_{n-1} \leqslant 2a_1 < a_n$
- $a_{u_i} + a_{v_i} = a_n - 1$ *per a tot* $1 \leqslant i \leqslant r$
- $a_{\tilde{u}_j} + a_{\tilde{v}_j} = a_n$ *per a tot* $1 \leqslant j \leqslant s$

llavors f *és un generador de* S.

DEMOSTRACIÓ: Resulta evident aplicant la Proposició 3.1.8.

Anem ara a considerar el conjunt unió dels maximals i minimals de les regions $n-1$ i n. Sigui D una disjunció sobre L_n complint $D(1,1) = n-1$, $D(1,k) = n$ un minimal de la regió n, i d'acord amb l'Observació 4.5.10, podem considerar

$$\mathrm{Max}_{n-1} \cup \mathrm{Min}_n = \{(\alpha_i, \beta_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant t\}$$

amb

$$1 = \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_t = \beta_t \leqslant \ldots \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1 = k$$

Aleshores, considerem

$(\alpha_1, \beta_1) = (1, k)$	*minimal regió* n	$A_1 = a_1 + a_k$
(α_2, β_2)	*maximal regió* $n-1$	$A_2 = a_{\alpha_2} + a_{\beta_2} + 1$
(α_3, β_3)	*minimal regió* n	$A_3 = a_{\alpha_3} + a_{\beta_3}$
(α_4, β_4)	*maximal regió* $n-1$	$A_4 = a_{\alpha_4} + a_{\beta_4} + 1$
(α_5, β_5)	*minimal regió* n	$A_5 = a_{\alpha_5} + a_{\beta_5}$
(α_6, β_6)	*maximal regió* $n-1$	$A_6 = a_{\alpha_6} + a_{\beta_6} + 1$
...	...	...
(α_t, β_t)	*minimal regió* n	$A_t = 2a_{\alpha_t}$
(α_t, β_t)	*maximal regió* $n-1$	$A_t = 2a_{\alpha_t} + 1$

on la forma de considerar A_t depèn de si l'element (α_t, β_t) pertany a la regió $n-1$ o a la regió n. Així doncs, d'acord amb la proposició anterior, una disjunció D amb les nostres condicions serà generable quan $A_1 = A_2 = \ldots = A_t$.

Per a construir el generador $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ d'una t–conorma d'aquest tipus, considerarem generadors de la forma descrita en la Proposició 4.5.11, és a dir:

1. $a_n = a_1 + a_k$, per tal que $(1, k)$ esdevengui un minimal de la regió n.
2. $a_{n-1} = 2a_1$ per tal d'assegurar que $S(1,1) = n-1$.

Per tant, el generador que es pretén determinar ha de tenir aquesta forma:

$$f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-2}, 2a_1, a_1 + a_k). \tag{4.14}$$

Proposició 4.5.12 *Sigui* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_1 + a_k)$ *un generador del tipus 4.14, i siguin* $\delta > 0$ *un nombre real positiu i* $i : 1 < i < n$. *Aleshores el generador* $g = (0, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *donat per*

- $b_j = a_j + \delta$, $j = 1, \ldots, i-1$,
- $b_j = a_j + 2\delta$, $j = i, \ldots, n-1$,
- $b_n = b_1 + b_k$

també és de la forma 4.14:

$$g = (0, \underbrace{a_1 + \delta, \ldots, a_{i-1} + \delta}, \underbrace{a_i + 2\delta, \ldots, 2a_{n-1} + 2\delta}, b_1 + b_k)$$

Demostració: Un generador construït així serà del tipus 4.14, doncs $b_1 = a_1 + \delta$ i $b_{n-1} = a_{n-1} + 2\delta = 2a_1 + 2\delta = 2(a_1 + \delta)$. □

Tornant als A_i's, teníem

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{\alpha_1} + a_{\beta_1} \\ A_2 &= a_{\alpha_2} + a_{\beta_2} + 1 \\ A_3 &= a_{\alpha_3} + a_{\beta_3} \\ A_4 &= a_{\alpha_4} + a_{\beta_4} + 1 \\ A_5 &= a_{\alpha_5} + a_{\beta_5} \\ A_6 &= a_{\alpha_6} + a_{\beta_6} + 1 \\ &\vdots \\ \left.\begin{aligned} A_t &= 2a_{\alpha_t} \\ A_t &= 2a_{\alpha_t} + 1 \end{aligned}\right\} &\text{Només una d'aquestes possibilitats es donarà.} \end{aligned} \tag{4.15}$$

complint $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = k$ i $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_t \leqslant \beta_t \leqslant \ldots \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1$.

Proposició 4.5.13 *Sigui* $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ *un generador del tipus (4.14), sigui* $i :\ 1 \leqslant i \leqslant k$ *de manera que* $\delta = A_i - A_{i-1} > 0$. *Amb les notacions de (4.15), el generador* $g = (0, b_1, \ldots, b_n)$ *donat per:*

- $b_j = a_j + \delta$, $\forall j :\ 1 \leqslant j < \beta_{i-1}$,
- $b_j = a_j + 2\delta$, $\forall j :\ \beta_{i-1} \leqslant j \leqslant n-1$,
- $b_n = b_1 + b_k$,

és de la forma (4.14) i satisfà que $A'_i = A'_{i-1}$ *(la distància entre* A_i *i* A_{i-1} *s'ha anul·lat) mentre que* $A'_j - A'_{j-1} = A_j - A_{j-1}$ *per a tot* $2 \leqslant j \leqslant t$, $i \neq j$ *(les demés distàncies es mantenen intactes). S'entén que* A'_i *denota el valor corresponent de (4.15) obtinguts amb els valors de* g.

Demostració: En efecte, la Proposició 4.5.12 ens assegura que el generador que s'obté és de la forma (4.14). Així doncs, si i és parell llavors

$$\begin{aligned} A'_i - A'_{i-1} &= b_{\alpha_i} + b_{\beta_i} + 1 - b_{\alpha_{i-1}} - b_{\beta_{i-1}} \\ &= a_{\alpha_i} + \delta + a_{\beta_i} + \delta + 1 - a_{\alpha_{i-1}} - \delta - a_{\beta_{i-1}} - 2\delta \\ &= A_i - A_{i-1} - \delta \\ &= 0. \end{aligned}$$

mentre que, si $j < i$, j parell,

$$\begin{aligned} A'_j - A'_{j-1} &= b_{\alpha_j} + b_{\beta_j} + 1 - b_{\alpha_{j-1}} - b_{\beta_{j-1}} \\ &= a_{\alpha_j} + \delta + a_{\beta_j} + 2\delta + 1 - a_{\alpha_{j-1}} - \delta - a_{\beta_{j-1}} - 2\delta \\ &= A_j - A_{j-1}. \end{aligned}$$

i si $j > i$, j parell,

$$\begin{aligned} A'_j - A'_{j-1} &= b_{\alpha_j} + b_{\beta_j} + 1 - b_{\alpha_{j-1}} - b_{\beta_{j-1}} \\ &= a_{\alpha_j} + 2\delta + a_{\beta_j} + 2\delta + 1 - a_{\alpha_{j-1}} - 2\delta - a_{\beta_{j-1}} - 2\delta \\ &= A_j - A_{j-1}. \end{aligned}$$

Els casos $j \neq i$ amb j senar són similars.

I, d'altra banda, si i és senar, llavors

$$\begin{aligned} A'_i - A'_{i-1} &= b_{\alpha_i} + b_{\beta_i} - b_{\alpha_{i-1}} - b_{\beta_{i-1}} - 1 \\ &= a_{\alpha_i} + \delta + a_{\beta_i} + \delta - a_{\alpha_{i-1}} - \delta - a_{\beta_{i-1}} - 2\delta - 1 \\ &= A_i - A_{i-1} - \delta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Els casos en què $j \neq i$, tant si j és parell com senar, són similars als anteriors. □

Proposició 4.5.14 *Sigui $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ un generador del tipus (4.14), sigui $i: \ 1 \leqslant i \leqslant k$ de manera que $\delta = A_i - A_{i-1} < 0$. Amb les notacions de (4.15), el generador $g = (0, b_1, \ldots, b_n)$ donat per:*

- $b_j = a_j + |\delta|, \forall j: \ 1 \leqslant j < \alpha_i$,
- $b_j = a_j + 2|\delta|, \forall j: \ \alpha_i \leqslant j \leqslant n-1$,
- $b_n = b_1 + b_k$,

satisfà que $A'_i = A'_{i-1}$ (la distància entre A_i i A_{i-1} s'ha anul·lat) mentre que $A'_j - A'_{j-1} = A_j - A_{j-1}$ per a tot $2 \leqslant j \leqslant t$, $i \neq j$ (les demés distàncies es mantenen intactes). S'entén que A'_i denota el valor corresponent de (4.15) obtinguts amb els valors de g.

Demostració: Aquesta demostració és molt similar a la demostració de la proposició anterior. D'una banda la Proposició 4.5.12 ens assegura que el generador que s'obté és de la forma (4.14), mentre que de l'altra veure'm només que $A'_i - A_{i-1}$ s'anul·la i ometrem la resta de casos. En efecte, si i és parell, llavors

$$\begin{aligned} A'_i - A'_{i-1} &= b_{\alpha_i} + b_{\beta_i} + 1 - b_{\alpha_{i-1}} - b_{\beta_{i-1}} \\ &= a_{\alpha_i} + 2|\delta| + a_{\beta_i} + 2|\delta| + 1 - a_{\alpha_{i-1}} - |\delta| - a_{\beta_{i-1}} - 2|\delta| \\ &= A_i - A_{i-1} + |\delta| \\ &= 0. \end{aligned}$$

I si i és senar, llavors

$$\begin{aligned} A'_i - A'_{i-1} &= b_{\alpha_i} + b_{\beta_i} - b_{\alpha_{i-1}} - b_{\beta_{i-1}} - 1 \\ &= a_{\alpha_i} + 2|\delta| + a_{\beta_i} + 2|\delta| - a_{\alpha_{i-1}} - |\delta| - a_{\beta_{i-1}} - 2|\delta| - 1 \\ &= A_i - A_{i-1} + |\delta| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Arribats aquí ja tenim la base teòrica per a la construcció de l'algorisme, que partint d'un generador amb valors enters de la forma (4.14), es calcularan els A_i descrits en (4.15) i, d'acord amb les dues proposicions anteriors, s'aniran fent les operacions necessàries per tal d'anar anul·lant, un a un, les diferències entre un A_i i el seu anterior A_{i-1}.

Prenem, doncs, valors enters consecutius des d'a_1 fins a_{n-2} i obtenim un generador del tipus (4.14):

$$f = (0, a, a+1, \ldots, \underline{a+k-1}, \ldots, a+n-3, 2a, \underline{2a+k-1})$$

on s'hi destaquen els elements de les posicions k i n.

Les t–conormes que s'han obtenir a partir d'aquests generadors han de satisfer $a_{n-2} < a_{n-1}$, per tant s'haurà de satisfer que $a + n - 3 < 2a$, és a dir, $a \geqslant n-2$. Així doncs, el generador d'aquest tipus més petit serà

$$f = (0, n-2, n-1, \ldots, \underline{n+k-3}, \ldots, 2n-5, 2n-4, \underline{2n+k-5})$$

on notem que sempre és $2a_1 < a_n$ $(n \geqslant 3, k > 1)$.

Observació 4.5.15 *Així doncs es podran considerar generadors del tipus*

$$f = (0, a, a+1, \ldots, \underline{a+k-1}, \ldots, a+n-3, 2a, \underline{2a+k-1})$$

que vénen donats per: $a \geqslant n-2$, $a_i = a_{i-1}+1$, $i = 2, \ldots, n-1$, $a_n = a_1 + a_k$. *Per descomptat, sempre serà* $a_{n-1} \leqslant 2a_1 < a_n$.

Vegem-ne alguns exemples.

Exemple 4.5.16 *En el cas* $n = 10$ *tenim:*

1. *Si* $k = 9$,
$$f = (0, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 24),$$
$$g = (0, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 33)$$
són generadors del tipus descrit en l'Observació 4.5.15 que generen t–conormes bivalents que satisfan $S(1,1) = 9$ *i* $S(1,9) = 10$, *el primer dels quals pren els valors enters mínims possible per a un generador d'aquest tipus.*

2. *Si* $k = 6$,
$$f = (0, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21),$$
$$g = (0, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 27)$$
són generadors del tipus descrit en l'Observació 4.5.15 que generen t–conormes bivalents que satisfan $S(1,1) = 9$ *i* $S(1,6) = 10$, *el primer dels quals pren els valors enters mínims possible per a un generador d'aquest tipus.*

4.5.1 *Algorisme per a determinar un generador additiu per disjuncions i t–conormes suaus i bivalents sobre* L^**:*

Prenem inicialment $i = 2$ i $f = (0, a, a+1, \ldots, a+k-1, \ldots, a+n-3, 2a, 2a+k-1)$ d'acord amb l'Obsevacio 4.5.15, i fem:

1. Es determinen els maximals de la regió $n-1$ i els minimals de la regió n, obtenint-se així el valor k que fa que $(1, k)$ sigui un d'aquests minimals.
2. $\delta_i = A_i - A_{i-1}$.
3. Si $\delta_i < 0$, anar a 6.
4. Si $\delta_i > 0$, anar a 8.
5. Si $\delta_i = 0$ anar a 11.
6. Es fa $a_j := a_j + |\delta_i|$ $\forall j$, $1 \leqslant j < \alpha_i$.
7. Es fa $a_j := a_j + 2|\delta_i|$ $\forall j$, $\alpha_i \leqslant j \leqslant n-1$. Anar a 10.
8. Es fa $a_j := a_j + \delta_i$ $\forall j$, $1 \leqslant j < \beta_{i-1}$.
9. Es fa $a_j := a_j + 2\delta_i$ $\forall j$, $\beta_{i-1} \leqslant j \leqslant n-1$. Anar a 10.
10. Es fa $a_n := a_1 + a_k$. (El nou generador és de la forma 4.14)
11. Si $i = t$, ACABA.
12. $i := i+1$. Anar a 2.

On l'expressió $x := x + y$ significa que el valor x s'incrementa en y unitats.

Exemple 4.5.17 *Considerem la t–conorma S sobre L_{16} següent:*

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	16	16	16
2	2	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	16	16	16
3	3	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	16	16	16
4	4	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16	16	16
5	5	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16	16	16
6	6	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16	16	16
7	7	15	15	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16	16	16	16	16
8	8	15	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16
9	9	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
10	10	15	15	15	15	15	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
11	11	15	15	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
12	12	15	15	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
13	13	15	15	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
14	14	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
15	15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16

amb $S(1,1) = 15$, $Max_{15} = \{(3,13),(6,10),(7,8)\}$, *el conjunt de maximals de la regió* 15, *i* $Min_{16} = \{(1,14),(4,11),(7,9),(8,8)\}$, *el conjunt de minimals de la regió* 16. *Així el conjunt unió és*

$$Max_{15} \cup Min_{16} = \{(1,14),(3,13),(4,11),(6,10),(7,9),(7,8),(8,8)\},$$

un conjunt amb $t = 7$ *elements. Notem també que* $k = 14$.

Ara prenem el generador $f = (0,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,41)$ *que satisfà* $a_1 + a_{14} = a_n$ $(14 + 27 = 41)$ *i* $2a_1 = a_{n-1}$ $(2 \cdot 14 = 28)$*. A partir d'aquest, calculem els* $A_1, \ldots, A_7$*:*

$A_1 = a_1 + a_{14} = 41$

$A_2 = a_3 + a_{13} + 1 = 43$

$A_3 = a_4 + a_{11} = 41$

$A_4 = a_6 + a_{10} + 1 = 43$

$A_5 = a_7 + a_9 = 42$

$A_6 = a_7 + a_8 + 1 = 42$

$A_7 = 2a_8 = 42$

A cada pas dels que vénen a continuació, s'indica el valor $\delta = A_i - A_{i-1}$ *i el nou generador obtingut.*

$i = 2$: $\delta = A_2 - A_1 = 2 > 0$, *sumam* 2 *a* $a_1, \text{ldots}, a_{13}$, *sumam* 4 *a* $a_{14}, \text{ldots}, a_{15}$ *i el nou generador serà*

$$f = (0,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,31,32,47)$$

i els nous valors A_i *seran*

$A_1 = a_1 + a_{14} = 47$
$A_2 = a_3 + a_{13} + 1 = 47$
$A_3 = a_4 + a_{11} = 45$
$A_4 = a_6 + a_{10} + 1 = 47$
$A_5 = a_7 + a_9 = 46$
$A_6 = a_7 + a_8 + 1 = 46$
$A_7 = 2a_8 = 46$

$i = 3$: $\delta = A_3 - A_2 = -2 < 0$, *sumam* 2 *a* a_1, ldots, a_3, *sumam* 4 *a* $a_4, \text{ldots}, a_{15}$ *i el nou generador serà*

$$f = (0, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 53)$$

i els nous valors A_i *seran*
$A_1 = a_1 + a_{14} = 53$
$A_2 = a_3 + a_{13} + 1 = 53$
$A_3 = a_4 + a_{11} = 53$
$A_4 = a_6 + a_{10} + 1 = 55$
$A_5 = a_7 + a_9 = 54$
$A_6 = a_7 + a_8 + 1 = 54$
$A_7 = 2a_8 = 54$

$i = 4$: $\delta = A_4 - A_3 = 2 > 0$, *sumam* 2 *a* $a_1, \text{ldots}, a_{10}$, *sumam* 4 *a* $a_{11}, \text{ldots}, a_{15}$ *i el nou generador serà*

$$f = (0, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 36, 39, 40, 59)$$

i els nous valors A_i *seran*
$A_1 = a_1 + a_{14} = 59$
$A_2 = a_3 + a_{13} + 1 = 59$
$A_3 = a_4 + a_{11} = 59$
$A_4 = a_6 + a_{10} + 1 = 59$
$A_5 = a_7 + a_9 = 58$
$A_6 = a_7 + a_8 + 1 = 58$
$A_7 = 2a_8 = 58$

$i = 5$: $\delta = A_5 - A_4 = -1 < 0$, *sumam* 1 *a* a_1, ldots, a_6, *sumam* 2 *a* $a_7, \text{ldots}, a_{15}$ *i el nou generador serà*

$$f = (0, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 36, 37, 38, 41, 42, 62)$$

i els nous valors A_i *seran*
$A_1 = a_1 + a_{14} = 62$
$A_2 = a_3 + a_{13} + 1 = 62$
$A_3 = a_4 + a_{11} = 62$
$A_4 = a_6 + a_{10} + 1 = 62$
$A_5 = a_7 + a_9 = 62$
$A_6 = a_7 + a_8 + 1 = 62$
$A_7 = 2a_8 = 62$

$i = 6,\ i = 7$: *En aquest casos* $\delta = A_i - A_{i-1} = 0$ *i ja hem acabat.*

Observació 4.5.18 *En vista del procés mostrat en aquesta secció, no és necessària la condició d'associativitat en cap moment. Per tant qualsevol disjunció bivalent sobre* L^* *és additivament generable, i l'algorisme anterior hi és aplicable per a obtenir-ne un generador additiu.*

4.6 t-conormes bivalents en L^*

La t–conorma dràstica és una disjunció que té un únic valor possible, n, per a tot els punts que no pertanyen a la frontera. En aquesta secció estudiarem dues famílies senzilles de t–conormes amb una construcció similar a la dràstica, però amb dos valors possibles, α i n, complint $1 \leqslant \alpha < n$.

4.6.1 *La família* $BV_{n,1}$

A continuació presentam la família de t–conormes del tipus dràstica per tot excepte en el punt $(1, 1)$.

Definició 4.6.1 *Siguin* $n \geqslant 2$. *Al conjunt de t–conormes sobre* L_n *donades per*

$$S^\alpha_{n,1}(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } j = 0 \\ j & \text{si } i = 0 \\ \alpha & \text{si } i = j = 1 \\ n & \text{altrament} \end{cases}$$

$S^\alpha_{n,1}$	0	1	2	...	n
0	0	1	2	...	n
1	1	α	n	...	n
2	2	n	n	...	n
...	...	...	...	...	...
i	i	n	n	...	n
...	...	...	...	...	...
n	2	n	n	...	n

on $1 \leqslant \alpha < n$, *en direm la família de t–conormes (bivalents)* $BV_{n,1}$.

Observació 4.6.2

1. *Les operacions binàries de la família* BV^α_1 *són efectivament t–conormes. Clarament satisfan la condició frontera, són creixents en cada variable i commutatives. Pel que fa a la condició d'associativitat,* $S(S(i,j),k) = S(i,S(j,k))$, *aquesta també és satisfà:*
   - *En el cas que* $i = 0$ *seria* $S(j,k) = S(j,k)$. *De forma semblant els casos* $j = 0$ *i* $k = 0$.
   - *En el cas que* $i > 1$ *seria* $n = n$. *De forma semblant els casos* $j > 1$ *i* $k > 1$.
   - *L'únic cas que queda per estudiar és* $i = j = k = 1$. *Si és* $\alpha = 1$ *llavors tenim* $S(S(1,1),1) = 1 = S(1,S(1,1))$; *en canvi, si és* $\alpha > 1$ *llavors tenim* $S(S(1,1),1) = n = S(1,S(1,1))$.
2. *Si* $\alpha > 1$ *llavors aquestes t–conormes són arquimedianes.*
3. *En el cas* $\alpha = 1$, *la t–conorma* $S^1_{n,1}$ *és de fet l'anidament (secció 4.2.1) de la t–conorma (única)* S^1 *sobre* L_1 *en la t–conorma dràstica* S^n_D *sobre* L_n: $S^1_{n,1} = [S^1, S^n_D]$.

Proposició 4.6.3 *Sigui* $n \geqslant 2$ *i sigui* $1 \leqslant \alpha < n$. *La t–conorma* $S^\alpha_{n,1}$ *té generador additiu.*

DEMOSTRACIÓ: Distingirem dos casos: $\alpha = 1$ i $\alpha > 1$.

1. En el cas $\alpha = 1$, $f = (0, \mathbf{n-1}, 2n-1, 2n, \dots, 3n-3)$ és un generador additiu de $S^1_{n,1}$, on els increments entre $2n-1$ i $3n-3$ són d'una unitat.

   En efecte, com que $a_1 \leqslant 2a_1 < a_2$ llavors la disjunció generada per f, F_f, verifica $F_f(1,1) = 1$. A més, com que $a_1 + a_2 \geqslant a_n$ llavors $F_f(1,2) = n$ i, pel creixement de F_f, ha de ser $S^1_{n,1} = F_f$.

2. En el cas $\alpha > 1$,

   $$f = (0, n-2, 2n-\alpha-2, \dots, 2n-5, \mathbf{2n-4}, 2n-3, \dots, 3n-\alpha-4)$$

   és un generador additiu de $S^\alpha_{n,1}$. Cal remarcar que és $a_\alpha = 2n-4$ i que des d'a_2 fins a_n els increments són d'una unitat.

   En efecte, com que $a_\alpha \leqslant 2a_1 < a_{\alpha+1}$ llavors $F_f(1,1) = \alpha$. A més, com que $a_1 + a_2 \geqslant a_n$ llavors $F_f(1,2) = n$ i, pel creixement de F_f, ha de ser $S^\alpha_{n,1} = F_f$.

En ambdós casos és clar que els generadors considerats satisfan la condició de frontera $F_f(j,0) = F_f(0,j) = j\ \forall j \in L_n$. □

Vegem-ne alguns exemples.

Exemple 4.6.4 *Fixem $n = 6$. A continuació es mostren les t–conormes $S^1_{6,1}$, $S^2_{6,1}$ i $S^4_{6,1}$ amb els corresponents generadors additius:*

$S^1_{6,1}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	6	6	6	6	6
2	2	6	6	6	6	6	6
3	3	6	6	6	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

$f = (0, 5, 11, 12, 13, 14, 15)$

$S^2_{6,1}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	6	6	6	6	6
2	2	6	6	6	6	6	6
3	3	6	6	6	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

$f = (0, 4, 8, 9, 10, 11, 12)$

$S^4_{6,1}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	4	6	6	6	6	6
2	2	6	6	6	6	6	6
3	3	6	6	6	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

$f = (0, 4, 6, 7, 8, 9, 10)$

Notem que en cada exemple, a_α va de color blau i des d'a_2 fins a_6 els increments són d'una unitat. En el segon i tercer exemples, $a_\alpha = 2a_1$.

4.6.2 *La família* $BV_{n,r}$

A continuació presentam una família de t–conormes que generalitzen les anteriors, però ara la regió "α" pot ser més gran.

Definició 4.6.5 *Siguin $n \geqslant 2$ i $1 \leqslant r < n$. Al conjunt de t–conormes sobre L_n donades per*

$$S^\alpha_{n,r}(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } j = 0 \\ j & \text{si } i = 0 \\ \alpha & \text{si } 1 \leqslant i,j \leqslant r \\ n & \text{si } i > r \text{ o } j > r \end{cases}$$

$S^\alpha_{n,r}$	0	1	...	r	r+1	...	n
0	0	1	...	r	r+1	...	n
1	1	α	...	α	n	...	n
2	2	α	...	α	n	...	n
...	...	...	...	...	...	...	...
r	r	α	...	α	n	...	n
r+1	r+1	n	...	n	n	...	n
...	...	...	...	...	...	...	...
n	n	n	...	n	n	...	n

on $1 \leqslant r \leqslant \alpha < n$*, en direm la família de t–conormes (bivalents)* $BV_{n,r}$.

Observació 4.6.6 *Observi's que:*

1. *Les operacions binàries de la família* $BV_{n,r}$ *són efectivament t–conormes. Clarament satisfan la condició frontera, són creixents en cada variable i commutatives. Pel que fa a la condició d'associativitat,* $S(S(i,j),k) = S(i, S(j,k))$*, aquesta també és satisfà:*
   - *En el cas que* $i = 0$ *seria* $S(j,k) = S(j,k)$*. De forma semblant els casos* $j = 0$ *i* $k = 0$.
   - *En el cas que* $i > r$ *seria* $n = n$*. De forma semblant els casos* $j > r$ *i* $k > r$.
   - *L'únic cas que queda per estudiar és* $1 \leqslant i,j,k \leqslant r$*. Si és* $\alpha = r$ *llavors tenim* $S(S(i,j),k) = \alpha = S(i,S(j,k))$*; en canvi, si és* $\alpha > r$ *llavors tenim* $S(S(i,j),k) = n = S(i,S(j,k))$.
2. *Si* $\alpha > r$ *llavors aquestes t–conormes són arquimedianes.*
3. *En el cas* $\alpha = r$*, la t–conorma* $S^r_{n,r}$ *és de fet l'anidament (secció 4.2.1) de la t–conorma dràstica* S^r_D *sobre* L_r *en la t–conorma dràstica* S^n_D *sobre* L_n*:* $S^r_{n,r} = [S^r_D, S^n_D]$.

Proposició 4.6.7 *Siguin* $n \geqslant 2$ *i* $1 \leqslant r \leqslant \alpha < n$*. La t–conorma* $S^\alpha_{n,r}$ *té generador additiu.*

Demostració: Distingirem dos casos: $\alpha = r$ i $\alpha > r$.

1. En el cas $\alpha = r$ un generador additiu de $S^r_{n,r}$ és

   $$f = \big(0, a, \ldots, \overbrace{a+r-1}^{a_r}, \overbrace{2a+2r-1}^{a_{r+1}}, \ldots, \overbrace{2a+n+r-2}^{a_n}\big)$$

   on $a \geqslant \max\{r\ ,\ n-r\}$ i des d'a_1 fins a_r i des d'a_{r+1} fins a_n els increments són d'una unitat.

   En efecte, com que $a_r \leqslant 2a_1 < 2a_r < a_{r+1}$ llavors $F_f(1,1) = F_f(r,r) = r$. A més, com que $a_1 + a_{r+1} \geqslant a_n$ llavors $F_f(1, r+1) = n$ i, pel creixement de F_f, ha de ser $S^r_{n,r} = F_f$.

2. En el cas $1 \leqslant r < \alpha < n$, un generador additiu per a $S^\alpha_{n,r}$ és

   $$f = \big(0, a, \ldots, \overbrace{a+r-1}^{a_r}, \overbrace{2a+r-\alpha+1}^{a_{r+1}}, \ldots, 2a, \overbrace{2a+2r-1}^{a_{\alpha+1}}, \ldots, \overbrace{2a+2r+n-\alpha-2}^{a_n}\big)$$

   on $a \geqslant n + r - 3$, i des d'a_1 fins a_r, des d'a_{r+1} fins a_α i des d'$a_{\alpha+1}$ fins a_n els increments són d'una unitat.

   En efecte, per tal que l'expressió anterior sigui un generador (estrictament creixent) ha de passar que:
   - $a + r + 1 < 2a + r + a - \alpha$, que ocorrerà sempre que $a \geqslant \alpha - 1$. Però sabem que

     $$a \geqslant n + r - 3 \geqslant \alpha + 1 + r - 3 \geqslant \alpha - 1$$

   - $2a < 2a + 2r - 1$, cosa que és evident.

   D'altra banda, com que $a_\alpha \leqslant 2a_1 < 2a_r < a_{\alpha+1}$ llavors $S(1,1) = S(r,r) = \alpha$, i com que $a_1 + a_{r+1} \geqslant a_n$ (recordem que $a \geqslant n + r - 3$) llavors $S(1, r+1) = n$ i pel creixement de F_f ha de ser $S^\alpha_{n,r} = F_f$.

En ambdós casos és clar que els generadors considerats satisfan la condició de frontera $F_f(j, 0) = F_f(0, j) = j \ \forall j \in L_n$. □

Observació 4.6.8 *Les expressions dels generadors que apareixen en la Proposició 4.6.3 són els de la Proposició 4.6.7 prenent $r = 1$ i $a = n - 1$.*

Exemple 4.6.9 *Fixem $n = 6$. A continuació es mostren tres exemples amb $\alpha = r$: les t–conormes $S^2_{6,2}$, $S^3_{6,3}$ i $S^5_{6,5}$ amb els corresponents generadors additius:*

$S^2_{6,2}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2	6	6	6	6
2	2	2	2	6	6	6	6
3	3	6	6	6	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

$f = (0, 4, 5, 11, 12, 13, 14)$

$S^3_{6,3}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	3	3	3	6	6	6
2	2	3	3	3	6	6	6
3	3	3	3	3	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

$f = (0, 3, 4, 5, 11, 12, 13)$

$S^5_{6,5}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	5	5	5	5	5	6
2	2	5	5	5	5	5	6
3	3	5	5	5	5	5	6
4	4	5	5	5	5	5	6
5	5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6

$f = (0, 5, 6, 7, 8, 9, 19)$

Exemple 4.6.10 *Fixem $n = 6$. A continuació es mostren tres exemples amb $\alpha > r$: les t–conormes $S^5_{6,2}$, $S^4_{6,3}$ i $S^5_{6,3}$ amb els corresponents generadors additius:*

$S^5_{6,2}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	5	5	6	6	6	6
2	2	5	5	6	6	6	6
3	3	6	6	6	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

$f = (0, 5, 6, 8, 9, 10, 13)$

$S^4_{6,3}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	4	4	4	6	6	6
2	2	4	4	4	6	6	6
3	3	4	4	4	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

$f = (0, 6, 7, 8, 12, 17, 18)$

$S^5_{6,3}$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	5	5	5	6	6	6
2	2	5	5	5	6	6	6
3	3	5	5	5	6	6	6
4	4	6	6	6	6	6	6
5	5	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6

$f = (0, 6, 7, 8, 11, 12, 17)$

5

UTILITAT I APLICACIONS DE LA GENERACIÓ ADDITIVA

L'ús de t–normes i t–conormes discretes additivament generables obre una via d'estudi per a tots aquells conceptes relacionats amb aquestes operacions d'agregació. En aquest capítol es mostrarà com s'apliquen alguns dels resultats exposats en aquest treball en dues línies de recerca: els operadors d'indistingibilitat i les propietats de les S–implicacions.

5.1 OPERADORS D'INDISTINGIBILITAT

Els operadors d'indistingibilitat [43, 37] han estat estudiats al llarg d'aquests anys per diferents autors, tant en el cas continu $[0, 1]$ com sobre altres tipus de dominis. En [39] s'hi enuncia un important teorema de representació d'aquests operadors per al cas continu.

Els operadors d'indistingibilitat amb valors a cadenes finites són eines que permeten l'estudi de la similitud entre objectes, atesa la granularitat que suposa treballar sobre un domini de valors finit, i obtenir així una interpretació dels càlculs sobre la cadena.

A partir d'una t–norma T sobre $L = \{0, 1, \ldots, n\}$, es defineixen els conceptes de residuació i biresiduació de T, que resulten ser un T–preordre i un T–operador d'indistingibilitat sobre L, respectivament. Les expressions que defineixen aquests conceptes poden ser fàcilment expressables en termes d'un generador additiu de T quan aquesta t–norma és additivament generable.

A més, a partir de la versió discreta del teorema de representació per a T–operadors d'indistingibilitat, es defineixen els conceptes de dimensió i base d'un d'aquests operadors, obtenint-se expressions on apareixen el generador i les pseudoinverses considerades en aquest treball, també en el cas en què T sigui additivament generable.

A continuació es mostren les definicions i propietats bàsiques dels operadors d'indistingibilitat adaptades al cas finit. Detalls sobre operadors d'indistingibilitat amb rang de valors discret es poden trobar a [31].

5.1.1 *Conceptes i resultats bàsics*

Definició 5.1.1 *Sigui* T *una t–norma sobre* $L = \{0, 1, \ldots, n\}$*. La seva residuació* $\overrightarrow{T}$ *es defineix com*

$$\overrightarrow{T}(i|j) = \max\{k \in L \mid T(i, k) \leqslant j\}.$$

Exemple 5.1.2

1. *Si* $T = T_Ł$ *llavors* $\overrightarrow{T}(i|j) = \max(0, n - i + j)$ *per a tot* $i, j \in L$.

2. *Si* $T = T_M$ *llavors* $\overrightarrow{T}(i|j) = \begin{cases} j \textit{ si } i > j \\ n \textit{ altrament.} \end{cases}$

Proposició 5.1.3 *Sigui* T *una t–norma suau amb conjunt d'idempotents* $I = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = n\}$. *La seva residuació* $\overrightarrow{T}$ *és*

$$\overrightarrow{T}(i|j) = \begin{cases} n & \textit{si } i \leqslant j \\ \max\{a_k, a_{k+1} - i + j\} & \textit{si } i,j \in [a_k, a_{k+1}] \textit{ per algun } k < r,\ i > j \\ j & \textit{altrament.} \end{cases}$$

Definició 5.1.4 *La biresiduació* E_T *associada a una t–norma donada* T *sobre* L *es defineix com*

$$E_T(i,j) = T(\overrightarrow{T}(i|j), \overrightarrow{T}(j|i)) = \min\{\overrightarrow{T}(i|j), \overrightarrow{T}(j|i)\}$$

Exemple 5.1.5

1. *Si* $T = T_Ł$ *llavors* $E_T(i,j) = n - |i-j|$ *per a tot* $i,j \in L$.
2. *Si* $T = T_M$ *llavors* $E_T(i,j) = \begin{cases} \min\{i,j\} & \textit{si } i \neq j \\ n & \textit{altrament.} \end{cases}$

Proposició 5.1.6 *Sigui* T *una t–norma suau amb conjunt d'idempotents* $I = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = n\}$. *La seva biresiduació* E_T *és*

$$E_T(i,j) = \begin{cases} n & \textit{si } i = j \\ a_{k+1} - |i-j| & \textit{si } i,j \in [a_k, a_{k+1}] \textit{ per algun } k < r,\ i \neq j \\ \min\{i,j\} & \textit{altrament.} \end{cases}$$

A continuació es defineixen les relacions (operadors) de preordre i d'indistingibilitat sobre un conjunt no buit.

Definició 5.1.7 *Sigui* T *una t–norma sobre* L. *Un* T*–preordre* P *sobre un conjunt* X *és una relació* $P : X \times X \to L$ *(per abreujar,* L*–relació) que satisfà per a tot* $x, y, z \in X$

1. $P(x,x) = n$ *(reflexivitat)*
2. $T(P(x,y), P(y,z)) \leqslant P(x,z)$ *(*T*–transitivitat)*

Definició 5.1.8 *Sigui* T *una t–norma sobre* L. *Un* T*–operador d'indistingibilitat* E *sobre un conjunt* X *és una* L*–relació* $E : X \times X \to L$ *que satisfà per a tot* $x, y, z \in X$

1. $E(x,x) = n$ *(reflexivitat)*
2. $E(x,y) = E(y,x)$ *(simetria)*
3. $T(E(x,y), E(y,z)) \leqslant E(x,z)$ *(*T*–transitivitat)*

Proposició 5.1.9 *La residuació* $\overrightarrow{T}$ *d'una t–norma* T *sobre* L *és un* T*–preordre sobre* L. *La biresiduació* E_T *d'una t–norma* T *sobre* L *és un* T*–operador d'indistingibilitat sobre* L.

Proposició 5.1.10 *Sigui* T *una t–norma sobre* L *i sigui* μ *un* L*–subconjunt de* X *(és a dir,* $\mu : X \to L$*). La* L*–relació* E_μ *sobre* X *definida per a tot* $x, y \in X$ *com*

$$E_\mu(x,y) = E_T\big(\mu(x), \mu(y)\big)$$

és un T*–operador d'indistingibilitat.*

Teorema 5.1.11 (Teorema de representació per a T–operadors d'indistingibilitat) *Sigui* R *una* L*–relació sobre un conjunt* X *i sigui* T *una t–norma sobre* L. R *és un* T*–operador d'indistingibilitat sobre* X *si, i només si, existeix una família* $(\mu_i)_{i \in I}$ *de* L*–subconjunts de* X *de manera que per a tot* $x, y \in X$

$$R(x,y) = \inf_{i \in I} E_{\mu_i}(x,y).$$

La família $(\mu_i)_{i\in I}$ s'anomena una família generadora de R, i un L-subconjunt que pertany a una família generadora de R s'anomena un generador de R.

Els conjunts extensionals respecte a un T–operador d'indistingibilitat coincideixen amb els seus generadors.

Definició 5.1.12 *Sigui* T *una t–norma sobre* L, E *un* T*–operador d'indistingibilitat sobre un conjunt* X *i* μ *un* L*–subconjunt de* X. μ *és extensional respecte a* E *si, i només si, per a tot* $x, y \in X$

$$T\big(E(x,y), \mu(x)\big) \leqslant \mu(y).$$

Tal com s'enuncia a continuació, es pot demostrar que un L–subconjunt de X és extensional respecte a un T–operador d'indistingibilitat E si, i només si, és un generador de E.

Proposició 5.1.13 *Sigui* T *una t–norma sobre* L, E *un* T*–operador d'indistingibilitat sobre un conjunt* X *i* μ *un* L*–subconjunt de* X. μ *és extensional respecte a* E *si, i només si,* $E_\mu \geqslant E$.

I a partir d'aquí es defineixen els conceptes de dimensió i base.

Definició 5.1.14 *Sigui* T *una t–norma sobre* L, E *un* T*–operador d'indistingibilitat sobre* X. *La dimensió de* E *és el mínim dels cardinals de les famílies generadores de* E *en el sentit del teorema de representació. Una família generadora amb aquest cardinal s'anomena una base de* E.

5.1.2 *Expressions a partir de generadors additius*

Anem ara a mostrar les expressions de la residuació i biresiduació per al cas de les t–normes additivament generades. Abans, però, anem a recordar les dues definicions de pseudoinversa d'una funció estrictament decreixent $f : L \to [0, +\infty)$ amb $f(n) = 0$:

- La pseudoinversa $f_+^{(-1)} : [0, +\infty) \to L$, que es defineix com

  $$f_+^{(-1)}(t) = \min\{i \in L; f(i) \leqslant t\} = \min f^{-1}\big([0,t]\big),$$

  i que s'utilitza per a la generació additiva de conjuncions.

- La pseudoinversa $f_-^{(-1)} : (-\infty, +\infty) \to L$, que es defineix com

  $$f_-^{(-1)}(t) = \begin{cases} \max\{i \in L; f(i) \geqslant t\} = \max f^{-1}\big([t, +\infty)\big) & \text{si } t \geqslant 0 \\ n & \text{altrament,} \end{cases}$$

  i que s'usarà per a calcular la residuació i biresiduació de t-normes additivament generables.

Proposició 5.1.15 *Sigui* T *una t–norma sobre* L *amb generador additiu* f. *Aleshores*

$$\overrightarrow{T}(i|j) = f_-^{(-1)}\big(f(j) - f(i)\big) \textit{ per a tot } i, j \in L.$$

DEMOSTRACIÓ: Donats $i, j \in L$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T}(i|j) &= \max\{k \in L \,:\, T(i,k) \leqslant j\}\\ &= \max\{k \in L \,:\, f_{+}^{(-1)}\big(f(i)+f(k)\big) \leqslant j\}\\ &= \max\{k \in L \,:\, \min\{r \in L \,:\, f(r) \leqslant f(i)+f(k)\} \leqslant j\}\\ &= \max\{k \in L \,:\, f(i)+f(k) \geqslant f(j)\}\\ &= \max\{k \in L \,:\, f(k) \geqslant f(j)-f(i)\}\\ &= f_{-}^{(-1)}\big(f(j)-f(i)\big)\end{aligned}$$

□

Proposició 5.1.16 *Sigui* T *una t–norma sobre* L *amb generador additiu* f. *Aleshores*

$$E_T(i,j) = f_{-}^{(-1)}(|f(i)-f(j)|) \text{ per a tot } i,j \in L.$$

DEMOSTRACIÓ:

$$\begin{aligned}E_T(i,j) &= \min\left\{\overrightarrow{T}(i|j), \overrightarrow{T}(j|i)\right\}\\ &= \min\left\{f_{-}^{(-1)}\big(f(j)-f(i)\big), f_{-}^{(-1)}\big(f(i)-f(j)\big)\right\}\\ &= f_{-}^{(-1)}\big(|f(i)-f(j)|\big)\end{aligned}$$

□

Proposició 5.1.17 *Sigui* T *una t–norma sobre* L *amb generador additiu* f *i sigui* E *un* T*–operador d'indistingibilitat sobre un conjunt finit* $X = \{r_1, \ldots, r_s\}$ *de cardinal* s. *Un* L*–subconjunt* $\mu = (x_1, \ldots, x_s)$, $x_i = \mu(r_i)$, $i = 1, \ldots, s$, *és un generador de* E *si, i només si,*

$$f(x_i) - f(x_j) \leqslant f\big(E(r_i, r_j)\big) \text{ per a tot } i,j = 1, \ldots, s \tag{5.1}$$

DEMOSTRACIÓ: D'acord amb la Proposició 5.1.13, μ és un generador de E si, i només si, $E_\mu \geqslant E$, és a dir, $E_\mu(r_i, r_j) \geqslant E(r_i, r_j)$ per a tot $i, j = 1, \ldots, s$. Per tant, $E_T(\mu(r_i), \mu(r_j)) \geqslant E(r_i, r_j)$, i, aplicant la proposició anterior, $f_{-}^{(-1)}\big(|f(\mu(r_i)) - f(\mu(r_j))|\big) \geqslant E(r_i, r_j)$. Finalment això equival a $|f(x_i) - f(x_j)| \leqslant f\big(E(r_i, r_j)\big)$, o també, $f(x_i) - f(x_j) \leqslant f\big(E(r_i, r_j)\big)$. □

El que diu la proposició anterior és que els L–subconjunts de X extensionals respecte de E (generadors de E) són les solucions $(x_1, \ldots, x_s)$ del sistema (5.1). A continuació mostram un exemple que il·lustra aquest resultat.

Exemple 5.1.18 *La* L_3*–relació* E *sobre* $X = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ *donada per*

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

és un $T_Ł$*–operador d'indistingibilitat sobre* $L_3 = \{0, 1, 2, 3\}$. *Com que* $f = (n, \ldots, 1, 0)$ *és un generador de* $T_Ł$, *un* L*–subconjunt de* X , $\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *amb* $x_i = \mu(r_i)$, *és un generador de* E *si, i només si, satisfà el sistema d'inequacions següent:*

$$x_j - x_i \leqslant n - E(r_i, r_j), \text{ per a tot } i, j \in L_3$$

Per tant, els L_3*–subconjunts de* X *extensionals respecte de* E *són* $\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *que satisfan* $|x_1 - x_2| \leqslant 1$, $|x_1 - x_3| \leqslant 2$, $|x_1 - x_4| \leqslant 3$, $|x_2 - x_3| \leqslant 3$, $|x_2 - x_4| \leqslant 2$, $|x_3 - x_4| \leqslant 2$. *Les solucions d'aquest sistema d'inequacions són*

$$\begin{aligned} H = \{ & (0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,2),(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,0,1,2),(0,0,2,0),(0,0,2,1),\\ & (0,0,2,2),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(0,1,0,2),(0,1,1,0),(0,1,1,1),(0,1,1,2),(0,1,1,3),\\ & (0,1,2,0),(0,1,2,1),(0,1,2,2),(0,1,2,3),(1,0,0,0),(1,0,0,1),(1,0,0,2),(1,0,1,0),\\ & (1,0,1,1),(1,0,1,2),(1,0,1,3),(1,0,2,0),(1,0,2,1),(1,0,2,2),(1,0,2,3),(1,1,0,0),\\ & (1,1,0,1),(1,1,0,2),(1,1,1,0),(1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,1,3),(1,1,2,0),(1,1,2,1),\\ & (1,1,2,2),(1,1,2,3),(1,1,3,1),(1,1,3,2),(1,1,3,3)\} \end{aligned}$$

Una base per aquest T_L*–operador d'indistingibilitat és* $\{(0,1,2,3),(0,0,2,2)\}$*. Direm doncs que* E *té dimensió* 2*.*

A partir d'ara es fa un estudi dirigit a expressar algunes propietats de les S–implicacions en termes d'un generador additiu de S, construïm de manera efectiva aquests generadors i, a partir d'ells, obtenim t–conormes que satisfan aquestes propietats.

5.2 propietats de les s–implicacions

Les conjuncions, disjuncions i negacions són connectives de la lògica clàssica i de la lògica borrosa; en el context borrós, aquestes són modelades per les t–normes, les t–conormes i les negacions fortes, respectivament. Hi escau definir també l'operador implicació, que en lògica borrosa es pot definir de diverses formes, totes elles equivalents sobre qualsevol àlgebra de Boole (com la de la lògica clàssica) però diferents en la lògica que aquí es treballa. Les $R-$implicacions, $S-$implicacions, $QL-$implicacions i $D-$implicacions són els quatre tipus més habituals d'operadors d'implicació, que es detallen a continuació.

1. $I(x,y) = \sup\{z \in [0,1]; T(x,z) \leqslant y\}$ per a una t–norma T contínua per l'esquerra. S'anomena una $R-$implicació i prové d'estudiar la propietat de la residuació sobre reticles residuats.
2. $I(x,y) = S(N(x),y)$, $x,y \in [0,1]$. S'anomena una $S-$implicació i prové de l'equivalència de la lògica clàssica $p \to q \equiv \neg p \vee q$.
3. $I(x,y) = S(N(x),T(x,y))$, $x,y \in [0,1]$, és el que s'anomena una $QL-$implicació. Prové de la lògica de mecànica quàntica, i la seva equivalència en la lògica clàssica seria $p \to q \equiv \neg p \vee (p \wedge q)$.
4. $I(x,y) = S(T(N(x),N(y)),y)$, $x,y \in [0,1]$, i són la contraposició de les $QL-$implicacions respecte la negació forta N. S'anomenen $D-$implicacions degut a la seva procedència de la implicació de Dishkant $p \to q \equiv q \vee (\neg p \wedge \neg q)$ en els reticles ortomodulars [38]. Alguns autors també les anomenen $NQL-$implicacions.

Aquestes definicions adaptades al domini discret, $L = \{0,1,\dots,n\}$, han estat estudiades en diversos articles [18, 19, 20]. En aquest treball, ens dedicam a les $S-$implicacions, i comparam els resultats obtinguts aquí amb els que es mostren a [18], que es dedica a implicacions definides a partir d'una t–conorma suau. En aquest treball s'obtenen resultats més generals per a una família de t–conormes més àmplia com és la de les t–conormes additivament generables.

Definició 5.2.1 *Una operació binària* $I : L \times L \to L$ *és una implicació sobre* L *si satisfà per a tot* $i,j,k \in L$*:*

(I1) $I(i,k) \geqslant I(j,k)$ *quan* $i \leqslant j$ *(decreixent en la primera variable),*

(I2) $I(i,j) \leqslant I(i,k)$ *quan* $j \leqslant k$ *(creixent en la segona variable),*

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$, $I(1,0) = 0$ *(condicions de frontera).*

A partir d'ara ens dedicam a les S-implicacions.

Proposició 5.2.2 *Sigui* S *una t–conorma sobre* L *i* $N(i) = n - i$ *l'única negació forta sobre* L. *L'operació binària* I_S *definida sobre* L *de la forma següent:*

$$I_S(i,j) = S(N(i), j) \quad i,j \in L. \tag{5.2}$$

és una implicació. Aquestes implicacions s'anomenen S-implicacions.

Exemple 5.2.3 *La l'operació binària* $I : L \times L \to L$ *donada per*

$$I(i,j) = \min\{n, n-i+j\}$$

és la S_L*–implicació coneguda amb el nom d'implicació de Łukasiewicz.*

La dualitat de les t–normes i les t–conormes ens permet expressar el concepte de S$-$implicació en termes de t–normes.

Observació 5.2.4 *Siguin* T *i* S *una t–norma i una t–conorma sobre* L, N$-$*duals una de l'altra. La S-implicació pot expressar-se també com*

$$I_S(i,j) = N(T(i, N(j))).$$

A continuació es mostra una sèrie de propietats relatives a les *implicacions discretes*, que són les que també es consideren en el cas continu. Aquestes propietats han estat estudiades a [18] i s'han obtingut els resultats que s'indiquen just després.

P1 Contraposició respecte de la negació N: $I(i,j) = I(N(j), N(i))$, $\forall i,j \in L$.

P2 Principi d'identitat: $I(i,i) = n$, $\forall i \in L$.

P3 Propietat d'ordre: $I(i,j) = n \Leftrightarrow i \leqslant j$, $\forall i,j \in L$.

P4 $I(i,0)$, $i \in L$, és la negació forta sobre L $\big(I(i,0) = n - i \ \forall i \in L\big)$.

P5 $I(i,j) \geqslant j$, $\forall i,j \in L$.

P6 Modus Ponens generalitzat: $T(i, I(i,j)) \leqslant j$, $\forall i,j \in L$, amb T la t–norma dual de S (I és una S-implicació).

P7 $I(i, N(i)) = N(i)$, $\forall i \in L$.

P8 Principi d'intercanvi: $I(i, I(j,k)) = I(j, I(i,k))$, $\forall i,j,k \in L$.

Proposició 5.2.5 *Sigui* S *una t–conorma suau sobre* L. *Les afirmacions següents són equivalents:*

1. $S = S_Ł$
2. $I_S(i,j) = n \iff i \leqslant j$ *(propietat d'ordre)*
3. $I_S(i,i) = n \ \forall i \in L$ *(propietat d'identitat)*

Proposició 5.2.6 *Sigui* S *una t–conorma suau. Pel que fa a la propietat P7,*

$$I_S(i, N(i)) = N(i) \ \ \forall i \in L \iff S = S_M.$$

Proposició 5.2.7 *Sigui* S *una t–conorma suau. La implicació* I_S *satisfà la propietat P6 si, i només si,* $S = S_Ł$.

5.2.1 *Implicacions i generació additiva*

En aquesta secció s'estudia la satisfacció de les propietats anteriorment esmentades per a S–implicacions quan es pren una t–conorma S additivament generada per $f = (0, a_1, \dots, a_n)$ amb $0 < a_1 < \dots < a_n$. L'estudi es fa d'acord amb l'expressió (5.2) anterior i de la Proposició 3.1.8, i s'obtenen expressions per a les propietats anteriors referides ara als corresponents generadors.

PG-1 Per a tot $i, j \in L$, $I_S(i, j) = I_S(N(j), N(i))$ és $S(N(i), j) = S(j, N(i))$. Aquesta condició se satisfà directament per la commutativitat de S, independentment que sigui additivament generable o no.

PG-2 Per a tot $i \in L$, la condició $S(N(i), i) = n$ escrita en termes del generador de S és $a_{n-i} + a_i \geqslant a_n$. És a dir, la S–implicació satisfà la propietat d'identitat si, i només si, el generador de S, $(0, a_1, \dots, a_n)$, satisfà la condició $a_{n-i} + a_i \geqslant a_n$ $\forall i \in L$.

PG-3 Per a tot $i, j \in L$, d'una banda $I_S(i, j) = n \Leftrightarrow a_n \leqslant a_{n-i} + a_j$. Per tant, la propietat $I_S(i, j) = n \Leftrightarrow i \leqslant j$ equival a $a_n \leqslant a_{n-i} + a_j \Leftrightarrow i \leqslant j$. Fent el canvi, i per $n - i$, llavors la propietat és $a_i + a_j \geqslant a_n \Leftrightarrow i + j \geqslant n$.

PG-4 Per a tot $i \in L$, $I(i, 0) = S(n - i, 0) = n - i$. Així, aquesta propietat se satisfà independentment que S sigui additivament generable o no.

PG-5 Per a tot $i, j \in L$, $I_S(i, j) \geqslant j$ és equivalent a $S(N(i), j) \geqslant j$. Com que $S(n - i, j) \geqslant \max\{n - i, j\}$ llavors és obvi que serà $S(n - i, j) \geqslant j$. Per tant, aquesta propietat es verifica qualsevol que sigui la t–conorma S.

PG-6 Com S i T són N–duals, la desigualtat $T(i, I(i, j)) \leqslant j$ ens queda $n - S(n - i, n - S(n - i, j)) \leqslant j$ $\forall i, j \in L$, és a dir, $S(n - i, n - S(n - i, j)) \geqslant n - j$. Si prenem $(0, a_1, \dots, a_n)$ un generador de S, llavors la condició esdevé d'acord amb $S(r, s) \geqslant t$ si, i només si, $a_t \leqslant a_r + a_s$:

$$a_{n-j} \leqslant a_i + a_{n-S(i,j)} \tag{5.3}$$

Anem a veure que aquesta desigualtat equival a les dues condicions següents:

i) $a_i + a_j \geqslant a_n \Longrightarrow i + j \geqslant n$.

ii) $a_i + a_j < a_n \Longrightarrow \exists k < n$ tal que $\begin{cases} a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1} \\ a_{n-j} \leqslant a_i + a_{n-k} \end{cases}$

En efecte, suposem que es cumpleix (5.3). Si $a_i + a_j \geqslant a_n$ aleshores $S(i, j) = n$ i la desigualtat ens queda $a_{n-j} \leqslant a_i$ i, per tant, $n - j \leqslant i$, és a dir, $i + j \geqslant n$. Si $a_i + a_j < a_n$, aleshores $k = S(i, j) < n$ i, així, $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1}$. Per altra part, la desigualtat (5.3) ens diu $a_{n-j} \leqslant a_i + a_{n-k}$.

Recíprocament, suposem que es verifiquen les condicions i) – ii). Si $S(i, j) = n$, aplicant la primera condició tenim $i + j \geqslant n$ i, per tant, $a_{n-j} \leqslant a_i$ i la desigualtat (5.3) se satisfà. En el cas $S(i, j) < n$ ha de ser $a_i + a_j < a_n$. I, per la condició ii), existeix k tal que $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1}$. Si $S(i, j) = k'$ llavors ha de ser $a_{k'} \leqslant a_i + a_j < a_{k'+1}$ d'on es dedueix $k' = k$. Finalment, $a_{n-j} \leqslant a_i + a_{n-k}$ coincideix amb (5.3).

En particular, el generador $(0, 1, \dots, n)$ n'és una solució particular, que correspon a la t–conorma de Łukasiewicz. També el generadors $(0, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 16)$ i $(0, 1, 2, 6, 10, 15, 20, 24, 28, 29, 30)$ en són solucions (no suaus). Més endavant es demostrarà que els generadors mixtos, dels quals en són exemple els dos darrers, satisfan les dues condicions i) – ii) anteriors. Queda pendent per a un treball futur trobar una caracterització més senzilla que la donada en aquest apartat.

PG-7 Per a tot $i \in L$, $S(N(i), N(i)) = N(i)$ equival a què $S(i,i) = i$, és a dir, $S = S_M$, idependentment que sigui additivament generable o no.

PG-8 Siguin $i, j, k \in L$. La propietat $I_S(i, I_S(j,k)) = I_S(j, I_S(i,k))$ queda com $S(n-i, S(n-j,k)) = S(n-j, S(n-i,k))$. Com que S és associativa i conmutativa, aquesta igualtat és trivialment satisfeta per a qualsevol t–conorma S.

A continuació es fa un estudi per a determinar generadors $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$, que satisfacin les condicions $a_i + a_{n-i} \geqslant a_n$ o $a_i + a_{n-i} = a_n$, $\forall i \in L$. L'estudi es farà en dos passos. En primer lloc, s'estudiaran generadors tancats per la suma, de tal manera que aquestes condicions siguin fàcilment tractables, i seguidament es consideraran generadors concaus i generadors convexos a causa de la relació directa que tenen amb aquestes propietats. En segon lloc, a la secció següent, es consideraran generadors que satisfacin la propietat $a_i + a_{n-i} = a_n$ $\forall i \in L$, que anomenarem generadors mixtos, i se'n mostraran exemples associatius obtinguts a partir dels generadors de les t–conormes bàsiques.

Generadors tancats per la suma del tipus $f_k = \big(0, (k+1)d, \ldots, (k+n)d\big)$, $d > 0$

Un generador del tipus $f_k = \big(0, (k+1)d, \ldots, (k+n)d\big)$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, el rang del qual és tancat per la suma, correspon, d'acord amb la Proposició 4.3.5, a la t–conorma $S_k(i,j) = \min\{i+j+k, n\}$. En particular, $S_0 = S_Ł$ i $S_{n-2} = S_D$. Aquestes t–conormes són suaus sobre $L^* = L - \{0\}$ i estrictament creixents fora de la regió n.

Per aquests generadors tenim que

$$\begin{aligned} a_i + a_j \geqslant a_n \quad &\Leftrightarrow \quad (k+i)d + (k+j)d \geqslant (k+n)d \\ &\Leftrightarrow \quad i + j \geqslant n - k \end{aligned} \tag{5.4}$$

D'aquí es dedueix immediatament que

Proposició 5.2.8 *Sigui* $f_k = \big(0, (k+1)d, \ldots, (k+n)d\big)$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$. *Aleshores*

$$i + j \geqslant n \implies a_i + a_j \geqslant a_n.$$

DEMOSTRACIÓ: Si $i + j \geqslant n$ també és $i + j \geqslant n - k$.

Per tant,

Proposició 5.2.9 *Sigui* S_k *una t–conorma de la família corresponent, amb* $k = 0, 1, \ldots, n-2$. *Aleshores la* S_k*–implicació satisfà el principi d'identitat:*

$$I_{S_k}(i,i) = n \quad \forall i \in L.$$

DEMOSTRACIÓ: La propietat és, en termes de generadors additius, equivalent a $a_{n-i} + a_i \geqslant a_n$, que és satisfeta pels generadors f_k de S_k. □

A més, de (5.4) també tenim la proposició següent.

Proposició 5.2.10 *Sigui* S_k *la t–conorma amb generador* f_k, *amb* $k = 0, 1, \ldots, n-2$. *Aleshores*

$$\Big\langle I_{S_k}(i,j) = n \Leftrightarrow i \leqslant j \Big\rangle \iff S_k = S_Ł.$$

DEMOSTRACIÓ: D'acord amb (5.4), $a_i + a_j \geqslant a_n \Leftrightarrow i + j \geqslant n$ si, i només si, $k = 0$. □

Generadors concaus i generadors convexos

Sigui $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un generador concau que, d'acord amb l'Observació 4.4.2, és de la forma $a_i = \sum_{k=1}^{i} d_k$, essent d_k una successió mònòtona decreixent, $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$.

Proposició 5.2.11 *Sigui* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *un generador additiu concau. Aleshores* $i + j \geqslant n \ \Rightarrow \ a_i + a_j \geqslant a_n$.

Demostració: Si f és un generador additiu concau i es consideren $i + j \geqslant n$,

$$\begin{aligned} a_i + a_j &= d_1 + d_2 + \ldots + d_i + d_1 + d_2 + \ldots + d_j \\ &\geqslant d_1 + d_2 + \ldots + d_i + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-i} && (j \geqslant n - i) \\ &\geqslant d_1 + d_2 + \ldots + d_i + d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots + d_n && (\{d_n\} \text{ decreixent}) \\ &= a_n \end{aligned}$$

□

Observació 5.2.12 *Si* $d_1 = d_n$ *aleshores el generador concau* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *genera la t–conorma* S_L*, que també satisfà el recíproc. En canvi, hi ha generadors concaus amb* $d_1 > d_n$ *que no el satisfan:* $f = (1,\ 1.1,\ 1.11,\ 1.111,\ 1.1111)$ *és concau i satisfà que* $a_1 + a_3 > a_5$.

Conseqüentment, tenim la següent

Proposició 5.2.13 *Sigui* $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ *un generador concau associatiu i sigui* S *la t–conorma que determina. Aleshores la* S*–implicació corresponent* I_S *satisfà el principi d'identitat:* $I_S(i, i) = n$, $\forall i \in L$.

Demostració: Clarament se satisfà $a_{n-i} + a_i \geqslant a_n$. □

D'altra banda, sigui ara $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un generador convex que, d'acord amb l'Observació 4.4.6, és de la forma $a_i = \sum_{k=1}^{i} d_k$, essent d_k una successió mònòtona creixent, $0 < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$.

Proposició 5.2.14 *Si* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *és un generador additiu convex, llavors* $a_i + a_j \geqslant a_n \ \Rightarrow \ i + j \geqslant n$.

Demostració: Si f és un generador additiu convex i es consideren $i \leqslant j$,

$$\begin{aligned} a_i + a_j \geqslant a_n &\Rightarrow d_1 + \ldots + d_i + d_1 + \ldots + d_j \geqslant d_1 + \ldots + d_n \\ &\Rightarrow d_1 + \ldots + d_i \geqslant d_{j+1} + \ldots + d_n \end{aligned}$$

Així,

$$\begin{aligned} i \cdot d_i &\geqslant d_1 + \ldots + d_i \\ &\geqslant d_{j+1} + \ldots + d_n \\ &\geqslant (n - j) d_{j+1} \\ &\geqslant (n - j) d_i \end{aligned}$$

i, per tant, $i + j \geqslant n$. □

Observació 5.2.15 *Novament, si* $d_1 = d_n$*, el generador convex* $f = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *genera la t–conorma* S_L*, que també satisfà el recíproc. En canvi, si* $d_1 < d_n$*, el recíproc és fals:*

$$\begin{aligned} a_1 + a_{n-1} &= 2d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{n-1} \\ &< d_1 + d_2 + \ldots + d_n \\ &= a_n \end{aligned}$$

Proposició 5.2.16 *Sigui* $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ *un generador associatiu que sigui concau i convex alhora. Llavors la* S*–implicació determinada per* f *satisfà la propietat d'ordre.*

En resum,

- El compliment de les propietats P1, P4, P5, P7 i P8 és independent de què S tengui generador additiu o no: mentre que P7 només la satisfà I_{S_M}, les altres quatre se satisfan sempre.

- La propietat P2 se satisfà per a tota S_k–implicació i per a tota S–implicació on la t–conorma sigui additivament generada per un generador concau associatiu. En particular, el generador habitual de la t–conorma de Łukasiewicz és dels dos tipus anteriors. Això demostra que hi ha t–conormes additivament generables S, a més de les suaus, de manera que les S–implicacions corresponents satisfan el principi d'identitat. Veure Proposició 5.2.5.

- Per generadors associatius concaus i convexos, la propietat P3 se satisfà. Per altra part sabem que l'únic generador concau i convex és $(0, d, 2d, \dots, nd)$. Per tant, aquest tipus de generadors no aporten, a part de la implicació de Łukasiewicz, nous exemples de S–implicacions verificant la propietat d'ordre.

A continuació estudiarem els generadors mixtos que ens serviran per a obtenir S–implicacions que satisfacin les propietats P2, P3 i P6. Vegem primer alguns resultats previs.

Condicions suficients per a PG-2, PG-3 i PG-6

Proposició 5.2.17 *Sigui* $f = (0, a_1, \dots, a_n)$, *un generador. Aleshores*

$$\Big\langle a_i + a_{n-i} = a_n \quad \forall i \in L \Big\rangle \Longleftrightarrow \Big\langle a_i + a_j = a_n \Leftrightarrow i + j = n \quad \forall i, j \in L \Big\rangle$$

DEMOSTRACIÓ: Vegem només la implicació directe, doncs la recíproca és evident. Suposem que $a_i + a_{n-i} = a_n$ $\forall i \in L$. Siguin $i, j \in L$ tals que $a_i + a_j = a_n$. Com que també $a_i + a_{n-i} = a_n$ llavors $a_{n-i} = a_j$ i, per tant, $i + j = n$. D'altra banda, si $i, j \in L$ són tals que $i + j = n$ llavors, $j = n - i$ i, per tant, $a_i + a_j = a_n$. □

Proposició 5.2.18 *Sigui* $f = (0, a_1, \dots, a_n)$, *un generador. Aleshores*

$$\Big\langle a_i + a_{n-i} = a_n \ \forall i \in L \Big\rangle \Longrightarrow \Big\langle a_i + a_j \geqslant a_n \Leftrightarrow i + j \geqslant n \Big\rangle.$$

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $a_i + a_j > a_n$ (el cas $a_i + a_j = a_n$ és evident). Com que $a_i + a_{n-i} = a_n$ per hipòtesi, llavors deduïm que $a_j > a_{n-i}$, i pel creixement de f, $j > n - i$. Suposem ara $i + j \geqslant n$. En aquest cas, $a_i + a_j \geqslant a_i + a_{n-i} = a_n$. □

Observem que el recíproc d'aquest resultat no és cert, en general, tal com es mostra a continuació.

Observació 5.2.19 *El generador sobre* L_5 *donat per* $f = (0, 2, 3, 4, 6, 7)$ *satisfà que* $a_i + a_j \geqslant a_5 \Leftrightarrow i + j \geqslant 5$ *però en canvi* $a_1 + a_4 \neq a_5$.

Proposició 5.2.20 *Sigui* $f = (0, a_1, \dots, a_n)$ *un generador tal que* $a_i + a_{n-i} = a_n$ $\forall i \in L$. *Llavors* g *satisfà la propietat PG-6.*

DEMOSTRACIÓ: Si $i, j \in L$ són tals que $a_i + a_j \geqslant a_n$ llavors tenim $a_i + a_j \geqslant a_i + a_{n-i}$ i, per tant, $a_j \geqslant a_{n-i}$. Així, $j \geqslant n - i$, és a dir, $i + j \geqslant n$. En canvi, si $i, j \in L$ són tals que $a_i + a_j < a_n$, sigui $k = \max\{k_0 \ ; \ a_{k_0} \leqslant a_i + a_j\}$. Llavors $k < n$ i $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1}$. D'altra banda, $a_{n-i} = a_n - a_i$ $\forall i \in L$. Així, com que $a_k \leqslant a_i + a_j$ llavors $a_n + a_k \leqslant a_n + a_i + a_j$, és a dir, $a_n - a_j \leqslant a_i + a_n - a_k$ i, per tant, $a_{n-j} \leqslant a_i + a_{n-k}$. □

Proposició 5.2.21 *Sigui* $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ *un generador tal que* $a_i + a_{n-i} = a_n$ $\forall i \in L$. *Llavors* f *satisfà les propietats PG-2, PG-3 i PG-6.*

DEMOSTRACIÓ: La propietat PG-2 es satisfà trivialment: $a_i + a_{n-i} \geqslant a_n$ $\forall i \in L$. Aplicant la Proposició 5.2.18 és clar que un generador que satisfà aquesta condició també satisfà PG-3: $a_i + a_j \geqslant a_n \Leftrightarrow i + j \geqslant n$. La proposició anterior ens demostra que un generador d'aquests satisfà la propietat PG-6. □

5.2.2 *Generadors mixtos*

En aquesta secció es construeixen els generadors mixtos, generadors $(0, a_1, \ldots, a_n)$ tals que $a_i + a_{n-i} = a_n$ $\forall i \in L$. D'acord amb la Proposició 5.2.21, les S–implicacions on S és additivament generada per un generador construit així i que sigui associatiu satisfan les propietats P2 (principi d'identitat), P3 (propietat d'ordre) i P6 (modus ponens generalitzat). D'aquests es consideren principalment els generadors mixtos que són meitat convexos i meitat concaus, i se'n determinen tres famílies de generadors associatius a partir dels geneneradors de les t–conormes bàsiques.

Definició 5.2.22 *Direm que* $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ *és un generador mixt si satisfà* $a_i + a_{n-i} = a_n$ $\forall i \in L$.

La proposició que ve a continuació mostra la forma que tenen aquests generadors.

Proposició 5.2.23 *Un generador* $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ *és mixt si, i només si, existeix* $0 < k < n$ *de tal manera que:*

SI n PARELL: $a_n = 2a_k$ *i* $a_{k+r} = a_n - a_{k-r}$ $r = 1, \ldots, k$.

SI n SENAR: $a_n = a_{k-1} + a_k$ *i* $a_{k+r} = a_n - a_{k-1-r}$ $r = 1, \ldots, k-1$

DEMOSTRACIÓ: En el cas que n és parell, prenem $k = \frac{n}{2}$. Suposem que $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ és mixt. Aleshores, clarament $a_n = 2a_k$ (perquè $k = n - k$) i $a_{k-r} + a_{n-(k-r)} = a_n$ implica $a_{k+r} = 2a_k - a_{k-r}$. Recíprocament, si $0 \leqslant i < k$ llavors $a_i + a_{n-i} = a_{k-(k-i)} + a_{n-(k-(k-i))} = a_{k-(k-i)} + a_{k+(k-i)} = a_n$ en canvi, si $i = k$ llavors $a_i + a_{n-i} = a_k + a_k = a_n$.

D'altra banda, en el cas que n és senar, prenem $k = \frac{n+1}{2}$. Suposem en primer lloc que $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ és mixt. Aleshores, com que $k + k - 1 = n$ llavors $a_n = a_k + a_{k-1}$. A més, si $0 \leqslant r \leqslant k-1$, llavors $a_{k-r} + a_{n-(k-r)} = a_n$ implica $a_{k+r-1} = a_n - a_{k-r}$. Recíprocament, si $0 \leqslant i \leqslant k$ llavors $a_i + a_{n-i} = a_{k-(k-i)} + a_{n-(k-(k-i))} = a_{k-(k-i)} + a_{k+(k-i)-1} = a_n$ (basta agafar $r = k - i - 1$). □

En aquest apartat que segueix es presentaran uns casos particulars de generadors mixtos, els generadors meitat convexos i meitat concaus. Tot seguit s'estudien aquests generadors quan es construeixen a partir dels generadors estàndars de les tres t–conormes bàsiques.

Per al cas del generador (estàndard) de la t–conorma màxim, com que aquest és convex, llavors de forma directa s'obtenen generadors mixtos que amb la primera part convexa (i la segona còncava). Però fent ús de la Proposicio 4.4.15, a partir d'aquest generador de la t–conorma màxim es pot construir el corresponent generador concau, de tal manera que permet obtenir un generador mixt amb la primera meitat còncava (i la segona convexa). Aquests generadors mixts són associatius. De forma similar, en el cas del generador de la t–conorma dràstica s'obté directament el generador mixt amb la primera part que sigui còncava, i fent ús de la Proposicio 4.4.15, s'obté un generador convex i, d'aquí, el corresponent generador mixt amb la primera part convexa. Només els primers són associatius mentre que aquests darrers no ho són en general. A partir de diversos generadors de la t–conorma de Łukasiewicz s'estudien els generadors mixtos que se n'obtenen.

Igual que en la proposició anterior, a partir d'ara es fa necessari separar el cas n senar del cas n parell, tot i que sovint són casos similars.

Generadors convex-concaus i concau-convexos sobre L_n, amb n parell

Els generadors mixtos estan formats per dos blocs, el primer dels quals determina el segon. Més encara, si el primer és convex (respec. concau) llavors el segon és concau (respec. convex).

Proposició 5.2.24 *Sigui n un enter positiu parell i sigui $f = (0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots a_n)$ un generador mixt, $n = 2k$. Aleshores:*

1. *Si $(0, a_1, \dots, a_k)$ és convex llavors $(0, a_{k+1} - a_k, a_{k+2} - a_k, \dots, a_n - a_k)$ és concau.*
2. *Si $(0, a_1, \dots, a_k)$ és concau llavors $(0, a_{k+1} - a_k, a_{k+2} - a_k, \dots, a_n - a_k)$ és convex.*

DEMOSTRACIÓ:

1. Si $(0, a_1, \dots, a_k)$ és convex llavors $a_1 \leqslant a_2 - a_1 \leqslant \dots \leqslant a_k - a_{k-1}$. D'altra banda, $a_{k+r+1} - a_{k+r} = (2a_k - a_{k-(r+1)}) - (2a_k - a_{k-r}) = a_{k-r} - a_{k-r-1}$. Per tant, si r satisfà $0 \leqslant r \leqslant k-1$ llavors $(a_{k+r+1} - a_k) - (a_{k+r} - a_k) = a_{k+r+1} - a_{k+r} = a_{k-r} - a_{k-r-1} \geqslant a_{k-r-1} - a_{k-r-2} = a_{k+r+2} - a_{k+r+1} = (a_{k+r+2} - a_k) - (a_{k+r+1} - a_k)$. Per tant, $(0, a_{k+1} - a_k, a_{k+2} - a_k, \dots, a_n - a_k)$ és concau.
2. De forma similar, si $(0, a_1, \dots, a_k)$ és concau llavors $a_1 \geqslant a_2 - a_1 \geqslant \dots \geqslant a_k - a_{k-1}$. Així, si r satisfà $0 \leqslant r \leqslant k-1$ llavors $(a_{k+r+1} - a_k) - (a_{k+r} - a_k) = a_{k+r+1} - a_{k+r} = a_{k-r} - a_{k-r-1} \leqslant a_{k-r-1} - a_{k-r-2} = a_{k+r+2} - a_{k+r+1} = (a_{k+r+2} - a_k) - (a_{k+r+1} - a_k)$. Per tant, $(0, a_{k+1} - a_k, a_{k+2} - a_k, \dots, a_n - a_k)$ és convex. □

Observació 5.2.25 *D'aquesta proposició se'n dedueix que si la primera part d'un generador mixt f, $(0, a_1, \dots, a_k)$ és convexa (resp. còncava), llavors el generador complet, $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ és meitat convex i meitat concau (resp. meitat concau i meitat convex).*

Per tant, es fa necessària la següent

Definició 5.2.26

- *Un generador mixt la primera part del qual sigui convexa en direm generador convex–concau.*
- *Un generador mixt la primera part del qual sigui còncava en direm generador concau–convex.*

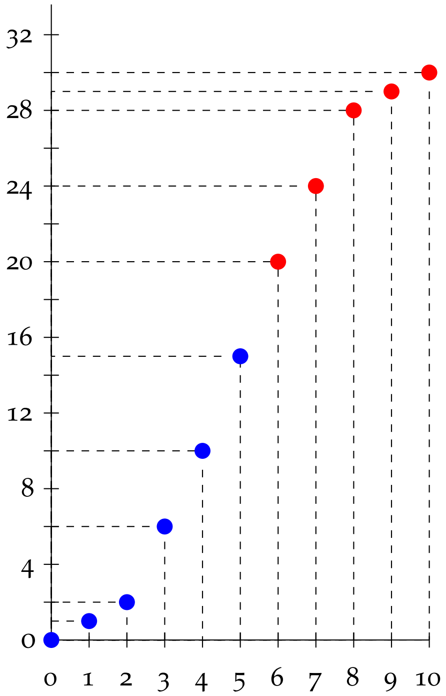
Hi ha generadors convex–concaus (igualment concau-convexos) associatius i d'altres que no. L'exemple següent mostra un exemple de cada.

Exemple 5.2.27 *Considerem els generadors de la Taula 15 sobre L_{10}.*

	Associatiu	No associatiu
convex–concau	$(0,1,2,6,10,15,20,24,28,29,30)$	$(0,1,3,6,10,15,20,24,27,29,30)$
concau–convex	$(0,5,9,12,14,15,16,18,21,25,30)$	$(0,5,8,11,13,15,17,19,22,25,30)$

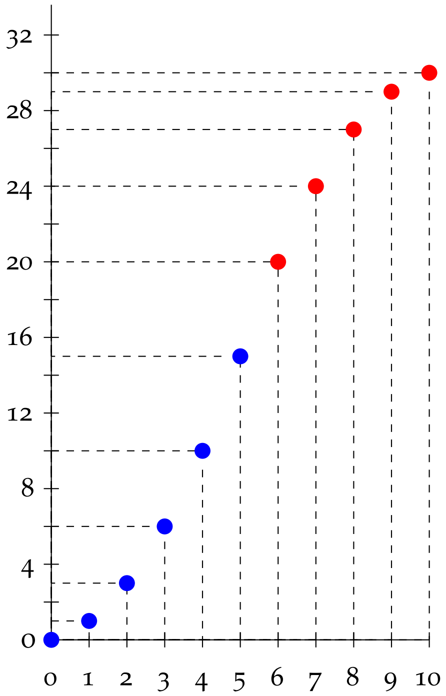
Taula 15. Exemples de generadors mixtos sobre L_{10} associatius i no associatius

Aquests exemples estan representats en les figures que vénen a continuació. La Figura 17 mostra els generadors convex-concaus, mentre que la Figura 18 mostra els concau-convexos. En vermell la part còncava i en blau la part convexa.



F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	2	3	4	5	6	7	9	10	10
2	2	2	2	3	4	5	6	7	10	10	10
3	3	3	3	4	5	6	7	10	10	10	10
4	4	4	4	5	6	7	10	10	10	10	10
5	5	5	5	6	7	10	10	10	10	10	10
6	6	6	6	7	10	10	10	10	10	10	10
7	7	7	7	10	10	10	10	10	10	10	10
8	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10
9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Generador associatiu $f = (0, 1, 2, 6, 10, 15, 20, 24, 28, 29, 30)$

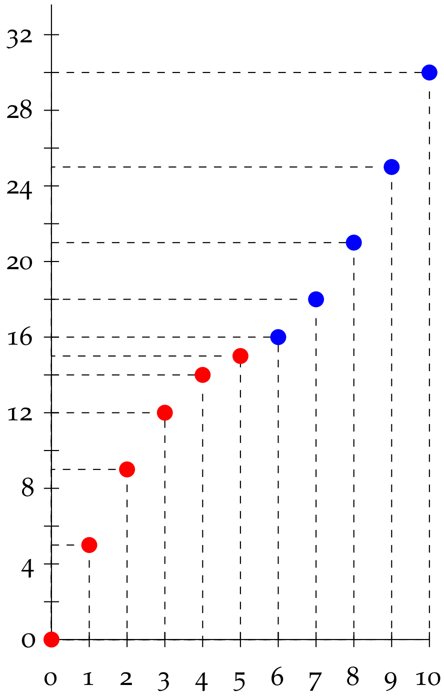


F_g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	10
2	2	2	3	3	4	5	6	8	10	10	10
3	3	3	3	4	5	6	7	10	10	10	10
4	4	4	4	5	6	7	10	10	10	10	10
5	5	5	5	6	7	10	10	10	10	10	10
6	6	6	6	7	10	10	10	10	10	10	10
7	7	7	8	10	10	10	10	10	10	10	10
8	8	8	10	10	10	10	10	10	10	10	10
9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Generador no associatiu $g = (0, 1, 3, 6, 10, 15, 20, 24, 27, 29, 30)$

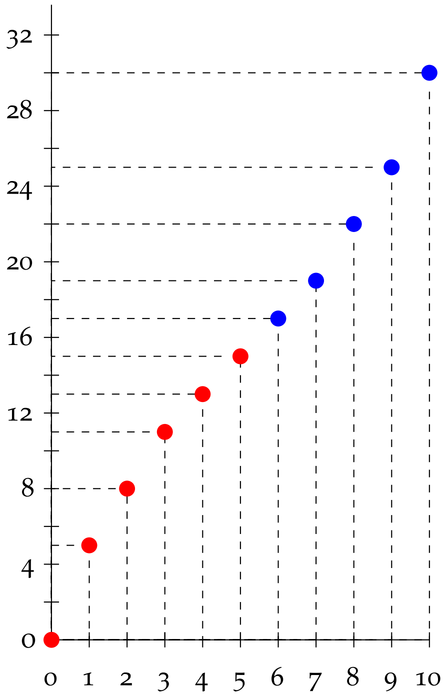
Figura 17. Dos exemples de generadors convex–concaus sobre L_{10} i les seves taules corresponents

Observem que g no és associatiu: $F_g(F_g(2, 2), 6) = F_g(3, 6) = 7$ mentre que $F_g(2, F_g(2, 6)) = F_g(2, 6) = 6$.



F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	6	7	7	8	8	9	10	10
2	2	4	7	8	8	8	9	9	10	10	10
3	3	6	8	8	9	9	9	10	10	10	10
4	4	7	8	9	9	9	10	10	10	10	10
5	5	7	8	9	9	10	10	10	10	10	10
6	6	8	9	9	10	10	10	10	10	10	10
7	7	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10
8	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10
9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Generador associatiu $f = (0, 5, 9, 12, 14, 15, 16, 18, 21, 25, 30)$



F_g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	5	6	7	8	8	9	10	10
2	2	4	5	7	7	8	9	9	10	10	10
3	3	5	7	8	8	9	9	10	10	10	10
4	4	6	7	8	9	9	10	10	10	10	10
5	5	7	8	9	9	10	10	10	10	10	10
6	6	8	9	9	10	10	10	10	10	10	10
7	7	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10
8	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10
9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Generador no associatiu $g = (0, 5, 8, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 25, 30)$

Figura 18. Dos exemples de generadors concau–convexos sobre L_{10} i les seves taules corresponents

Observem que aquest generador no és associatiu: $F_g(F_g(1, 1), 2) = F_g(2, 2) = 5$ mentre que $F_g(1, F_g(1, 2)) = F_g(1, 4) = 6$.

Generadors convex-concaus i concau-convexos sobre L_n, amb n senar

Proposició 5.2.28 *Sigui n un enter positiu senar i sigui $f = (0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots a_n)$ un generador mixt, $n = 2k - 1$. Aleshores:*

1. *Si $(0, a_1, \dots, a_k)$ és convex llavors $(0, a_k - a_{k-1}, a_{k+1} - a_{k-1}, \dots, a_n - a_{k-1})$ és concau.*
2. *Si $(0, a_1, \dots, a_k)$ és concau llavors $(0, a_k - a_{k-1}, a_{k+1} - a_{k-1}, \dots, a_n - a_{k-1})$ és convex.*

Demostració:

1. Si $(0, a_1, \dots, a_k)$ és convex llavors $a_1 \leqslant a_2 - a_1 \leqslant \dots \leqslant a_k - a_{k-1}$. D'altra banda, $a_{k+r} - a_{k+r-1} = (a_n - a_{k-r-1}) - (a_n - a_{k-r}) = a_{k-r} - a_{k-r-1}$. Per tant, si r satisfà $0 \leqslant r \leqslant k-2$ llavors $(a_{k+r} - a_{k-1}) - (a_{k+r-1} - a_{k-1}) = a_{k+r} - a_{k+r-1} = a_{k-r} - a_{k-r-1} \geqslant a_{k-r-1} - a_{k-r-2} = a_{k+r+1} - a_{k+r} = (a_{k+r+1} - a_{k-1}) - (a_{k+r} - a_{k-1})$. Per tant, $(0, a_k - a_{k-1}, a_{k+1} - a_{k-1}, \dots, a_n - a_{k-1})$ és concau.
2. De forma similar, si $(0, a_1, \dots, a_k)$ és concau llavors $a_1 \geqslant a_2 - a_1 \geqslant \dots \geqslant a_k - a_{k-1}$. D'altra banda, $a_{k+r} - a_{k+r-1} = (a_n - a_{k-r-1}) - (a_n - a_{k-r}) = a_{k-r} - a_{k-r-1}$. Per tant, si r satisfà $0 \leqslant r \leqslant k-2$ llavors $(a_{k+r} - a_{k-1}) - (a_{k+r-1} - a_{k-1}) = a_{k+r} - a_{k+r-1} = a_{k-r} - a_{k-r-1} \leqslant a_{k-r-1} - a_{k-r-2} = a_{k+r+1} - a_{k+r} = (a_{k+r+1} - a_{k-1}) - (a_{k+r} - a_{k-1})$. Per tant, $(0, a_k - a_{k-1}, a_{k+1} - a_{k-1}, \dots, a_n - a_{k-1})$ és convex. □

Per aquest cas també hi ha generadors associatius i d'altres que no. L'exemple següent mostra un exemple de cada.

Exemple 5.2.29 *Considerem els generadors de la Taula 16 amb $n = 9$.*

	Associatiu	No associatiu
convex–concau	$(0,1,2,5,10,15,20,23,24,25)$	$(0,1,3,6,10,15,19,22,24,25)$
concau–convex	$(0,5,9,11,12,13,14,16,20,25)$	$(0,5,8,11,12,13,14,17,20,25)$

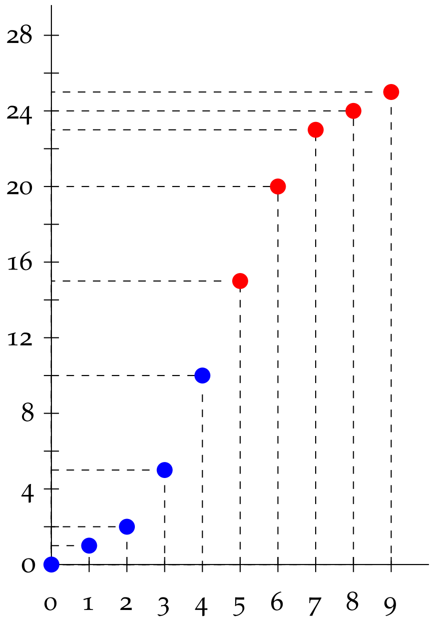
Taula 16. Exemples de generadors mixtos sobre L_9 associatius i no associatius

Aquests exemples estan representats en les figures que vénen a continuació. La Figura 19 mostra els generadors convex-concaus, mentre que la Figura 20 mostra els concau-convexos. En vermell la part còncava i en blau la part convexa.

5.2.3 *Generadors mixtos a partir del generador estàndard de la t–conorma màxim*

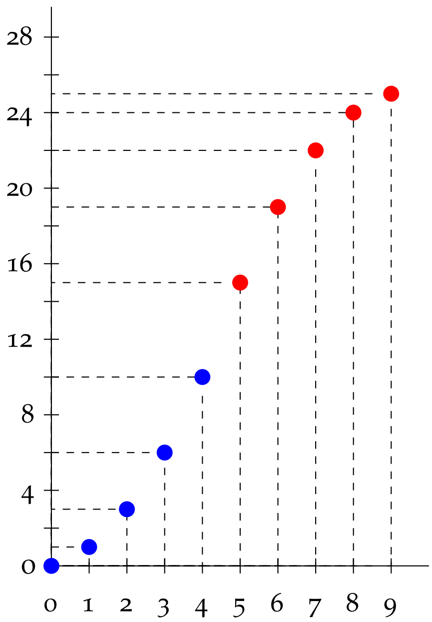
El problema que es planteja ara és el de caracteritzar generadors mixtos associatius o, si més no, determinar famílies de generadors d'aquest tipus que ho siguin. En aquesta secció es mostraran generadors mixtos, convex–concaus i concau-convexos, associatius, construïts a partir del generador estàndard de la t–conorma màxim (vegi's Proposició 3.1.10). Aquest generador és convex (Exemple 4.4.7), fet que permet construir els generadors convex–concaus; en canvi, si s'agafa aquest generador i se li aplica la Proposició 4.4.15 s'obté un generador concau, que permetrà construir els generadors concau–convexos.

Es distingiran dos casos, segons si n és parell o senar.



F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	2	3	4	5	6	8	9	9
2	2	2	2	3	4	5	6	9	9	9
3	3	3	3	4	5	6	9	9	9	9
4	4	4	4	5	6	9	9	9	9	9
5	5	5	5	6	9	9	9	9	9	9
6	6	6	6	9	9	9	9	9	9	9
7	7	8	9	9	9	9	9	9	9	9
8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Generador associatiu $f = (0, 1, 2, 5, 10, 15, 20, 23, 24, 25)$

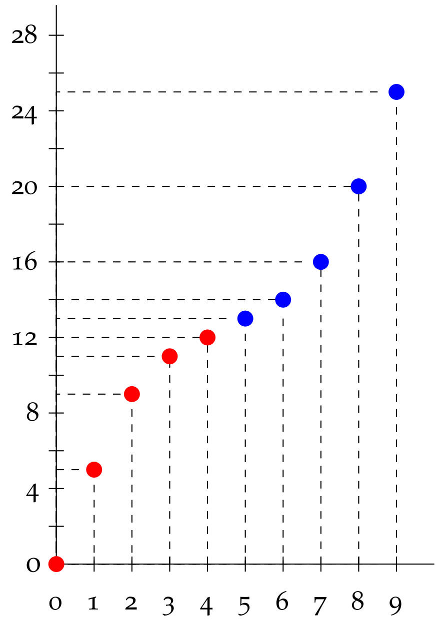


F_g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	2	3	4	5	6	7	9	9
2	2	2	3	3	4	5	7	9	9	9
3	3	3	3	4	5	6	9	9	9	9
4	4	4	4	5	6	9	9	9	9	9
5	5	5	5	6	9	9	9	9	9	9
6	6	6	7	9	9	9	9	9	9	9
7	7	7	9	9	9	9	9	9	9	9
8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Generador no associatiu $g = (0, 1, 3, 6, 10, 15, 19, 22, 24, 25)$

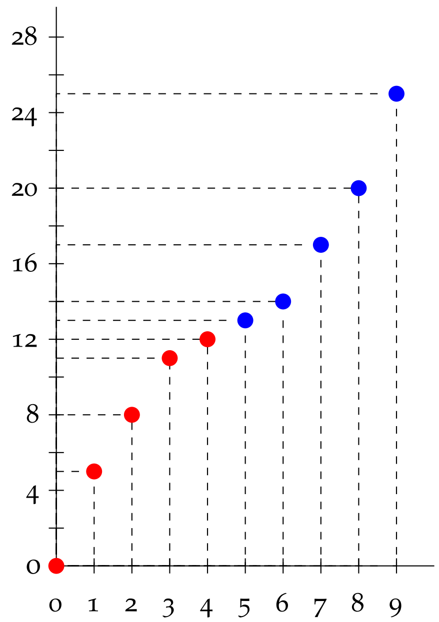
Figura 19. Dos exemples de generadors convex–concaus sobre L_9 i les seves taules corresponents

Observem que aquest generador no és associatiu: $F_g(F_g(2, 2), 3) = F_g(3, 3) = 4$ mentre que $F_g(2, F_g(2, 3)) = F_g(2, 3) = 3$.



F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	6	7	7	7	7	8	9	9
2	2	6	7	8	8	8	8	9	9	9
3	3	7	8	8	8	8	9	9	9	9
4	4	7	8	8	8	9	9	9	9	9
5	5	7	8	8	9	9	9	9	9	9
6	6	7	8	9	9	9	9	9	9	9
7	7	8	9	9	9	9	9	9	9	9
8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Generador associatiu $f = (0, 5, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 20, 25)$



F_g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	5	6	7	7	7	8	9	9
2	2	5	6	7	8	8	8	9	9	9
3	3	6	7	8	8	8	9	9	9	9
4	4	7	8	8	8	9	9	9	9	9
5	5	7	8	8	9	9	9	9	9	9
6	6	7	8	9	9	9	9	9	9	9
7	7	8	9	9	9	9	9	9	9	9
8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Generador no associatiu $g = (0, 5, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 20, 25)$

Figura 20. Dos exemples de generadors concau–convexos sobre L_9 i les seves taules corresponents

Observem que g no és associatiu: $F_g(F_g(1,1),2) = F_g(2,2) = 6$ mentre que $F_g(1, F_g(1,2)) = F_g(1,5) = 7$.

Generadors mixtos a partir del generador estàndard de la t–conorma màxim, n parell

Sigui $n = 2k$, per algun k enter positiu, i considerem el generador (mixt) convex–concau construït prenent la primera part, la part convexa, el generador de la t–conorma màxim sobre L_k d'acord amb la Definició 5.2.22 i la Proposició 5.2.24. La Taula 17 mostra aquests generadors per a diversos valors de k. En la Figura 21 hi ha representat un d'aquests generadors i la taula corresponent; en vermell la part còncava i en blau la part convexa.

k	generador
1	$(0, 1, 2)$
2	$(0, 1, 3, 5, 6)$
3	$(0, 1, 3, 7, 11, 13, 14)$
4	$(0, 1, 3, 7, 15, 23, 27, 29, 30)$
5	$(0, 1, 3, 7, 15, 31, 47, 55, 59, 61, 62)$
6	$(0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 95, 111, 119, 123, 125, 126)$
7	$(0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 191, 223, 239, 247, 251, 253, 254)$
8	$(0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 383, 447, 479, 495, 503, 507, 509, 510)$

Taula 17. Generadors associatius convex–concaus, n parell

Aquests generadors són $f = (a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k})$ amb $a_i = 2^i - 1$, $i = 1, \dots, k$ i, d'acord amb la Definició 5.2.22, $a_i + a_{n-i} = a_n$. Per tant, $a_{k+i} = a_{2k} - a_{2k-(k+i)} = 2a_k - a_{k-i} = 2 \cdot (2^k - 1) - a_{k-i}$.

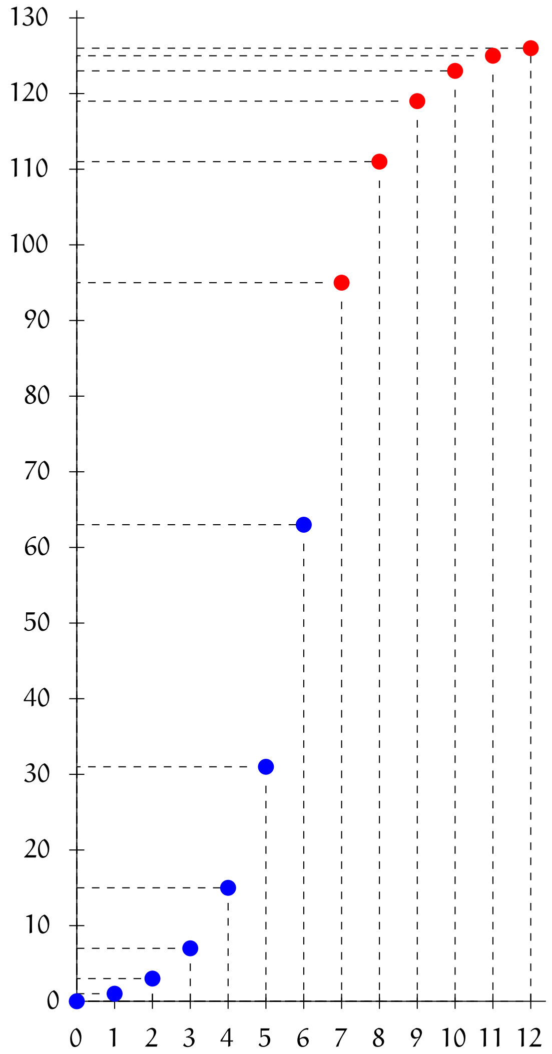
Proposició 5.2.30 *Els generadors* $f = (a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k})$ *convex–concaus donats per*

$$\begin{aligned} a_i &= 2^i - 1 \\ a_{k+i} &= 2 \cdot (2^k - 1) - a_{k-i} \end{aligned} \qquad i = 1, \dots, k$$

són associatius.

DEMOSTRACIÓ: S'ha de demostrar que $S(S(i, i'), i'') = S(i, S(i', i''))$, $\forall 1 \leqslant i, i', i'' \leqslant 2k$. En primer lloc, si dos qualsevol d'aquests elements, i, i', i'', són majors o igual que k llavors $S(S(i, i'), i'') = S(i, S(i', i'')) = n$, ja que $2a_k = a_n$. Per tant s'estudiaran només els tres casos amb almenys dos elements menors que k.

- Si $i, i', i'' \leqslant k$ amb, com a molt, algun d'ells igual a k, llavors es comprovarà que $S(S(i, i'), i'') = S(i, S(i, i'')) = \max\{i, i', i''\}$. En primer lloc, si $i < i' \leqslant k$ llavors $S(i, i') > k$, $a_i + a_{i'} \leqslant a_n + a_{n-1} = 2^k - 1 + 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1 + 2^k - 2^{k-1} - 1 = 2 \cdot (2^k - 1) - 2^{k-1} < 2 \cdot (2^k - 1) - (2^{k-1} - 1) = (2 \cdot 2^k - 1) - a_{k-1} = a_{k+1}$. Per tant, si $i \leqslant i' < k$ o $i < i' \leqslant k$ llavors $S(i, i') = \max\{i, i'\}$.
- Si $i \leqslant i' < k < k + j$ llavors $S(S(i, i'), k + j) = S(i', k + j)$. Es distingeixen dos subcasos:
  - Si $i' < k - j$ llavors $a_{k+j} \leqslant a_{i'} + a_{k+j} = 2^{i'} - 1 + 2 \cdot (2^k - 1) - (2^{k-j} - 1) = 2 \cdot (2^k - 1) + 2^{i'} - 2^{k-j} \leqslant 2 \cdot (2^k - 1) + 2^{k-j-1} - 2^{k-j} = 2 \cdot (2^k - 1) - 2^{k-j-1} < 2 \cdot (2^k - 1) - (2^{k-j-1} - 1) = a_{k+j+1}$ i, per tant, $S(i', k + j) = k + j$. D'altra banda, $S(i, S(i', k + j)) = S(i, k + j) = k + j$, aquesta darrera igualtat repetint aquest mateix procés amb i en comptes de i'.



$$f = (0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 95, 111, 119, 123, 125, 126)$$

F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	12
2	2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	12	12	12
3	3	3	3	3	4	5	6	7	8	12	12	12	12
4	4	4	4	4	4	5	6	7	12	12	12	12	12
5	5	5	5	5	5	5	6	12	12	12	12	12	12
6	6	6	6	6	6	6	12	12	12	12	12	12	12
7	7	7	7	7	7	12	12	12	12	12	12	12	12
8	8	8	8	8	12	12	12	12	12	12	12	12	12
9	9	9	9	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
10	10	10	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

Figura 21. Representació del generador convex–concau sobre L_{12} construït a partir del generador de la t–conorma màxim

  - Si $i' \geqslant k-j$ llavors $a_{i'} + a_{k+j} = 2^{i'} - 1 + 2 \cdot (2^k - 1) - (2^{k-j} - 1) = 2 \cdot (2^k - 1) + (2^{i'} - 2^{k-j}) \geqslant 2 \cdot (2^k - 1) = a_n$ i, per tant, $S(i', k+j) = n$. D'altra banda, $S(i, S(i', k+j)) = S(i, n) = n$.

- Si $i \leqslant i' < k < k+j$ llavors per a calcular $S(S(i, k+j), i')$ es distingeixen, ja d'entrada, tres subcasos semblants als de l'altre cas, per la qual cosa s'aprofitaran els càlculs anteriors.
  - Si $k-j \leqslant i \leqslant i'$ llavors $S(S(i, k+j), i') = S(n, i') = n$, i també $S(i, S(k+j, i')) = S(i, n) = n$.
  - Si $i < k-j \leqslant i'$ llavors $S(S(i, k+j), i') = S(k+j, i') = n$, i també $S(i, S(k+j, i')) = S(i, n) = n$.
  - Si $i \leqslant i' < k-j$ llavors és $S(S(i, k+j), i')S(k+j, i') = k+j$, i també $S(i, S(k+j, i') = S(i, k+j) = k+j$. □

I ara es mostraran els generadors concau–convexos, la primera part dels quals es construeix a partir del generador de la t–conorma després d'aplicar la Proposició 4.4.15, i la segona part és novament la que correspon en aplicar la Definició 5.2.22.

Sigui $n = 2k$ i sigui f el generador convex–concau considerat en la proposició anterior, $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2k})$ amb

$$\begin{aligned} a_i &= 2^i - 1 \\ a_{k+i} &= 2 \cdot (2^k - 1) - a_{k-i} \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, k$$

Considerem ara el generador $f = (0, b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{2k})$ donat per $b_i = a_k - a_{k-i}$ (Proposició 4.4.15) i $b_{k+i} = 2b_k - b_{k-i}$ (Definició 5.2.22), $i = 1, \ldots, k$. Llavors, és

$$\begin{aligned} b_i &= a_k - a_{k-i} \\ &= 2^k - 1 - (2^{k-i} - 1) \\ &= 2^k - 2^{k-i} \end{aligned}$$

i també

$$\begin{aligned} b_{k+i} &= 2b_k - b_{k-i} \\ &= 2 \cdot (2^k - 1) - (2^k - 2^i) \\ &= 2^k + 2^i - 2 \end{aligned}$$

En resum,

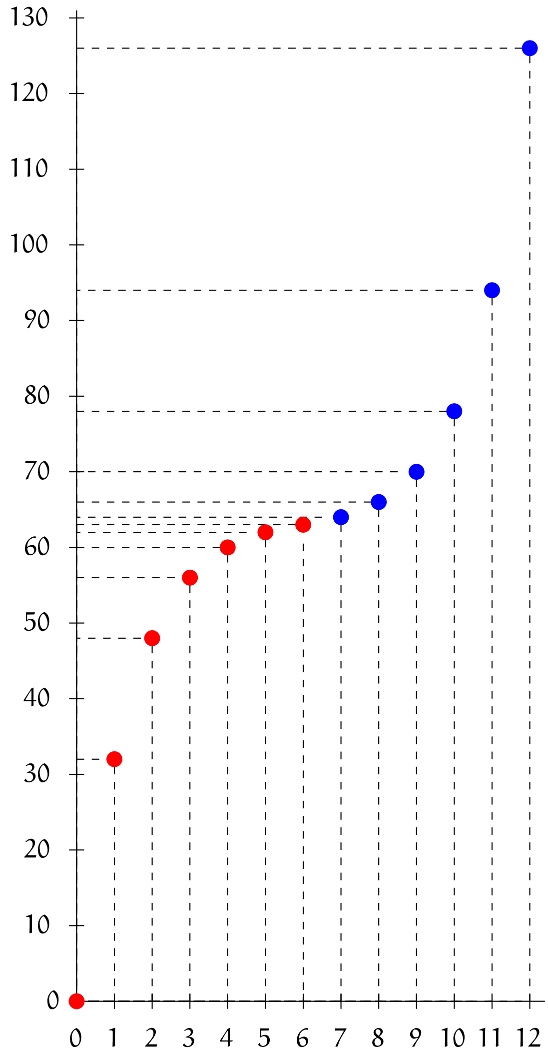
$$\begin{aligned} b_i &= 2^k - 2^{k-i} \\ b_{k+i} &= 2^k + 2^i - 2 \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, k$$

La Taula 18 en mostra els generadors concau–convexos per a diversos valors de k, i la Figura 22 mostra la representació per a $k = 6$ juntament amb la taula de la t–conorma asssociada; en vermell la part còncava i en blau la part convexa.

Proposició 5.2.31 *Els generadors* $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2k})$ *concau–convexos donats per*

$$\begin{aligned} a_i &= 2^k - 2^{k-i} \\ a_{k+i} &= 2^k + 2^i - 2 \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, k$$

són associatius.



$$f = (0, 32, 48, 56, 60, 62, 63, 64, 66, 70, 78, 94, 126)$$

F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	7	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12
2	2	10	11	11	11	11	11	11	11	11	12	12	12
3	3	10	11	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12
4	4	10	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12
5	5	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12
6	6	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12
7	7	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12
8	8	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12
9	9	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
10	10	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

Figura 22. Representació del generador concau–convex sobre L_{12} construït a partir del generador de la t–conorma màxim

k	generador
1	$(0, 1, 2)$
2	$(0, 2, 3, 4, 6)$
3	$(0, 4, 6, 7, 8, 10, 14)$
4	$(0, 8, 12, 14, 15, 16, 18, 22, 30)$
5	$(0, 16, 24, 28, 30, 31, 32, 34, 38, 46, 62)$
6	$(0, 32, 48, 56, 60, 62, 63, 64, 66, 70, 78, 94, 126)$
7	$(0, 64, 96, 112.120, 124, 126, 127, 128, 130, 134, 142, 158, 190, 254)$
8	$(0, 128, 192, 224, 240, 248, 252, 254, 255, 256, 258, 262, 270, 286, 318, 382, 510)$

Taula 18. Generadors associatius concau–convexos, n parell

DEMOSTRACIÓ: Fàcilment es comprova que ho són si $k \leqslant 3$. Sigui, per tant, $k > 3$. Hem de veure que $S(S(i, i'), i'') = S(i, S(i', i''))$ per a tot $i, i', i'' \in L$.

Comencem vegent que $S(1, 1) = k + 1$. En efecte, $2a_1 = 2 \cdot (2^k - 2^{k-1}) = 2^k = a_{k+1}$.

Vegem ara que $\forall j : 2 \leqslant j \leqslant k, \ S(1, j) = \begin{cases} 2k-2 & \text{si } j < k-1 \\ 2k-1 & \text{si } k-1 \leqslant j \leqslant k \end{cases}$. En efecte,

- Si $2 \leqslant j < k-1$, també és $k-j > 1$ i $k-1 \geqslant k-2$. Per tant $a_1 + a_j = 2^k - 2^{k-1} + 2^k - 2^{k-j} = 2^k + 2^{k-1} - 2k - j = 2^k + 2^{k-2} + 2^{k-2} - 2^{k-j} > 2^k + 2^{k-2} > 2^k + 2^{k-2} - 2 = a_{2k-2}$ i, també, $a_1 + a_j = 2^k - 2^{k-1} + 2^k - 2^{k-j} < 2^k + 2^{k-1} - 2 = a_{2k-1}$.

- $a_1 + a_{k-1} = 2^k - 2^{k-1} + 2^k - 2 = 2^k + 2^{k-1} - 2 = a_{2k-1}$, per la qual cosa $S(1, k-1) = 2k-1 \leqslant S(1, k)$. I, a més, $a_1 + a_k = 2^k - 2^{k-1} + 2^k < 2^k + 2^k - 2 = a_{2k}$.

Seguidament comprovarem que $S(S(1, 1), j) = S(1, S(1, j))$ per a tot j, $2 \leqslant j \leqslant k$.

1. Si $2 \leqslant j < k-1$. Com que $S(S(1, 1), j) = S(k+1, j)$, consideram $a_{k+1} + a_j = 2^k + 2^k - 2^{k-j}$. D'una banda, $2^k + 2^k - 2^{k-j} = 2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2^{k-j} > a_{2k-1}$, i de l'altra, $2^k + 2^k - 2^{k-j} < a_{2k}$. Per altra part, $S(1, S(1, j)) = S(1, 2k-2)$; així, $a_1 + a_{2k-2} = 2^k - 2^{k-1} + 2^k + 2^{k-2} - 2 = 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} - 2$. Per tant, $a_{2k-1} \leqslant a_1 + a_{2k-2} < a_{2k}$. Així doncs, $S(S(1, 1), j) = S(1, S(1, j)) = 2k-1$.

2. Si $j \geqslant k-1$. $S(S(1, 1), k-1) = S(k+1, k-1) = 2k$ ja que $a_{k+1} + a_{k-1} = 2^k + 2^k - 2 = a_{2k}$. I $S(1, S(1, k-1)) = S(1, 2k-1) = 2k$ perquè $a_1 + a_{2k-1} = 2^k - 2^{k-1} + 2^k + 2^{k-1} - 2 = a_{2k}$. I pel creixement de S, $S(S(1, 1), j) = 2k = S(1, S(1, j))$ per a tot $j \geqslant k$.

Ja tenim resolts tots els casos del tipus $S(1, 1, j)$. Ara anem a analitzar la resta. En primer lloc comprovem que $S(2, 2) = 2k-1$. En efecte. $2a_2 = 2^k - 2^{k-2} + 2^k - 2^{k-2} = 2^k + 2^{k-1}$. Per tant, $a_{2k-1} \leqslant 2a_2 < a_{2k}$.

I ara comprovem que $S(S(1, 2), 2) = S(1, S(2, 2)) = 2k$ i això acabarà la demostració, doncs els demés casos se satisfaran de forma automàtica pel creixement de S. D'una banda, $S(S(1, 2), 2) = S(2k-2, 2)$, i, per tant, es considera $a_{2k-2} + a_2 = 2^k + 2^{k-2} - 2 + 2^k - 2^{k-2} = a_{2k}$. De l'altra banda, $S(1, S(2, 2)) = S(1, 2k-1)$; i com que $a_1 + a_{2k-1} = 2^k - 2^{k-1} + 2^k + 2^{k-1} - 2 = a_{2k}$, llavors queda demostrat. □

Generadors mixtos a partir del generador estàndard de la t–conorma màxim, n senar

Sigui $k \geqslant 2$ un enter positiu i sigui $n = 2k-1$ i considerem el generador convex–concau prenent la primera part, la part convexa, el generador de la t–conorma màxim sobre L_k, i la segona part, la part còncava, es construeix d'acord amb la Definició 5.2.22 i la Proposició 5.2.28. La taula 19 mostra aquests generadors per a diversos valors de k. En la Figura 23 se'n mostra la representació quan $k = 6$.

k	generador
2	$(0,1,3,4)$
3	$(0,1,3,7,9,10)$
4	$(0,1,3,7,15,19,21,22)$
5	$(0,1,3,7,15,31,39,43,45,46)$
6	$(0,1,3,7,15,31,63,79,87,91,93,94)$
7	$(0,1,3,7,15,31,63,127,159,175,183,187,189,190)$
8	$(0,1,3,7,15,31,63,127,255,319,351,367,375,379,381,382)$
9	$(0,1,3,7,15,31,63,127,255,511,639,703,735,751,759,763,765,766)$

Taula 19. Generadors associatius convex–concaus, n senar

Aquests generadors són de la forma $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2k})$ de manera que $a_i = 2^i - 1$, $i = 0, \ldots, k$. D'acord amb la Definició 5.2.22, si $1 \leqslant j \leqslant k-1$,

$$\begin{aligned} a_{k+j} &= a_k + a_{k-1} - a_{k-1-j} \\ &= 2^k - 1 + 2^{k-1} - 1 - 2^{k-1-j} + 1 \\ &= 2^{k-1-j} \cdot (2^{k-k+1+j} + 2^{k-1-k+1+j} - 1) - 1 \\ &= 2^{k-1-j} \cdot (2^{1+j} + 2^j - 1) - 1 \\ &= (3 \cdot 2^j - 1) \cdot 2^{k-1-j} - 1 \end{aligned}$$

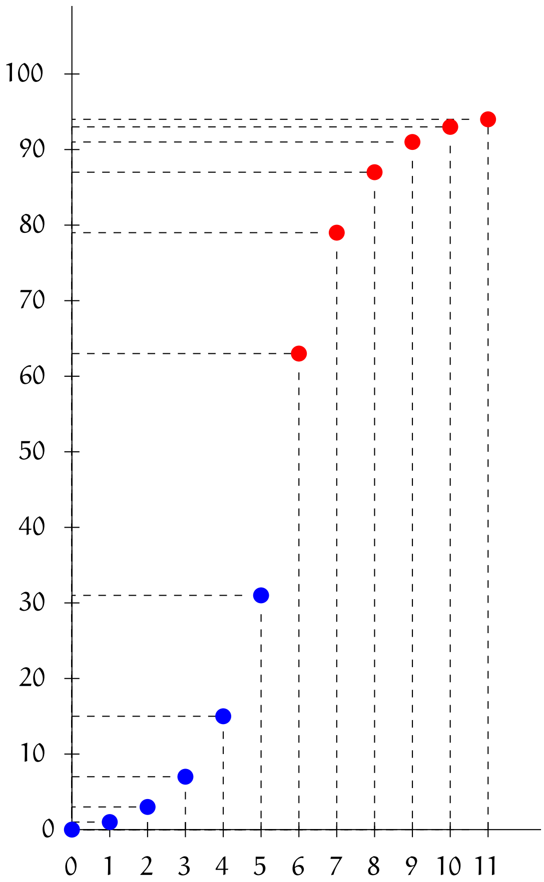
Proposició 5.2.32 *Els generadors convex–concaus,* $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ *donats per*

$$\begin{aligned} a_i &= 2^i - 1 \\ a_{k+j} &= (3 \cdot 2^j - 1) \cdot 2^{k-1-i} - 1 \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, k\,,\; j = 1, \ldots, k-1$$

són associatius.

Demostració: Sigui $S = F_f$; el que es vol veure és $S(S(i,j),i') = S(i,S(j,i'))$, $\forall i,i',j \in L$. Com que $a_{k+1} = 2^k + 2^{k-2} - 1$, llavors $a_{k+1} - a_k = 2^{k-2}$, mentre que $a_n - a_k = 2^{k-1}$. Així doncs, hi ha tres casos a considerar:

- Si $\max\{i,i',j\} \leqslant k-1$ llavors $S(S(i,j),i') = S(i,S(j,i')) = \max\{i,i',j\}$ i l'associativitat es cumpleix.
- Si $i,i' \leqslant k-2$ i $j \geqslant k$, llavors $S(S(i,j),i') = S(i,S(j,i')) = k$. El mateix passa si $i,j \leqslant k-2$ i $i' \geqslant k$.
- Si $i \geqslant k-1$ i $i' \geqslant k$, o si $i \geqslant k-1$ i $j \geqslant k$, o si $k \geqslant k-1$ i $i \geqslant k$ llavors $S(S(i,j),i') = S(i,S(j,i')) = n$.



$$f = (0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 79, 87, 91, 93, 94)$$

F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	11
2	2	2	2	3	4	5	6	7	8	11	11	11
3	3	3	3	3	4	5	6	7	11	11	12	11
4	4	4	4	4	4	5	6	11	11	11	12	11
5	5	5	5	5	5	5	11	11	11	11	11	11
6	6	6	6	6	6	11	11	11	11	11	11	11
7	7	7	7	7	11	11	11	11	11	11	11	11
8	8	8	8	11	11	11	11	11	11	11	11	11
9	9	9	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11

Figura 23. Representació del generador convex–concau sobre L_{11} construït a partir del generador de la t–conorma màxim

Com que S és monòtona creixent, llavors els demés casos se satisfan trivialment. □

I ara mostrarem els generadors concau–convexos, la primera part dels quals es construeix a partir del generador de la t–conorma màxim aplicant la Proposició 4.4.15, i la segona part és la que correspon en aplicar la Definició 5.2.22.

Sigui $k > 1$ un enter positiu i sigui $n = 2k - 1$. Sigui $f = (0, a_1, \dots, a_n)$, $a_i = 2^{k-1} + \dots + 2^{k-i}$, $i = 1, \dots, k$ i sigui $a_{k+j} = a_k + a_{k-1} - a_{k-1-j}$, $j = 1, \dots, k-1$. Llavors, si $1 \leqslant i \leqslant k$,

$$a_i = \frac{2^{k-1} - 2^{k-1-i}}{2^{-1}} = 2^k - 2^{k-i}$$

i, particulament, $a_{k-1} = 2^k - 2$ i $a_k = 2^k - 1$. D'altra banda, si $1 \leqslant j \leqslant k-1$,

$$a_{k+j} = 2^k - 1 + 2^k - 2 - (2^k - 2^{k-(k-1-j)}) = 2^k + 2^{j+1} - 3.$$

A la Taula 20 es mostren els generadors per a diversos valors de k. La Figura 24 mostra la representació del generador corresponent a $k = 6$.

k	generador
2	$(0, 2, 3, 5)$
3	$(0, 4, 6, 7, 9, 13)$
4	$(0, 8, 12, 14, 15, 17, 21, 29)$
5	$(0, 16, 24, 28, 30, 31, 33, 37, 45, 61)$
6	$(0, 32, 48, 56, 60, 62, 63, 65, 69, 77, 93, 125)$
7	$(0, 64, 96, 112.120, 124, 126, 127, 129, 133, 141, 157, 189, 253)$
8	$(0, 128, 192, 224, 240, 248, 252, 254, 255, 257, 261, 269, 285, 317, 381, 509)$
9	$(0, 256, 384, 448, 480, 496, 504, 508, 510, 511, 513, 517, 525, 541, 573, 637, 765, 1021)$

Taula 20. Generadors associatius concau–convexos, n senar

Proposició 5.2.33 *Els generadors concau–convexos,* $f = (0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$*,*

$$\begin{array}{ll} a_i & = 2^k - 2^{k-i} \\ a_{k+j} & = 2^k + 2^{j+1} - 3 \end{array} \quad i = 1, \dots, k\,,\ j = 1, \dots, k-1$$

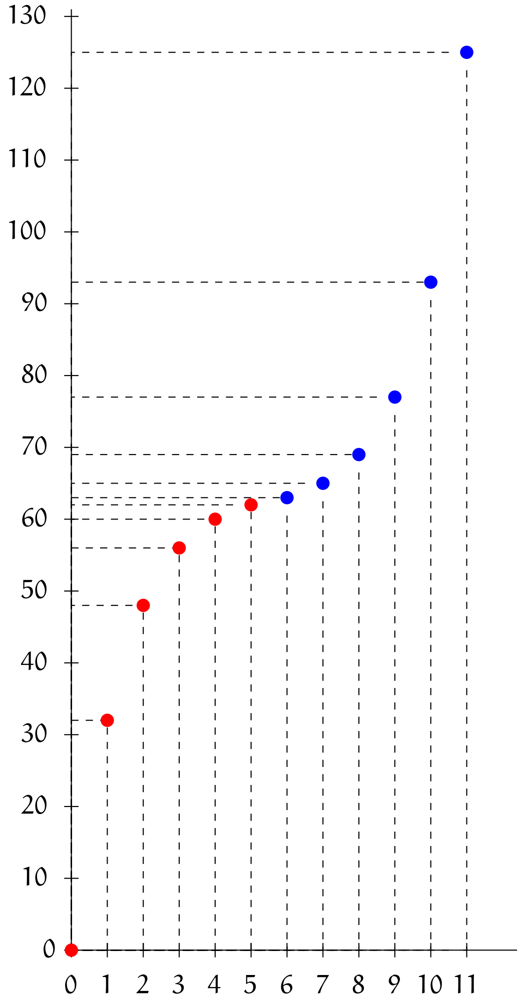
són associatius.

DEMOSTRACIÓ: Observem en primer lloc que si $k \leqslant 3$ llavors es pot comprovar fàcilment que ho són.

D'ara en endavant se suposarà, per tant, $k > 3$. Hem de veure que $S(S(i, i'), i'') = S(i, S(i', i''))$ per a tot $i, i', i'' \in L$. Vegem les claus de la demostració (sense càlculs) en 4 passes.

1. Es comprova que $S(1, 1) = k$.

2. Es comprova que $\forall j:\ 1 \leqslant j \leqslant k$, $S(1, j) = \begin{cases} n-2 & \text{si } j \leqslant k-2 \\ n-1 & \text{si } k-1 \leqslant j \leqslant k. \end{cases}$



$$f = (0, 32, 48, 56, 60, 62, 63, 65, 69, 77, 93, 125)$$

F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	6	9	9	9	10	10	10	10	10	11	11
2	2	9	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11
3	3	9	10	10	10	10	10	10	11	11	12	11
4	4	9	10	10	10	10	10	11	11	11	12	11
5	5	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11
6	6	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	11
7	7	10	10	10	11	11	11	11	11	11	11	11
8	8	10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11
9	9	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11

Figura 24. Representació del generador concau–convex sobre L_{11} construït a partir del generador de la t–conorma màxim

3. Si $j \leqslant k-2$ llavors $S(S(1,1),j) = S(1,S(1,j)) = n-1$. En canvi, si $k-1 \leqslant j \leqslant k$ llavors $S(S(1,1),j) = S(1,S(1,j)) = n$.

4. $S(2,2) = n-1$, d'on es dedueix que $S(S(1,2),1) = S(S(1,1),2) = S(1,S(1,2)) = n$.

Per tant, la resta de casos se satisfan trivialment. □

5.2.4 *Generadors mixtos a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica*

En aquesta secció es mostraran generadors mixtos construïts a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica (vegi's Proposició 3.1.10). Aquest generador és concau (Exemple 4.4.3), fet que permet construir els generadors concau–convexos directament, a partir de la Definició 5.2.22; en canvi, la construcció dels generadors convex-concaus es fa transformant prèviament aquest generador en un generador concau (Proposició 4.4.15). A diferència dels anteriors, però, d'aquests generadors sobre L_n només els concaus-convexos són associatius, mentre que els convex-concaus no ho són exceptuant algun cas trivial.

Per mor de la diferenciació en la definició de generador mixt, novament es distingiran dos casos, segons si n és parell o senar.

Generadors mixtos a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica, n parell

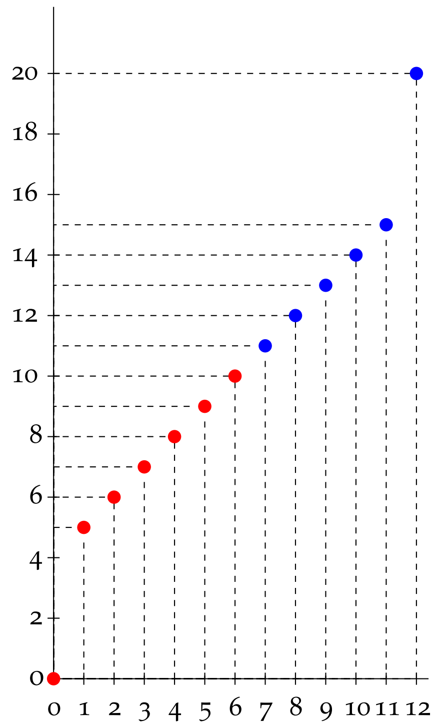
Sigui $n = 2k$, per algun $k \geqslant 2$ enter positiu, i considerem el generador (mixt) concau–convex construït prenent la primera part, la part còncava, el generador de la t–conorma dràstica sobre L_k, d'acord amb la Definició 5.2.22 i la Proposició 5.2.24. La Taula 21 mostra aquests generadors per a diversos valors de k. En la Figura 25 hi ha representat un d'aquests generadors i la taula corresponent.

k	generador
2	$(0,1,2,3,4)$
3	$(0,2,3,4,5,6,8)$
4	$(0,3,4,5,6,7,8,9,12)$
5	$(0,4,5,6,7,8,9,10,11,12,16)$
6	$(0,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,20)$
7	$(0,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,24)$
8	$(0,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,28)$

Taula 21. Generadors associatius concau–convexos a partir del generadors de la t–conorma dràstica, n parell

Proposició 5.2.34 *Els generadors* $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2k})$ *de la taula 21 són concau–convexos i vénen donats per*

$$a_i = \begin{cases} k-2+i & \textit{si } 1 \leqslant i < n \\ 4k-4 & \textit{si } i = n, \end{cases}$$



F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	6	7	8	9	10	11	11	11	11	11	12	12
2	2	7	8	9	10	11	11	11	11	11	12	12	12
3	3	8	9	10	11	11	11	11	11	12	12	12	12
4	4	9	10	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12
5	5	10	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12
6	6	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12
7	7	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12
8	8	11	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12
9	9	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
10	10	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

Figura 25. Representació del generador concau–convex sobre L_{12}, associatiu, construït a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica, $f = (0, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20)$

i l'operació binària que genera cada un d'ells és

$$F_f(i,j) = \begin{cases} k-2+i+j & \textit{si } i+j \leqslant k \\ n-1 & \textit{si } k+1 \leqslant i+j < 2k \\ n & \textit{si } i+j \geqslant 2k, \end{cases} \tag{5.5}$$

DEMOSTRACIÓ: Considerem $n = 2k$.

En primer lloc, el generador de la t–conorma dràstica sobre L_k és $(0, k-1, k, \ldots, 2k-2)$. D'acord amb la Definició 5.2.22, $a_n = 2a_k = 4k-4$ i, a més, $\forall r: \ 1 \leqslant r < k$,

$$a_{k+r} = a_n - a_{k-r} = 4k-4-(k-2+k-r) = k-2+(k+r).$$

A més, la Proposicio 5.2.24 estableix que un generador construït així és concau–convex.

En segon lloc, siguin $i, j \in L_n$.

- Si $i+j \leqslant k$, $a_i + a_j = (k-2+i)+(k-2+j) = k+2+(k-2+i+j) = a_{k-2+i+j}$.
- D'una banda,

$$a_i + a_j = a_{n-1} \iff 2k-4+i+j = 3k-3 \iff i+j = k+1.$$

  D'altra banda,

$$a_i + a_j < a_n \iff 2k-4+i+j < 4k-4 \iff i+j < 2k.$$

  Per tant, si $k+1 \leqslant i+j < 2k$ llavors $a_{n-1} \leqslant a_i + a_j < a_n$.

- Si $i+j = 2k$ amb $\min i,j \geqslant 1$, llavors $a_i + a_j = 4k-4 = a_n$. En canvi, si és $\min\{i,j\} = 0$ llavors $a_0 + a_n = a_n$. Per tant, per a tot i,j, $i+j \geqslant 2k$, tenim que $a_n \leqslant a_i + a_j$. □

Proposició 5.2.35 *Els generadors* $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2k})$ *concau–convexos donats per*

$$a_i = \begin{cases} k-2+i & \textit{si } 1 \leqslant i < n \\ 4k-4 & \textit{si } i = n \end{cases}$$

són associatius.

DEMOSTRACIÓ: Només cal provar que per a tot $i, i', i'' > 0$,

$$F_f(F_f(i,i'),i'') = F_f(i,F_f(i',i'')) = \begin{cases} n-1 & \text{si } i+i'+i'' \leqslant k+1 \\ n & \text{si } i+i'+i'' > k+1 \end{cases},$$

doncs si $\min\{i,i',i''\} = 0$ llavors $F_f(F_f(i,i'),i'') = F_f(i,F_f(i',i''))$ trivialment. Es distingiran tres casos, que s'estudien a continuació. En alguns d'ells s'utilitzaran el fet $F_f(i,j) \geqslant i+j$, que es dedueix de la proposició anterior, i la condició (5.5).

EN EL CAS $i+i'+i'' \leqslant k+1$, com que $i+i' \leqslant k$,

$$F_f(F_f(i,i'),i'') = F_f(k-2+i+i',i'') = n-1$$

perquè $k+1 \leqslant k-2+i+i'+i'' < 2k$. De forma similar, com que $i'+i'' \leqslant k$,

$$F_f(F_f(i,i'),i'') = F_f(k-2+i+i',i'') = n-1.$$

EN EL CAS $i+i'+i'' \geqslant 2k$, com que $F_f(i,j) \geqslant i+j$, llavors

$$F_f(F_f(i,i'),i'') \geqslant F_f(i+i',i'') \geqslant i+i'+i'' \geqslant n$$

i, també,

$$F_f(i,F_f(i',i'')) \geqslant F_f(i,i'+i'') \geqslant i+i'+i'' \geqslant n.$$

EN EL CAS $k+1 < i+i'+i'' < 2k$, es distingeixen quatre subcasos:

- Si $i+i' \leqslant k$, $i'+i'' \leqslant k$, com que $k-2+i+i'+i'' \geqslant 2k-1$, llavors tenim que $F_f(i,F_f(i',i'')) = F_f(i,k-2+i'+i'') = n$ i, de forma similar, $F_f(F_f(i,i'),i'')) = F_f(k-2+i+i,i'') = n$.
- Si $i+i' \leqslant k$, $i'+i'' > k$, llavors $F_f(i,F_f(i',i'')) = F_f(i,n-1) = n$ i, com que $k-2+i+i+i'' \geqslant 2k$, $F_f(F_f(i,i'),i'')) = F_f(k-2+i+i,i'') = n$.
- Si $i+i' > k$, $i'+i'' \leqslant k$, aquest cas és simètric a l'anterior.
- Si $i+i' > k$, $i'+i'' > k$, llavors tenim que $F_f(i,F_f(i',i'')) = F_f(i,n-1) = n$ i $F_f(F_f(i,i'),i'')) = F_f(n-1,i'') = n$. □

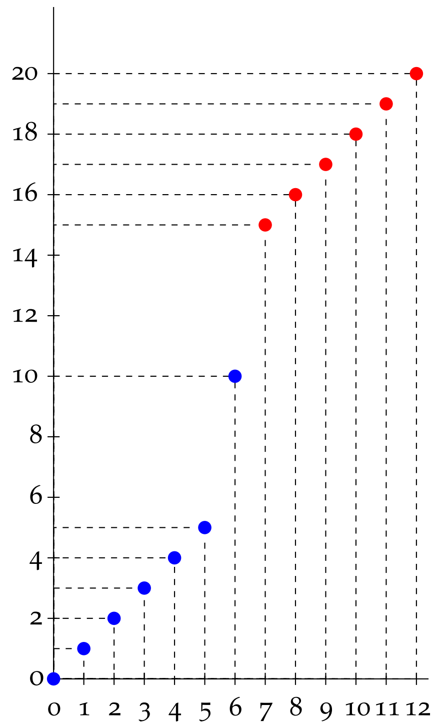
I ara es mostraran els generadors convex–concaus sobre L_n, amb $n = 2k$ per algun $k \geqslant 2$ enter positiu, la primera part dels quals es construeix a partir del generador de la t–conorma dràstica aplicant la Proposició 4.4.15, i la segona part és la que correspon en aplicar la Definició 5.2.22. Aquests generadors no són associatius llevat d'un. La Taula 22 en mostra els generadors convex–concaus per a diversos valors de k, i la Figura 26 mostra la representació per a $k = 6$ juntament amb la taula de la t–conorma asssociada.

k	generador
2	$(0,1,2,3,4) \longrightarrow$ Només aquest és associatiu.
3	$(0,1,2,4,6,7,8)$
4	$(0,1,2,3,6,9,10,11,12)$
5	$(0,1,2,3,4,8,12,13,14,15,16)$
6	$(0,1,2,3,4,5,10,15,16,17,18,19,20)$
7	$(0,1,2,3,4,5,6,12,18,19,20,21,22,23,24)$
8	$(0,1,2,3,4,5,6,7,14,21,22,23,24,25,26,27,28)$

Taula 22. Generadors no associatius convex–concaus, no associatius, a partir del generadors de la t–conorma dràstica, n parell

Aquests generadors són $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2k})$ i

$$a_i = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leqslant i < k \\ 2k-2 & \text{si } i = k \\ 2k-4+i & \text{si } i > k \end{cases}$$



F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	5	6	8	9	10	11	12	12
2	2	3	4	5	5	5	6	9	10	11	12	12	12
3	3	4	5	5	5	5	6	10	11	12	12	12	12
4	4	5	5	5	5	5	6	11	12	12	12	12	12
5	5	5	5	5	5	6	7	12	12	12	12	12	12
6	6	6	6	6	6	7	12	12	12	12	12	12	12
7	7	8	9	10	11	12	12	12	12	12	12	12	12
8	8	9	10	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12
9	9	10	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
10	10	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

Figura 26. Representació del generador convex–concau sobre L_{12}, *no associatiu*, construït a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica, $f = (0,1,2,3,4,5,10,15,16,17,18,19,20)$

Observem que la disjunció obtinguda no és associativa: $F_f(F_f(1,4),5) = F_f(5,5) = 6$ mentre que $F_f(1, F_f(4,5)) = F_f(1,5) = 5$.

Proposició 5.2.36 *Els generadors* $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2k})$ *convex–concaus donats per*

$$a_i = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leqslant i < k \\ 2k-2 & \text{si } i = k \\ 2k-4+i & \text{si } i > k \end{cases}$$

no són associatius $\forall k > 2$.

Demostració: Si $k = 2$, és clarament associatiu. En canvi, si $k > 2$, d'una banda $S(1, S(k-1, k-1)) = S(1, k+1) = k+2$ mentre que, de l'altra, $S(S(1, k-1), k-1) = S(k-1, k-1) = k+1$. □

Generadors mixtos a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica, n senar

Sigui $n = 2k-1$, per algun $k \geqslant 2$ enter positiu, i considerem el generador (mixt) concau–convex la primera part (còncava) del qual és el generador de la t–conorma dràstica sobre L_k, i la segona part es construeix d'acord amb la Definició 5.2.22. Efectivament, per la Proposició 5.2.28 aquest generador és concau–convex. La Taula 23 mostra aquests generadors per a diversos valors de k. En la Figura 27 hi ha representat un d'aquests generadors i la taula corresponent.

k	generador
2	$(0, 1, 2, 3)$
3	$(0, 2, 3, 4, 5, 7)$
4	$(0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11)$
5	$(0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$
6	$(0, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19)$
7	$(0, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 23)$
8	$(0, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 27)$
9	$(0, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 31)$

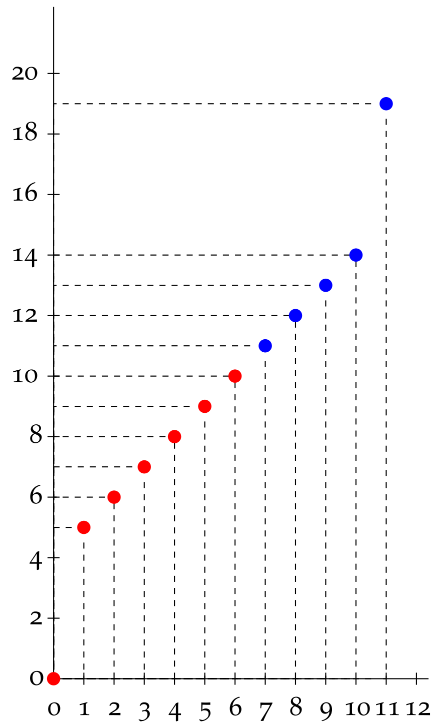
Taula 23. Generadors associatius concau–convexos a partir del generadors de la t–conorma dràstica, n senar

Proposició 5.2.37 *Els generadors* $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ *i* $n = 2k-1$ *de la taula 23 són concau–convexos i vénen donats per*

$$a_i = \begin{cases} k-2+i & \text{si } 1 \leqslant i < n \\ 4k-5 & \text{si } i = n, \end{cases}$$

i l'operació binària que genera cada un d'ells és

$$F_f(i,j) = \begin{cases} k-2+i+j & \text{si } i+j \leqslant k \\ n-1 & \text{si } k \leqslant i+j < 2k-1 \\ n & \text{si } i+j \geqslant 2k-1, \end{cases} \tag{5.6}$$



F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	6	7	8	9	10	10	10	10	10	11	11
2	2	7	8	9	10	10	10	10	10	11	11	11
3	3	8	9	10	10	10	10	10	11	11	12	11
4	4	9	10	10	10	10	10	11	11	11	12	11
5	5	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11
6	6	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	11
7	7	10	10	10	11	11	11	11	11	11	11	11
8	8	10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11
9	9	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11

Figura 27. Representació del generador concau–convex sobre L_{11}, associatiu, construït a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica, $f = (0, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19)$

DEMOSTRACIÓ: Considerem $n = 2k - 1$.

En primer lloc, el generador de la t–conorma dràstica sobre L_k és $(0, k-1, k, \dots, 2k-2)$. D'acord amb la Definició 5.2.22, $a_n = a_k + a_{k-1} = 4k - 5$ i, a més, $\forall r:\ 1 \leqslant r < k$,

$$a_{k+r} = a_n - a_{k-1-r} = 4k - 5 - (k - 2 + k - 1 - r) = k - 2 + (k + r).$$

A més, la Proposicio 5.2.28 estableix que un generador construït així és concau–convex.

En segon lloc, siguin $i, j \in L_n$.

- Si $i + j \leqslant k$, $a_i + a_j = (k - 2 + i) + (k - 2 + j) = k + 2 + (k - 2 + i + j) = a_{k-2+i+j}$.
- D'una banda,

  $$a_i + a_j = a_{n-1} \iff 2k - 4 + i + j = 3k - 4 \iff i + j = k.$$

  D'altra banda,

  $$a_i + a_j < a_n \iff 2k - 4 + i + j < 4k - 5 \iff i + j < 2k + 1.$$

  Per tant, si $k + 1 \leqslant i + j < 2k + 1$ llavors $a_{n-1} \leqslant a_i + a_j < a_n$.
- Si $i + j = 2k$ amb $\min i, j \geqslant 1$, llavors $a_i + a_j = 4k - 5 = a_n$. En canvi, si és $\min\{i, j\} = 0$ llavors $a_0 + a_n = a_n$. Per tant, per a tot i, j, $i + j \geqslant 2k - 1$, tenim que$a_n \leqslant a_i + a_j$. □

Proposició 5.2.38 *Els generadors* $f = (0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ *i* $n = 2k-1$, *concau–convexos donats per*

$$a_i = \begin{cases} k-2+i & si\ 1 \leqslant i < n \\ 4k-5 & si\ i = n, \end{cases}$$

són associatius.

Demostració: Només cal provar que per a tot $i, i', i'' > 0$,

$$F_f(F_f(i,i'),i'') = F_f(i, F_f(i',i'')) = \begin{cases} n-1 & \text{si } i+i'+i'' \leqslant k+1 \\ n & \text{si } i+i'+i'' > k+1 \end{cases},$$

doncs si $\min\{i,i',i''\} = 0$ llavors $F_f(F_f(i,i'),i'') = F_f(i, F_f(i',i''))$ trivialment. Es distingiran tres casos, que s'estudien a continuació. En alguns d'ells s'utilitzaran el fet $F_f(i,j) \geqslant i+j$, que es dedueix de la proposició anterior, i la condició (5.6).

en el cas $i+i'+i'' \leqslant k$, com que $i+i' \leqslant k-1$,

$$F_f(F_f(i,i'),i'') = F_f(k-2+i+i', i'') = n-1$$

perquè $k+1 \leqslant k-2+i+i'+i'' < 2k-1$. De forma similar, com que $i'+i'' \leqslant k-1$,

$$F_f(i, F_f(i',i'')) = F_f(i, k-2+i'+i'') = n-1.$$

en el cas $i+i'+i'' \geqslant 2k-1$, com que $F_f(i,j) \geqslant i+j$, llavors

$$F_f(F_f(i,i'),i'') \geqslant F_f(i+i',i'') \geqslant i+i'+i'' \geqslant n$$

i, també,

$$F_f(i, F_f(i',i'')) \geqslant F_f(i, i'+i'') \geqslant i+i'+i'' \geqslant n.$$

en el cas $k+1 \leqslant i+i'+i'' < 2k-1$, distingim quatre subcasos:

- Si $i+i' \leqslant k$ i $i'+i'' \leqslant k$, com que $k-2+i+i'+i'' \geqslant 2k-1$, llavors $F_f(i, F_f(i',i'')) = F_f(i, k-2+i'+i'') = n$. De forma similar, $F_f(F_f(i,i'),i'')) = F_f(k-2+i+i', i'') = n$.
- Si $i+i' \leqslant k$, $i'+i'' > k$, llavors $F_f(i, F_f(i',i'')) = F_f(i, n-1) = n$ i com que $k-2+i+i'+i'' \geqslant 2k-1$,

$$F_f(F_f(i,i'),i'')) = F_f(k-2+i+i', i'') = n.$$

- Si $i+i' > k$, $i'+i'' \leqslant k$, aquest cas és simètric a l'anterior.
- Si $i+i' > k$, $i'+i'' > k$, llavors d'una banda $F_f(i, F_f(i',i'')) = F_f(i, n-1) = n$ i, d'altra banda, $F_f(F_f(i,i'),i'')) = F_f(n-1, i'') = n$. □

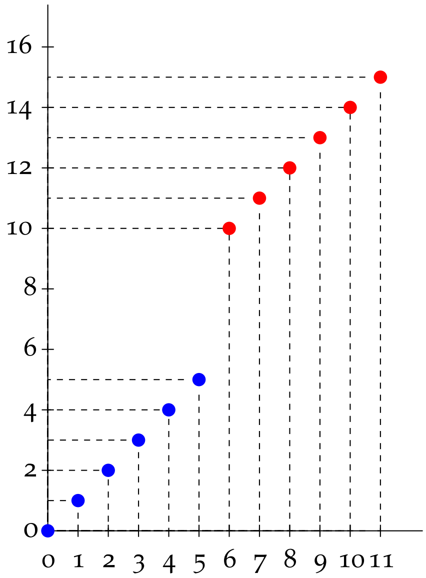
I finalment es mostraran els generadors convex–concaus sobre L_n, amb $n = 2k-1$ per algun $k \geqslant 2$ enter positiu, la primera part dels quals es construeix a partir del generador de la t–conorma dràstica aplicant la Proposició 4.4.15, i la segona part és la que correspon en aplicar la Definició 5.2.22. Aquests generadors no són associatius llevat d'un. La Taula 24 en mostra els generadors convex–concaus per a diversos valors de k, i la Figura 28 mostra la representació per a $k = 6$ juntament amb la taula de la t–conorma assosciada.

k	generador
2	$(0,1,2,3) \longrightarrow$ Només aquest és associatiu.
3	$(0,1,2,4,5,6)$
4	$(0,1,2,3,6,7,8,9)$
5	$(0,1,2,3,4,8,9,10,11,12)$
6	$(0,1,2,3,4,5,10,11,12,13,14,15)$
7	$(0,1,2,3,4,5,6,12,13,14,15,16,17,18)$
8	$(0,1,2,3,4,5,6,7,14,15,16,17,18,19,20,21)$
9	$(0,1,2,3,4,5,6,7,8,16,17,18,19,20,21,22,23,24)$

Taula 24. Generadors no associatius convex–concaus, n senar

Aquests generadors són

$$a_i = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leqslant i < k-1 \\ k-2+i & \text{si } i \geqslant k \end{cases}$$



F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	5	7	8	9	10	11	11
2	2	3	4	5	5	5	8	9	10	11	11	11
3	3	4	5	5	5	5	9	10	11	11	12	11
4	4	5	5	5	5	5	10	11	11	11	12	11
5	5	5	5	5	5	6	11	11	11	11	11	11
6	6	7	8	9	10	11	11	11	11	11	11	11
7	7	8	9	10	11	11	11	11	11	11	11	11
8	8	9	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11
9	9	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11

Figura 28. Representació del generador convex–concau sobre L_{11}, *no associatiu*, construït a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica, $f = (0,1,2,3,4,5,10,11,12,13,14,15)$

Observem que la disjunció obtinguda no és associativa: $F_f(F_f(1,4),5) = F_f(5,5) = 6$ mentre que $F_f(1,F_f(4,5)) = F_f(1,5) = 5$.

Proposició 5.2.39 *Els generadors* $f = (0,a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{2k})$ *convex–concaus donats per*

$$a_i = \begin{cases} i & \textit{si } 1 \leqslant i < k-1 \\ k-2+i & \textit{si } i \geqslant k \end{cases}$$

no són associatius $\forall k > 2$.

Demostració: Si $k = 2$, és clarament associatiu. En canvi, si $k \geqslant 3$, d'una banda $S(1, S(k-1, k-1)) = S(1, k) = k+1$ mentre que, de l'altra, $S(S(1, k-1), k-1) = S(k-1, k-1) = k$. □

5.2.5 *Generadors mixtos a partir de generadors de la t–conorma de Łukasiewicz*

En aquesta secció es mostraran alguns generadors mixtos construïts a partir de diversos generadors de la t–conorma de Łukasiewicz. Aquesta t–conorma pot ser additivament generada, entre d'altres, per generadors concaus i convexos, tal com es remarca en l'Observació 4.4.14.

Proposició 5.2.40 *Sigui* $f = (0, d, 2d, \ldots, kd)$, $d > 0$, *un generador de* $S_Ł$ *sobre* L_k. *Aleshores el generador mixt sobre* L_n, $n = 2k-1$ *o* $n = 2k$, *obtingut a partir de* f *és* $(0, d, 2d, \ldots, nd)$.

Demostració: La demostració és immediata aplicant la Definició 5.2.22. □

Per tant, el generador mixt construït a partir del generador estàndard de la t-conorma de Łukasiewicz sobre L_k, $f = (0, 1, \ldots, k)$, és el generador estàndard de la t–conorma de Łukasiewicz sobre L_n, $g = (0, 1, \ldots, n)$.

Vegem a continuació com són els generadors concau-convexos construïts a partir dels generadors concaus de la t–conorma de Łukasiewicz que es mostren en l'Observació 4.4.14:

$$f = \big(0, a, a+d, a+2d, \ldots, a+(k-2)d, a_k\big),$$

amb $d > 0$, $\lfloor \frac{a}{d} \rfloor = 1$ i $2a + (k-3)d + 1 \leqslant a_k \leqslant a + (k-1)d$. Novament es distingiran els casos n senar i n parell.

Generadors mixtos a partir de generadors de la t–conorma de Łukasiewicz, n senar

Sigui $n = 2k-1$, per algun $k \geqslant 2$ enter positiu.

Proposició 5.2.41 *Sigui* $f = \big(0, a, a+d, a+2d, \ldots, a+(k-2)d, a_k\big)$ *amb* $\lfloor \frac{a}{d} \rfloor = 1$ *i* $2a + (k-3)d + 1 \leqslant a_k \leqslant a + (k-1)d$. *Aleshores el generador concau–convex mixt corresponent és*

$$g = \big(0, a, a+d, \ldots, a+(k-2)d, a_k, a_k+d, \ldots, \underbrace{a_k+(k-2)d}_{a_{n-1}}, \underbrace{a_k+a+(k-2)d}_{a_n}\big),$$

un generador de $S_Ł$.

Demostració: A partir de f i d'acord amb la Definició 5.2.22, el generador g és el generador mixt corresponent. Vegem que és un generador de la t–conorma de Łukasiewicz. Tal i com s'indica en la Proposició 3.1.9, hem de veure que:

1. $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j+1}$ sempre que $i+j < n$
2. $a_n \leqslant a_i + a_j$ sempre que $i+j \geqslant n$.

La segona condició és immediata per ser g un generador mixt. Vegem 1. Si $i+j < k$ llavors $a_i + a_j = 2a + (i+j-2)d$ i com que $d \leqslant a < 2d$ llavors se satisfà que $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j+1}$. Si $i+j = k$, $a_k \leqslant a + (k-1)d \leqslant \underbrace{2a+(k-2)d}_{a_i+a_j} < 2a + (k-2)d + 1 \leqslant 2a + (k-3)d + 1 + d \leqslant a_k + d = a_{k+1}$. Si $k < i+j < n$, amb $i \leqslant j$, distingim dos subcasos:

- Si $i \leqslant j < k$, llavors $a_i + a_j = 2a + (i+j-2)d$ mentre que $a_{i+j} = a_k + (i+j-k)d$. Per tant,

$$\begin{aligned} a_{i+j} &= a_k + (i+j-k)d \\ &\leqslant a + (k-1)d + (i+j-k)d \\ &= a + (i+j-1)d \\ &\leqslant 2a + (i+j-2)d \quad (\text{perquè } a \geqslant d) \\ &= a_i + a_j, \end{aligned}$$

  mentre que,

$$\begin{aligned} a_i + a_j &= 2a + (i+j-2)d \\ &= 2a + (k-3)d + (i+j-k+1)d \\ &< 2a + (k-3)d + 1 + (i+j-k+1)d \\ &\leqslant a_k + (i+j-k+1)d, \end{aligned}$$

  d'on si $i+j < n-1$ llavors $a_i + a_j < a_k + (i+j-k+1)d = a_{i+j+1}$, i si $i+j = n-1$ llavors $a_i + a_j < a_k + (i+j-k+1)d = a_k + (k-1)d \leqslant a_k + a + (k-2)d = a_n$.

- Si $i < k \leqslant j$, llavors $a_i = a + (i-1)d$, $a_j = a_k + (j-k)d$ i $a_{i+j} = a_k + (i+j-k)d$. Com que $a \geqslant d$ llavors és immediat veure que $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j$. Ara, si $i+j < n-1$ llavors, com que $a < 2d$, $a_i + a_j = a_k + a + (i+j-k-1)d < a_k + (i+j-k+1)d = a_{i+j+1}$, mentre que si $i+j = n-1$, $a_i + a_j = a_k + a + (i+j-k-1)d = a_k + a + (k-3)d < a_n$. □

Generadors mixtos a partir de generadors de la t–conorma de Łukasiewicz, n parell

Sigui $n = 2k$, per algun $k \geqslant 2$ enter positiu. A diferència del cas n senar, el generador mixt construït a partir de $\big(0, a, a+d, a+2d, \ldots, a+(k-2)d, a_k\big)$, amb $\lfloor \frac{a}{d} \rfloor = 1$ i $2a + (k-3)d + 1 \leqslant a_k \leqslant a + (k-1)d$ no és sempre un generador de la t–conorma de Łukasiewicz. A continuació s'estudiaran aquests tipus de generadors mixts.

Proposició 5.2.42 *Sigui $f = \big(0, a, a+d, a+2d, \ldots, a+(k-1)d\big)$ amb $\lfloor \frac{a}{d} \rfloor = 1$. Aleshores el generador concau–convex mixt corresponent és*

$$g = \big(0, a, a+d, a+2d, \ldots, \underbrace{a+(n-2)d}_{a_{n-1}}, \underbrace{2a+(n-2)d}_{a_n}\big),$$

un generador de $S_Ł$.

Demostració: Es demostrarà en primer lloc que el generador mixt és el que s'indica. De la Definició 5.2.22 s'extreu que $a_n = 2a_k = 2(a + (k-1)d) = 2a + (n-2)d$. A més, per a tot r: $1 \leqslant r < k$, $a_{k+r} = a_n - a_{k-r} = 2a + (n-2)d - \big(a + (k-r-1)d\big) = a + (k+r-1)d$. En segon lloc es demostrarà que el generador obtingut és el de $S_Ł$. D'acord amb la Proposició 3.1.9 i del fet que $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-2)d$ és una progressió aritmètica de diferència d, llavors només ens caldria provar que $a_i + a_j = a_n$ per a tot i, j, $i + j = n$, però això és satisfà per ser g un generador mixt. □

Proposició 5.2.43 *Sigui* $\big(0, a, a+d, a+2d, \dots, a+(k-2)d, a_k\big)$, *amb* $\lfloor \frac{a}{d} \rfloor = 1$ *i* $a+(k-2)d + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor + 1 \leqslant a_k \leqslant a+(k-1)d$. *Aleshores el generador concau–convex mixt corresponent és un generador de la t–conorma* $S_Ł$.

Demostració: Suposem a parell, sigui d_k de manera que $\frac{a}{2}+1 \leqslant d_k \leqslant d$, i sigui $a_k = a+(k-2)d+d_k$. Vegem que el generador $\big(0, a, a+d, \dots, a+(k-2)d, a_k, a_k-(a+(k-2)d), \dots, 2a_k\big)$ satisfà que $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j+1}$ per a tot $i, j \in L$, $i+j < n$, i ja haurem acabat. Distingirem tres casos:

- Siguin i, j: $1 \leqslant i \leqslant j < k$, $i+j < k-1$. En aquest cas, està demostrat en la secció 4.3 que $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j < a_{i+j+1}$.
- Siguin i, j: $1 \leqslant i \leqslant j < k$, $i+j = k-1$. D'una part, com que $d \leqslant a$, és clar que $a_{k-1} \leqslant a_i + a_j$. De l'altra part, $a_i + a_j = 2a+(k-3)d = a+(k-2)d+\frac{a}{2}-d < a_k$.
- Siguin i, j: $1 \leqslant i \leqslant j < k$, $i+j = k$. D'una part, $a_i + a_{k-i} = 2a+(k-2)d \geqslant a+(k-2)d+d \geqslant a+(k-2)d+d_k = a_k$, mentre que, per l'altra part, $a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} = a+(k-2)d+2d_k \geqslant a+(k-2)d+2\big(\frac{a}{2}+1\big) = 2a+(k-2)d+2 > 2a+(k-2)d = a_i + a_j$.
- Siguin i, j: $1 \leqslant i \leqslant j < k$, $k < i+j < n$. Llavors $a_{i+j} = 2a_k - \big(a+(2k-i-j-1)d\big) = 2a+2(k-2)d+2d_k-a-(2k-i-j-1)d = a+(i+j-3)d+2d_k \leqslant a+(i+j-1)d \leqslant 2a+(i+j-2)d = a_i+a_j$, i també, com que $2d_k \geqslant a+2$, $a_{i+j+1} = 2a_k - \big(a+(2k-i-j-2)d\big) = a+(i+j-2)d+2d_k \geqslant 2a+(i+j-2)d+2 > a_i+a_j$.
- Siguin i, j: $1 \leqslant i < k \leqslant j$, $k < i+j < n$. Llavors $a_{i+j} = 2a_k - \big(a+(2k-i-j-1)d\big) = id+2a_k-\big(a+(2k-j-1)d\big) \leqslant a+(i-1)d+2a_k-(a+(2k-j-1)d) = a_i+a_j$, i també, com que $2d > a$, $a_{i+j+1} = 2a_k - \big(a+(2k-i-j-2)d\big) = (i+1)d+2a_k-\big(a+(2k-j-1)d\big) > a+(i-1)d+2a_k-(a+(2k-j-1)d) = a_i+a_j$.

La resta de casos, o bé són trivials ($\min\{i,j\} = 0$), o bé $i+j \geqslant n$ i, per tant, $a_i + a_j \geqslant a_i + a_{n-i} = a_n$.

El cas amb a senar és molt similar a aquest. □

Proposició 5.2.44 *Sigui* $\big(0, a, a+d, a+2d, \dots, a+(k-2)d, a_k\big)$, *amb* $\lfloor \frac{a}{d} \rfloor = 1$ *i* $2a+(k-3)d+1 \leqslant a_k \leqslant a+(k-1)d$. *El generador mixt corresponent és un generador de la t–conorma* $S_Ł$ *si, i només si,* $a_k \geqslant a+(k-2)d+\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + 1$

Demostració: D'una banda, si el generador mixt corresponent, diguem-li g, és un generador de $S_Ł$, llavors $F_g(1, k-1) = k$, és a dir, $a_1 + a_{k-1} < a_{k+1}$, és a dir, $2a+(k-2)d < 2a_k - \big(a+(k-2)d\big)$. Llavors $a_k > \frac{3a}{2}+(k-2)d$. Per tant, si a és parell, $a_k \geqslant \frac{3a}{2}+(k-2)d$, mentre que si a és senar, $a_k \geqslant \frac{3a+1}{2}+(k-2)d = a+(k-2)d+\lfloor \frac{a-1}{2} \rfloor + 1$. En qualsevol cas, $a_k \geqslant a+(k-2)d+\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + 1$ i ja ho tenim demostrat.

De l'altra banda, el recíproc queda demostrat aplicant la proposició anterior.

Exemple 5.2.45 *Si prenem* $a = 15$, $d = 10$ *i* $k = 7$, *llavors ha de ser* $71 \leqslant a_k \leqslant 75$, *per tant tenim 5 generadors mixtos possibles:*

$$f_1 = (0, 15, 25, 35, 45, 55, \overbrace{65, 71, 77}^{12}, 87, 97, 107, 117, 127, 142)$$

$$f_2 = (0, 15, 25, 35, 45, 55, \overbrace{65, 72, 79}^{14}, 89, 99, 109, 119, 129, 144)$$

$$f_3 = (0, 15, 25, 35, 45, 55, \overbrace{65, 73, 81}^{16}, 91, 101, 111, 121, 131, 146)$$

$$f_4 = (0, 15, 25, 35, 45, 55, \overbrace{65, 74, 83}^{18}, 93, 103, 113, 123, 133, 148)$$

$$f_5 = (0, 15, 25, 35, 45, 55, \overbrace{65, 75, 85}^{20}, 95, 105, 115, 125, 135, 150)$$

D'aquests, els generadors f_3, f_4 *i* f_5 *generen la t–conorma de Łukasiewicz (sobre* L_{14}*) mentre que tant* f_1 *com* f_2 *generen una altra t–conorma (la mateixa) que pot veure's en la Taula 25. Tots aquests generadors són associatius.*

F_f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	3	4	5	6	8	8	9	10	11	12	13	14	14
2	2	3	4	5	6	8	9	9	10	11	12	13	14	14	14
3	3	4	5	6	8	9	10	10	11	12	13	14	14	14	14
4	4	5	6	8	9	10	11	11	12	13	14	14	14	14	14
5	5	6	8	9	10	11	12	12	13	14	14	14	14	14	14
6	6	8	9	10	11	12	13	13	14	14	14	14	14	14	14
7	7	8	9	10	11	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14
8	8	9	10	11	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14
9	9	10	11	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
10	10	11	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
11	11	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
12	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
13	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14

Taula 25. T–conorma generada a partir de f_1 i f_2

6

RESUM EXTENS, CONCLUSIONS I TREBALL FUTUR

6.1 RESUM EXTENS

La idea de representar operacions binàries utilitzant funcions d'una sola variable i la seva inversa consisteix en, donada una operació binària F, determinar una funció $f : \mathrm{Dom}\, f \to [0, +\infty]$ de manera que $F(x, y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$. La funció $f^{(-1)}$ s'anomena la pseudoinversa de la funció f, i la seva definició difereix segons si f és creixent o decreixent, tot i que $f^{(-1)}(y) = f^{-1}(y)\ \forall y \in \mathrm{Ran}\, f$.

El resum que es presenta a continuació fa referència només a aquells capítols que contenen les aportacions originals d'aquest treball.

Capítol 3: Generació additiva de funcions d'agregació disjuntives discretes

En el cas discret, la pseudoinversa pot definir-se de dues formes diferents, una de les quals només permet generar operacions arquimedianes, tal com ocorre en el cas continu, mentre que l'altra permet generar, a més, operacions no arquimedianes. S'ha utilitzat, doncs, aquesta segona definició:

$$f^{(-1)}(t) = \begin{cases} \max\{i \in L\ ;\ f(i) \leqslant t\} & \text{si } f(0) = 0 \\ \min\{i \in L\ ;\ f(i) \leqslant t\} & \text{si } f(n) = 0 \end{cases}$$

Les funcions monòtones estrictes f sobre L, amb $f(0) = 0$ o $f(n) = 0$, determinen, mitjançant l'equació

$$F_f(i, j) = f^{(-1)}\big(f(i) + f(j)\big)$$

disjuncions i conjuncions, respectivament. Una disjunció sobre L és una operació binària commutativa, creixent en cada variable i amb les mateixes condicions frontera que les t–conormes. Les disjuncions poden no ser associatives i són un cas més general que les t–conormes. El mateix passa amb les conjuncions i les t–normes.

Sobre els elements del conjunt $\mathrm{Ran}\, f$, la pseudoinversa, $f^{(-1)}$, és la inversa natural, f^{-1}; és per això que en el cas que $\mathrm{Ran}\, f$ sigui tancat per la suma, l'operació binària F_f esdevé associativa:

$$F_f\big(F_f(i, j), k\big) = F_f\big(i, F_f(j, k)\big) = f^{(-1)}\big(f(i) + f(j) + f(k)\big) \quad \forall i, j, k \in L.$$

Quan Ran f no sigui tancat per la suma, l'associativitat de les disjuncions i conjuncions F_f serà un aspecte a estudiar en cada moment.

Les t–conormes (i t–normes) més usades, màxim (mínim), dràstica i de Łukasiewicz, tenen generador additiu. Això ja diferencia el cas discret del cas continu, doncs en el cas $[0, 1]$ la t–conorma màxim (d'entre aquestes) no en té.

La generació additiva definida en aquest treball satisfà diverses propietats, de les quals se n'extreuen els següents resultats generals:

1. Si una disjunció (respectivament conjunció) és additivament generable llavors la seva conjunció (respectivament disjunció) dual també ho és. A més, es mostra com obtenir el generador d'una a partir de l'altra.

2. Els generadors f i λf amb $\lambda > 0$ determinen la mateixa operació binària: $F_f = F_{\lambda f}$.

3. Els generadors són llistes estrictament creixents amb $f(0) = 0$ (o estrictament decreixents amb $f(n) = 0$) de nombres reals. No obstant això, donat un generador (real) es pot obtenir un altre generador equivalent amb valors enters ($\mathrm{Ran}\ f \subset \mathbb{Z}$).

4. Les disjuncions additivament generables sobre $L = \{0, 1, \ldots, n\}$ i les t–conormes contínues i arquimedianes no estrictes sobre $[0, n]$ estan relacionades: "Una disjunció D sobre L és additivament generable si, i només si, és la part entera per defecte d'alguna t–conorma S sobre $[0, n]$, contínua i arquimediana no estricta:

$$D(i, j) = \lfloor S(i, j) \rfloor \quad \forall i, j \in L.$$

5. Les funcions monòtones estrictes f sobre L, amb $f(0) = 1$ o $f(n) = 1$, determinen, mitjançant l'equació $F_f^{\bullet}(i, j) = f^{(-1)}\big(f(i) \cdot f(j)\big)$, disjuncions i conjuncions, respectivament. És el que s'anomenen generadors multiplicatius. Hi ha una correspondència biunívoca entre els generadors (reals) additius i multiplicatius; les funcions (reals) exponencial i logarítmica permeten obtenir un generador multiplicatiu a partir d'un d'additiu, i viceversa, respectivament.

Determinar si una disjunció és additivament generable és un dels problemes que s'ha resolt en aquest treball. D'entrada, saber si una disjunció és additivament generable o no és un problema semidecidible. S'agafa una disjunció i s'hi aplica un algorisme de cerca per mirar de trobar algun generador additiu; si se'n troba, la disjunció és additivament generable i s'obté, de passada, el generador en qüestió. Però mentre no se'n troba cap no es pot saber si és additivament generable o no. Un exemple d'algorisme de cerca és el següent (utilitzat per nosaltres juntament amb l'algorisme Gamma, com pot veure's a l'annex corresponent):

P1 *S'inicia una llista* $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *amb* $a_i = i$.

P2 *Si* $F_f = D$ *llavors* f *és un generador additiu de* D *i hem acabat; sinó, anar a P3.*

P3 *Sigui* $k = \min\{i \in L\ ;\ i < n,\ a_i + 1 < a_{i+1}\}$ *si aquest conjunt no és buit; sinó,* $k = n$. *Anar a P4.*

P4 *Incrementam* a_k *en una unitat. Fem* $a_i = i$ *per a tot* $i < k$. *Anar a P2.*

Per altra banda, l'existència d'un generador additiu $f = (0, a_1, \ldots, a_n)$ d'una disjunció D ve determinada per la compatibilitat d'un sistema d'inequacions extret de cada un dels valors de l'operació binària:

- Si $k < n$, $D(i, j) = k$ si, i només si, $a_k \leqslant a_i + a_j < a_{k+1}$.

- En canvi, $D(i, j) = n$ si, i només si, $a_n \leqslant a_i + a_j$.

Observem que si $k < n$, tenim dues desigualtats, una dèbil "$\leqslant$" i una estricta "$<$", mentre que si $k = n$ només n'hi ha una (dèbil). Quan en comptes de considerar tots els punts (i, j) de L^2 per a construir el sistema d'inequacions, s'utilitzen, per a cada $k = 1, \ldots, n$, només els minimals i maximals de les diferents regions Δ_k de l'operació binària, $\Delta_k =$

$\{(i,j) \in L^2 \,; i \leqslant j, D(i,j) = k\}$, llavors s'obté un sistema d'inequacions *independents entre sí*, de manera que la satisfacció d'algunes d'elles no n'impliqui la satisfacció de cap altra.

Per això s'estudia la generació additiva d'una disjunció en termes de la compatibilitat d'un sistema d'inequacions lineals

$$\begin{cases} A_1X_1 < 0 \\ A_2X_2 \leqslant 0, \end{cases}$$

estrictes i dèbils; aquests sistemes tenen solució si, i només si, qualsevol solució del sistema d'equacions lineals

$$A^tY = 0\,, \quad \text{on } A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

té les primeres components iguals a zero (tantes com inequacions estrictes). En el cas que ens ocupa, aquesta condició equival a determinar si una sèrie de vectors, $\{s_1, \dots, s_p\}$ pertanyen al con convex polihèdric (d'ara en endavant ccp) $\langle -s_1, \dots, -s_p, \dots, -s_m \rangle_+$.

De la teoria de convexitat, el problema de pertinença d'un conjunt de vectors a un ccp es redueix a comprovar si uns determinats productes escalars de cada un d'aquests vectors amb els generadors del ccp dual són no–positius. Aquests generadors s'obtenen mitjançant l'algorisme Gamma aplicant-lo sobre els generadors del ccp inicial, en el nostre cas, $\{-s_1, \dots, -s_p, \dots, -s_m\}$.

No obstant això, per la naturalesa del sistema d'inequacions que s'obté del nostre problema, la generació additiva d'una disjunció es redueix a determinar si el con inicial, $\langle -s_1, \dots, -s_p, \dots, -s_m \rangle_+$ recobreix tot l'espai $\mathbb{R}^{m-n}$ o no; és a dir, si el ccp dual del con $\langle s_1, \dots, s_p, \dots, s_m \rangle_+$ corresponent conté únicament el vector $(\overbrace{0, \dots, 0}^{m-n})$. Així doncs, es procedeix de la manera següent:

P1 *Obtenir els elements minimals i maximals de cada regió i determinar un sistema d'inequacions, algunes estrictes (maximals) o altres dèbils (minimals).*

P2 *Determinar els generadors,* $\{s_1, \dots, s_m\}$ *del ccp corresponent.*

P3 *Determinar, fent ús de l'algorisme Gamma, els generadors del con dual.*

P4 *Comprovar si el con dual és trivial o no, decidint al mateix temps si la disjunció inicial és additivament generable.*

Seguidament, es pot determinar un generador d'aquelles disjuncions que siguin additivament generables aplicant l'algorisme de cerca anterior. S'ha de remarcar que quan una disjunció no és additivament generable vol dir que el sistema d'inequacions associat és incompatible.

Com a resultat de l'aplicació d'aquests algorismes, es demostrar que totes les t–conormes sobre L_n amb $n \leqslant 7$ són additivament generables i per a $n = 8$ n'hi ha exactament tres que no ho són. Es mostren, per exemple, les 22 t–conormes sobre L_4 amb un generador cadascuna. Les còpules commutatives són un cas particular de conjuncions. Les 10 còpules commutatives sobre L_4 i 24 de les 26 sobre L_5 són additivament generables. De les dues còpules que no són additivament generables sobre L_5 s'extreuen sistemes d'inequacions que contenen un mateix subsistema que resulta ser incompatible.

Capítol 4: Generació additiva d'algunes famílies de t–conormes discretes

La suma ordinal i l'anidament són dos mètodes per a obtenir noves disjuncions a partir d'altres. Respecte aquests dos processos s'ha establert que:

1. La suma ordinal de dues disjuncions (respec. t–conormes) additivament generables és una disjunció (respec. t–conorma) additivament generable. Es mostra també com obtenir-ne un generador additiu a partir dels generadors additius de les primeres.
2. El teorema de caracterització per a les t–conormes suaus estableix que qualsevol t–conorma suau és la t–conorma de Łukasiewicz o bé és una suma ordinal de t–conormes de Łukasiewicz. Es dedueix, per tant, que qualsevol t–conorma suau és additivament generable.
3. L'anidament és un nou mètode per a construir disjuncions més general que la suma ordinal (si S és la suma ordinal de S_1 i S_2 llavors també podem dir que és l'anidament de S_1 en S). S'ha estudiat l'associativitat i la generació additiva de l'anidament d'una t–conorma qualsevol en les t–conormes bàsiques.
4. L'anidament d'una t–conorma en la t–conorma màxim és sempre una t–conorma, que resulta ser additivament generable si, i només si, la primera ho és. Igualment l'anidament en la t–conorma dràstica. En ambdós casos es mostra com obtenir un generador additiu de la t–conorma resultant a partir d'un generador de la t–conorma anidada.
5. L'anidament d'una t–conorma en la t–conorma de Łukasiewicz esdevé una nova t–conorma quan se satisfan unes determinades condicions. En aquest cas, l'anidament és additivament generable si, i només si, la t–conorma anidada ho és. Es mostra també com obtenir un generador additiu de l'anidament a partir d'un generador additiu de la t–conorma anidada.

Una condició suficient per tal que la disjunció generada per un generador f sigui associativa és que $\mathrm{Ran}\ f$ sigui tancat per la suma. En són exemples els generadors del tipus $f_k = \big(0, (k+1)d, (k+2)d, \ldots, (k+n)d\big)$; aquests generadors corresponen a la família de t–conormes $S_k(i,j) = \min\{i+j+k, n\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, que són les t–conormes arquimedianes, suaus en L^* i estrictament creixents fora de la regió n. Els casos extrems d'aquesta família són $k = 0$ i $k = n-2$, la t–conorma de Łukasiewicz i la t–conorma dràstica, respectivament. De fet, $S_Ł \leqslant S_k \leqslant S_D$ (ordre producte).
Aquestes t–conormes poden generar-se també emprant progressions aritmètiques. Una funció del tipus $f = (0, a_1, a_1+d, \ldots, a_1+(n-1)d)$ amb $a_1 \geqslant d > 0$ és un generador de S_k amb $k = \lfloor \frac{a_1}{d} \rfloor - 1$. Del cas $a_1 < d$ s'obté la t–conorma S_{-1}, que és suau en L^* i estrictament creixent fora de la regió n però que té $i = 1$ com element idempotent (no és arquimediana). Es correspon al cas $k = -1$ de la família anterior, $S_{-1}(i,j) = \min\{i+j-1, n\}$, i resulta ser la suma ordinal de dues t–conormes de Łukasiewicz, la primera sobre L_2.

Els generadors f_k anteriors de les t–conormes S_k són funcions estrictament creixents sobre L amb diferència entre termes constant: $d_1 = \ldots = d_n$, essent $d_i = a_i - a_{i-1}$. Els generadors concaus sorgeixen de considerar funcions estrictament creixents sobre L amb diferència entre termes decreixent, $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_n > 0$, mentre que els convexos sorgeixen quan les diferències són cada vegada majors o iguals a les anteriors, $0 < d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. En són exemples, la t–conorma dràstica i la t–conorma màxim, respectivament. Les disjuncions amb generador concau són arquimedianes, mentre que aquelles que tenen generador convex són suaus. D'aquests, els convexos, en tenim una caracterització dels associatius en termes de les diferències d_i, $i = 1, \ldots, n$. El generador estàndard de la t–conorma de Łukasiewicz és concau i convex alhora; també $S_Ł$ és arquimediana i suau.

A partir d'un generador concau es pot construir un generador convex, i viceversa. D'aquesta manera, es poden considerar el generador concau obtingut a partir del generador (convex) de la t–conorma màxim i el generador convex obtingut a partir del generador (concau) de la t–conorma dràstica. El procés que transforma generadors d'un tipus en generador de l'altre tipus és cíclic, és a dir, s'obté el generador inicial si s'aplica dues vegades.

L'estudi de la generació additiva de les t–conormes suaus en L^* ve motivat del fet que els membres de la família S_k són t–conormes d'aquests tipus i que les úniques tres t–conormes sobre L_8 que no tenen generador additiu són no suaus sobre L_8^*. Ara bé, sobre L_9 trobam quatre t–conormes suaus en L_9^*, indicades per S_4, S_5, S_6 i S_7, que no són additivament generables, és a dir, el sistema d'inequacions que determinen els minimals i maximals de les diferents regions de la t–conorma conté un subsistema que resulta ser incompatible. Després d'estudiar aquests subsistemes, s'observa que, d'una banda, S_4 i S_6 tenen el mateix i, d'altra banda, S_5 i S_7 tenen el mateix subsistema diferent de l'anterior. A més, a partir d'un subsistema es pot obtenir l'altre simplement intercanviant $<$ amb $\geqslant$ i també $>$ amb $\leqslant$ (els minimals (maximals) que determinen el subsistema primer són els maximals (minimals) del segon). Hi ha, per tant, una *estructura incompatible amb la generació additiva* comú en aquestes quatre t–conormes.

S'estudia la subfamília de les disjuncions i t–conormes suaus en L^* que només prenen dos valors: $n-1$ i n ($D(1,1) = n-1$). D'aquestes se'n caracteritzen les associatives i es determina que n'hi ha 2^{n-2}. Aquestes t–conormes tenen només dues regions, la regió $n-1$ i la regió n. S'estudia la relació que hi ha entre els maximals d'una ($n-1$) i els minimals de l'altra (n) i s'observa que coneixent-ne uns es poden determinar els altres. És més, si es considera l'ordre parcial sobre L^2, $\preceq$, donat per: $(a, b) \preceq (a', b') \Leftrightarrow a \leqslant a'$ i $b \geqslant b'$, llavors el conjunt unió d'aquests maximals i minimals, $Max_{n-1} \cup Min_n$, es pot ordenar totalment, $(\alpha_1, \beta_1) \preceq (\alpha_2, \beta_2) \preceq \ldots \preceq (\alpha_t, \beta_t)$, de manera que (α_1, β_1) és un minimal (ordre producte) de la regió n, (α_2, β_2) és un maximal (ordre producte) de la regió $n-1$, i així de forma alternada fins arribar al darrer element, (α_t, β_t), que o bé és un minimal o bé un maximal. Aquest fet ens permet elaborar un algorisme que *construeix* un generador directament de l'operació binària en comptes d'utilitzar mètodes de cerca, i es demostra així que qualsevol disjunció suau i bivalent sobre L^* és additivament generable.

Una darrera família de t–conormes que s'estudia és el de les bivalents en $L^* = \{1, 2, \ldots, n\}$ que tenen una estructura semblant a l'anidament: una regió quadrada $r \times r$ de valor α, $1 \leqslant r \leqslant \alpha < n$, dins la t-conorma dràstica sobre L ($S(i,j) = \alpha$ si $1 \leqslant \max\{i,j\} \leqslant r$, i $S(i,j) = n$ si $\max\{i,j\} > r$). Totes aquestes disjuncions resulten ser t–conormes additivament generables, i es mostra com obtenir-ne un generador additiu a partir dels valors n, r i α.

Capítol 5: Utilitat i aplicacions de la generació additiva

La generació additiva ofereix la possibilitat de treballar amb t–conormes a partir del generador en comptes de fer-ho sobre la taula o les propietats d'aquestes. En aquest sentit, es mostren aplicacions en dos camps: els operadors d'indistingibilitat i les S–implicacions. Pel que fa als operadors d'indistingibilitat, tenim:

1. Quan s'usa una t–norma T additivament generada per f, la seva residuació $\overrightarrow{T}$ (que és un T–preordre sobre L) i la seva biresiduació E_T (que és un T–operador d'indistingibilitat sobre L) admeten una expressió en termes de f.

2. D'una banda, el teorema de representació per als T–operadors d'indistingibilitat sobre un conjunt X és una caracterització d'aquests en termes de l'existència d'una família generadora (L–subconjunts de X) d'E. Quan aquesta família és de cardinal mínim se l'anomena una base de E. De l'altra, a partir d'una t–norma T additivament generada per f i d'un T–operador d'indistingibilitat E, es poden determinar els L–subconjunts d'un conjunt finit X extensionals respecte E, resolent un sistema d'inequacions determinat per f, E i X, dels quals es pot obtenir una base del T–operador E.

Mentre que respecte a les propietats de les S–implicacions, es té:

1. Per a les S–implicacions, amb S una t-conorma additivament generable, s'ha estudiat la satisfacció de vuit propietats relatives a les funcions d'implicació, com ara la contraposició respecte la negació, el principi d'identitat, la propietat d'ordre, el modus ponens generalitzat, el principi d'intercanvi, etc. Aquest estudi s'ha fet transformant algunes d'aquestes propietats en condicions sobre els generadors.

2. Les propietats $I(i,j) = I(N(j), N(i))$ –contraposició respecte de la negació N–, $I(i,0) = n - i$, $I(i,j) \geqslant j$, $I(i, I(j,k)) = I(j, I(i,k))$ –principi d'intercanvi– són satisfetes per a qualsevol S–implicació, mentre que la propietat $I(i, N(i)) = N(i)$ se satisfà per a S–implicacions si, i només si, $S = S_M$.

   S'ha comprovat que el principi d'identitat $I(i,i) \leqslant n$ se satisfà per a tota S_k–implicació, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, i també per a S–implicacions amb $S = F_f$, la disjunció generada per f, quan f és un generador concau associatiu.

   Les propietats $I(i,i) \leqslant n$ –principi d'identitat–, $I(i,j) = n \Leftrightarrow i \leqslant j$ –propietat d'ordre– i $T(i, I(i,j)) \leqslant j$ (–modus ponens generalitzat amb T i S duals una de l'altra– se satisfan per a tota S–implicació amb $S = F_f$ quan f és un generador mixt ($a_i + a_{n-i} = a_n$) associatiu.

3. Els generadors mixtos no són, en general, associatius. Fixat n, quan es pren un generador $(0, a_1, \ldots, a_k)$, $k = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, el generador complet $(0, a_1, \ldots, a_n)$ queda determinat per la condició $a_i + a_{n-i} = a_n$. Es demostra que quan la primera part és còncava (respec. convexa) llavors l'altra és convexa (respec. còncava), per la qual cosa es planteja l'estudi dels generadors concau–convexos (respec. convex–concaus) que s'obtenguin a partir dels generadors estàndards de les t–conormes bàsiques (el generador estàndard de la t–conorma dràstica és concau, el de la t–conorma màxim és convex i el de la t–conorma de Łukasiewicz és dels dos tipus). A més, el resultat que mostra com obtenir un generador convex a partir d'un concau (i viceversa) ofereix un ventall més ample de possibilitats.

4. Els generadors concau–convexos i convex–concaus obtinguts a partir del generador estàndard de la t–conorma màxim són generadors mixtos associatius.

   Els generadors concau–convexos obtinguts a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica són associatius, mentre que els convex–concaus no ho són quan $n \geqslant 5$ (quan $n < 5$ els generadors que en resulten són trivialment associatius).

   Finalment, quan es considera el generador mixt (sobre L_k) obtingut a partir del generador estàndard de la t–conorma de Łukasiewicz, que és concau i convex alhora, s'obté novament el generador estàndard de la t–conorma de Łukasiewicz (sobre L_n). S'ha fet també l'estudi prenent altres generadors concaus d'aquesta t–conorma dels que s'obtenen generadors mixtos associatius d'una t–conorma diferent de $S_Ł$.

6.2 CONCLUSIONS I TREBALL FUTUR

Conclusions

A continuació es mostren les aportacions més destacades que s'han fet a cadascuna de les dues línies de recerca:

LÍNIA 1 Per diferents famílies de disjuncions discretes, caracteritzar aquelles que són additivament generables.

- S'ha determinat un generador additiu per a les t–conormes bàsiques (de Łukasiewicz, màxim i dràstica) sobre L_n, per a tot n enter positiu.
- Mitjançant mètodes computacionals, s'ha establert que són additivament generables: les t–conormes sobre L_n amb $n \leqslant 7$, les t–conormes sobre L_8 excepte tres, les t–conormes sobre L_n, suaus en L_n^* amb $n \leqslant 8$, les (deu) còpules sobre L_4 i vint-i-quatre de les vint-i-sis còpules sobre L_5. Per a totes elles s'ha determinat un generador additiu, alguns dels quals es mostren en el treball. Per aquelles que no són additivament generables s'ha demostrat la inexistència de generador.
- La suma ordinal de disjuncions (t–conormes) additivament generables és una disjunció (t–conorma) additivament generable. Com a conseqüència d'això, les t–conormes suaus són totes additivament generables.
- L'anidament d'una t–conorma en la t–conorma màxim és sempre una t–conorma. Igualment quan l'anidament és en la t–conorma dràstica. En canvi, l'anidament d'una t–conorma en la t–conorma de Łukasiewicz no és en general una disjunció associativa; per aquest tipus d'anidament s'han determinat les condicions perquè ho sigui. En els tres casos, es determina com obtenir un generador additiu de la t–conorma resultant a partir del generador de la t–conorma anidada.
- S'ha demostrat que les t–conormes suaus sobre L^*, arquimedianes i estrictament creixents fora de la regió n són totes additivament generables (família S_k).
- Les disjuncions bivalents i suaus en L^* que són t–conormes han estat caracteritzades. A més, totes aquestes disjuncions són additivament generables i es mostra com obtenir-ne un generador additiu.
- Les disjuncions bivalents en L^* del tipus $S(i,j) = \alpha$ si $1 \leqslant \max\{i,j\} \leqslant r$ i $S(i,j) = n$ en cas contrari, amb $1 \leqslant r \leqslant \alpha < n$ són totes additivament generables. Com sempre, es mostra com obtenir-ne un generador additiu.

LÍNIA 2 Determinar funcions estrictament creixents $f\colon L \to [0, +\infty)$ amb $f(0) = 0$ que generin additivament operacions associatives (t–conormes).

- Els generadors tancats per la suma, Ran f + Ran f $\subset$ Ran f $\cup$ [max Ran f, $+\infty$) són associatius, i determinen t–conormes arquimedianes. Per exemple, els generadors del tipus $\big(0, kd, (k+1)d, \ldots, (n+k-1)d\big)$ (família S_k, $k \geqslant 0$).
- Els generadors en progressió aritmètica, $f = (0, a, a+d, \ldots, a+(n-1)d)$, $d > 0$, són associatius (família S_k, $k \geqslant -1$).
- S'han caracteritzat els generadors convexos associatius (t–conormes suaus).
- Els generadors convex–concaus i concau–convexos obtinguts a partir del generador estàndard de la t–conorma màxim i de Łukasiewicz són associatius. També ho són els generadors concau–convexos obtinguts a partir del generador estàndard de la t–conorma dràstica, però no els convex–concaus. S'han determinat també generadors concau–convexos associatius obtinguts a partir de diversos generadors concaus de la t–conorma de Łukasiewicz.

Aquests generadors permeten obtenir t–conormes S, les S–implicacions de les quals satisfan el principi d'identitat ($I(i,i) \leqslant n$), la propietat d'ordre ($I(i,j) = n \Leftrightarrow i \leqslant j$) i el modus ponens generalitzat ($T(i, I(i,j)) \leqslant j$ amb T i S duals una de l'altra).

Treball futur

Durant el desenvolupament del treball han anat sorgint alguns temes que es plantegen com a possibles línies de treball futur, a més de continuar amb les que s'ha estat treballant. Això permetria ampliar la feina feta fins ara. Es proposen els ítems següents:

- Caracteritzar les t–conormes (o disjuncions) additivament generables (com a marc general).
- Caracteritzar les còpules additivament generables.
- Caracteritzar els generadors concaus que són associatius.
- Demostrar (o trobar un contraexemple) que tota disjunció arquimediana additivament generable adment algun generador additiu concau.
- Demostrar (o trobar un contraexemple) que tota disjunció suau additivament generable admet algun generador additiu convex (ja està fet per a t–conormes). Aquest cas inclou les còpules discretes que no són t–normes.
- Determinar quins generadors mixtos són associatius quan la primera part ho és.
- Estudiar com ha de ser el generador additiu d'una t–norma sobre L per tal que la R–implicació corresponent satisfaci determinades propietats de les funcions d'implicació.
- Estudiar com ha de ser el generador additiu d'una t–norma sobre L, i per tant el de la seva t–conorma dual, per tal que la QL–implicació corresponent satisfaci unes o altres propietats de les funcions d'implicació. També per NQL–implicacions.

A

ANNEX 1: PROGRAMARI UTILITZAT

Els programes que es descriuen a continuació estan implementats en llenguatge C++.

A.1 GENERADOR DE T–CONORMES I GENERADOR DE DISJUNCIONS AMB DIFERENTS PROPIETATS

Aquest programa permet obtenir totes les disjuncions sobre L_n en relació les propietats de l'associativitat, suavitat i arquimedianeïtat. Es pot elegir que les disjuncions no siguin associatives, que sí que ho siguin o que tengui en compte aquesta propietat. El mateix amb les arquimedianes. Per les suaus s'ofereixen quatre possibilitats: no suau, suau sobre L, suaus sobre L^* i que no ho distingeixi. Així, per exemple, es poden obtenir totes les disjuncions que siguin arquimedianes i suaus sobre L^*, o les t–conormes no suaus arquimedianes, etc. Les disjuncions així obtingudes es guarden en un fitxer anomenat *disjuncions.txt*.

```
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

void main(void) {
  // declaracions de variables
  int dimensio;
  int s[20][20];
  int i,j,k;
  int quantes;
  int control;
  int controlassociativa, controlsuavitat, controlarquimediana;
  int a,b;
  int sup, inf;
  char c;
  char nom[16];
  ofstream fitxer;
  int associativa, suau, arquimediana;

  comença el programa : lectura de dades
  cout « "PROGRAMA PER A GENERAR T-CONORMES SOBRE Ln«< endl;
  // dimensions
  cout « endl « endl « "n = ";
  cin » dimensio;
  // associativitat
  cout « endl « "Associativa (0 no - 1 si - 2 totes): ";
  cin » associativa;
  // suavitat
  cout « endl « "Suau (0 no - 1 sobre L - 2 sobre L* - totes): ";
  cin » suau;
  // arquimediana
  cout « endl « "Arquimediana (0 no - 1 si - 2 es igual): ";
  cin » arquimediana;
  quantes = 0;
  // cream i obrim el fitxer de sortida corresponent
  nom[0] = 'd';
```

```
nom[1] = 'i';
nom[2] = 's';
nom[3] = 'j';
nom[4] = 'u';
nom[5] = 'n';
nom[6] = 'c';
nom[7] = 'i';
nom[8] = 'o';
nom[9] = 'n';
nom[10] = 's';
nom[11] = '.';
nom[12] = 't';
nom[13] = 'x';
nom[14] = 't';
nom[15] = '\0';
fitxer.open(nom);
fitxer « "dimensio = «< dimensio « endl « endl;
//frontera de l'operació binària
for (i=0; i <= dimensio; i++)
{
  s[i][0] = i;
  s[0][i] = i;
  s[i][dimensio] = dimensio;
  s[dimensio][i] = dimensio;
}
// comencem per la t-conorma màxim
for (i=1; i < dimensio; i++)
{
  for (j=i; j < dimensio; j++)
  {
    s[i][j] = j;
    s[j][i] = j;
  }
}
controlassociativa = 1;
controlsuavitat = 1;
controlarquimediana = 1;
// ** ASSOCIATIVITAT
if (associativa < 2)
{
  for (i=1;(i<dimensio)& controlassociativa; i++)
  {
    for (j=1;(j<dimensio)& controlassociativa;j++)
    {
      for (k=1;(k<dimensio)& controlassociativa;k++)
      {
        controlassociativa = s[i][s[j][k]] == s[s[i][j]][k];
      }
    }
  }
  if (associativa == 0)
    controlassociativa = 1 - controlassociativa;
}
control = controlassociativa;
// ** SUAVITAT
if ((control)&(suau<=1)) // no suau o suau sobre L
{
  for (i=0;(i<dimensio)& controlsuavitat;i++)
  {
    for (j=i;(j<dimensio)& controlsuavitat;j++)
    {
      controlsuavitat = (s[i+1][j] - s[i][j] <= 1);
      controlsuavitat = controlsuavitat & (s[i][j+1] - s[i][j] <= 1);
    }
  }
  if (suau == 0)
    controlsuavitat = 1 - controlsuavitat;
}
else if ((control)& (suau==2)) // sobre L*
{
  for (i=1;(i<dimensio)& controlsuavitat;i++)
  {
```

```
    for (j=i;(j<dimensio)&controlsuavitat;j++)
    {
      controlsuavitat = (s[i+1][j] - s[i][j] <= 1);
      controlsuavitat = controlsuavitat & (s[i][j+1] - s[i][j] <= 1);
    }
  }
}
control = control & controlsuavitat;
// ** ARQUIMEDIANA
if ((control)&(arquimediana<2))
{
  for(i=1;i<dimensio;i++)
    controlrquimediana = ((controlarquimediana)&(s[i][i]>i));
  if (arquimediana == 0)
    controlarquimediana = 1 - controlarquimediana;
}
control = control & controlarquimediana;
// Arribats aquí, control = 1 ssi satisfà allò que volem
if (control)
{
  // guardem l'operació binària
  fitxer « endl « "x«< endl;
  for (i=0; i <= dimensio; i++)
  {
    for (j=0; j <= dimensio; j++)
    {
      fitxer « s[i][j] « "";
    }
    fitxer « endl;
  }
  quantes++;
}
// Ara anam cap a totes les altres operacions binàries
// PROCEDIMENT PRINCIPAL ***************************************
a=1;
while (a>0)
{
  // Obtenim una nova disjunció
  a = dimensio - 1; // en tot aquest apartat, a <= b
  b = dimensio - 1; // (triangle inferior de l'op binària)
  while ((s[a][b] == dimensio) && (a > 0))
  {
    if (a == b)
    {
      a-;
      b = dimensio - 1;
    }
    else // a < b
    {
      b-;
    }
  }
  if ((a == 1)& (s[1][1] == dimensio)
  {
    if (b == 1)
    {
      s[1][1]++;
      a = -1;
    }
    else if ((b == 2)& (s[1][2] == dimensio-1))
    {
      s[1][2]++;
      s[2][1]++;
      a=-1;
    }
  }
  else if (a > 0)
  {
    s[a][b]++;
    s[b][a] = s[a][b];
    i=a;
    j=b+1;
```

```
  while (i < dimensio)
  {
    while (j < dimensio)
    {
      s[i][j] = max(max(i,j),max(s[i-1][j],s[i][j-1]));
      s[j][i] = s[i][j];
      j++;
    }
    i++;
    j = i;
  }
}
controlassociativa = 1;
controlsuavitat = 1;
controlarquimediana = 1;
// ** ASSOCIATIVITAT

if (associativa < 2)
{
  for (i=1;(i<dimensio)& controlassociativa; i++)
  {
    for (j=1;(j<dimensio)& controlassociativa;j++)
    {
      for (k=1;(k<dimensio)&controlassociativa;k++)
      {
        controlassociativa = s[i][s[j][k]] == s[s[i][j]][k];
      }
    }
  }
  if (associativa == 0)
    controlassociativa = 1 - controlassociativa;
}
control = controlassociativa;
// ** SUAVITAT

if ((control)& (suau<=1)) // no suau o suau sobre L
{
  for (i=0;(i<dimensio)& controlsuavitat;i++)
  {
    for (j=i;(j<dimensio)& controlsuavitat;j++)
    {
      controlsuavitat = (s[i+1][j] - s[i][j] <= 1);
      controlsuavitat = controlsuavitat & (s[i][j+1] - s[i][j] <= 1);
    }
  }
  if (suau == 0)
    controlsuavitat = 1 - controlsuavitat;
}
else if ((control)& (suau==2)) // sobre L*
{
  for (i=1;(i<dimensio)& controlsuavitat;i++)
  {
    for (j=i;(j<dimensio)& controlsuavitat;j++)
    {
      controlsuavitat = (s[i+1][j] - s[i][j] <= 1);
      controlsuavitat = controlsuavitat & (s[i][j+1] - s[i][j] <= 1);
    }
  }
}
control = control & controlsuavitat;
// ** ARQUIMEDIANA
if ((control)& (arquimediana<2))
{
  for(i=1;i<dimensio;i++)
    controlarquimediana = ((controlarquimediana)& (s[i][i]>i));
  if (arquimediana == 0)
    controlarquimediana = 1 - controlarquimediana;
}
control = control & controlarquimediana;
// Arribats aquí, control = 1 ssi satisfà allò que volem
if (control)
{
```

```
      // guardem l’operació binària
      fitxer « endl « "x«< endl;
      for (i=0; i <= dimensio; i++)
      {
        for (j=0; j <= dimensio; j++)
        {
          fitxer « s[i][j] « "";
        }
        fitxer « endl;
      }
    quantes++;
    }
  } // fi de while
  fitxer « ’*’;
  fitxer « endl « "hem guardat «< quantes « "t-conormes";
  fitxer.close();
}
```

A.2 ANÀLISI D'UN GENERADOR

Aquest programa analitza si el generador que s'introdueix per pantalla és associatiu o no, i mostra la taula de la disjunció (o t-conorma) corresponent.

```
#include <iostream.h>
#include <string.h>

void main(void) {
  const int n_max = 50;
  // ***** declaracions de tipus *****
  struct tnorma {
    int dimensio;
    int t[n_max+1][n_max+1];
  };

  // ***** declaracions de variables *****
  tnorma t;
  float generador[n_max+1];
  int control;
  int i, j, k;
  float n;
  char c;

  // ***** comença el programa *****
  c= 'n';
  generador[0]=0;
  while (c == 'n')
  {
    cout « "n = ";
    cin » t.dimensio;
    cout « endl;
    for (i = 1; i<=t.dimensio;i++)
    {
      cout « "a[«< i « "] =";
      cin » generador[i];
      cout « endl;
    }
    // frontera de les operacions binàries generades (i per tant de les disjuncions o t-conormes)

    for (i=0; i <= t.dimensio; i++)
    {
      t.t[i][0] = i;
      t.t[0][i] = i;
      t.t[i][t.dimensio] = t.dimensio;
      t.t[t.dimensio][i] = t.dimensio;
    }

    // cream la disjunció corresponent

    for (i = 1; i < t.dimensio ; i++)
    {
      for (j = i; j < t.dimensio; j++)
      {
        n = generador[i]+generador[j];
        k = 0;
        while ((k <= t.dimensio) && (generador[k] <= n))
          k++;
        t.t[i][j] = k-1;
        t.t[j][i] = k-1;
      }
    }
    // miram si és t-norma (associativa)

    control = 1;
    for (i=1; (i<t.dimensio) & control; i++)
    {
      for (j=1;(j<t.dimensio) & control;j++)
      {
        for (k=1;(k<t.dimensio) & control;k++)
```

```
        {
          control = (t.t[i][t.t[j][k]] == t.t[t.t[i][j]][k]);
        }
      }
    }
    // MOSTRAM RESULTATS

    cout « “el generador (” « generador[0];
    for (i=1; i<=t.dimensio;i++)
    {
      cout « “, ” « generador[i];
    }
    cout « “) ”;
    if (control == 0)
      cout « “no ”;
    cout « “es associatiu.‘” « endl « endl « “L’operacio binaria es;” « endl;
    for (i = 0; i <= t.dimensio; i ++)
    {
      for(j=0;j<=t.dimensio;j++)
      {
        if (t.t[i][j] < 10)
          cout « “ ”;
        cout « t.t[i][j] « “ ”;
      }
      cout « endl;
    }
    cout « endl;
  }
};
```

A.3 ALGORISME DECIDIBLE PER A DETERMINAR UN GENERADOR ADDITIU D'UNA DISJUNCIÓ BASAT EN L'ALGORISME GAMMA

Aquest algorime està fet per a t–normes (i conjuncions). Donada una disjunció S, fàcilment es troba la conjunció dual $C(i,j) = n - D(n-i, n-j)$; ambdues tenen *els mateixos* generadors, la única diferència és que els de les conjuncions són estrictament decreixents i els de les disjuncions són estrictament creixents.

```
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <stdio.h>

/* modus 1: programa Gamma usual
modus 2: s'introdueix la taula de sumes
modus 3: s'introdueix l'operació sencera
modus 4: s'introdueix l'operació sense frontera
*/
int absolut (int a) {
  if (a < 0)
  {
    a = (-1)*a;
  }
  return a;
}
double absolut (double a) {
  if (a < 0)
  {
    a = (-1)*a;
  }
  return a;
}
int gamma(char *nom_entrada, char *nom_sortida) {
  // declaracions de variables
  const int max_n = 15;
  const int max_k = 5*max_n/2;
  const int max_m = 4*max_n;
  const int max_r = 3*max_n;
  const int max_cols = 4*max_m;
  const int maximinimals = 3*max_n/2;
  const int const_ie = 0;
  const double epsilon = 0.0001;
  int copiames[max_cols], copiamenys[max_cols];
  int m, n, k, r, mins, maxs;
  int pivot, acaba, cols, cols_w, afegir, valor, va_ok;
  double pescalar;
  double vector[max_r][max_m], inicial[max_r][max_k], W[max_r][max_cols];
  int sumes[max_n][max_r];
  int I_menys[max_cols], I_mes[max_cols], I_zero[max_cols];
  int TN[max_n+1][max_n+1], minimals[3][maximinimals], maximals[3][maximinimals];
  int i, j, ia, ib, ic, id, ie; // índexos
  double U[max_r+1][max_cols], t[max_cols];
  int V[max_cols], h, A_0[max_r][max_cols];
  int A_0_w[max_r][max_cols]; // [max_cols*max_cols/4][max_cols]
  ifstream entrada;
  ofstream sortida;
  // comença el programa
  entrada.open(nom_entrada);
  sortida.open(nom_sortida);
  // ***** lectura de les dades *****
  entrada » n;
  // llegim l'operació binària sencera (amb frontera)
  for (i = 0; i <= n; i++)
    for (j = 0; j <= n; j++)
      entrada » TN[i][j];
  // hem de construir la taula de sumes
  mins = -1; // minimals
  maxs = -1; // maximals
  // cercam minimals i maximals
  for (valor = 0; valor < n; valor++)
```

```
  for (i = 1; i < n; i++)
    for (j = i; j < n; j++)
      if (TN[i][j] == valor)
      {
        if ((TN[i-1][j] < valor) & (TN[i][j-1] < valor))
        { // tenim un minimal
          mins++;
          minimals[0][mins] = i;
          minimals[1][mins] = j;
          minimals[2][mins] = valor;
        }
        if ((TN[i+1][j] > valor) & (TN[i][j+1] > valor))
        { // tenim un maximal
          maxs++;
          maximals[0][maxs] = i;
          maximals[1][maxs] = j;
          maximals[2][maxs] = valor;
        }
    }
k = n + mins + 1;
m = n + mins + 1 + maxs + 1;
r = mins + 1 + maxs + 1;
cols = m - n;
// calcularem la matriu de sumes
for (j = 0; j <= mins; j++)
{
  ib = j;
  for (i = 0; i < n; i++)
    sumes[i][j] = 0;
  if (minimals[0][ib] == minimals[1][ib])
  {
    ia = minimals[0][ib];
    sumes[ia][j] = 2;
  }
  else
  {
    ia = minimals[0][ib];
    sumes[ia][j] = 1;
    ia = minimals[1][ib];
    sumes[ia][j] = 1;
  }
  ia = minimals[2][ib];
  sumes[ia-1][j] = -1;
}
for (j = mins+1; j < r; j++)
{
  ib = j - mins - 1;
  for (i = 0; i < n; i++)
    sumes[i][j] = 0;
  if (maximals[0][ib] == maximals[1][ib])
  {
    ia = maximals[0][ib];
    sumes[ia][j] = -2;
  }
  else
  {
    ia = maximals[0][ib];
    sumes[ia][j] = -1;
    ia = maximals[1][ib];
    sumes[ia][j] = -1;
  }
  ia = maximals[2][ib];
  sumes[ia][j] = 1;
}
// TAULA MINIMALS I MAXIMALS CONSTRUIDA
for (i = 1; i < n; i++)
  for (j = 0; j < r; j++)
  {
    sumes[i][j] = sumes[i-1][j] + sumes[i][j];
  }
// TAULA DE SUMES CONSTRUIDA
for (i = 0; i < n; i++)
```

```
    for (j = 0; j < r; j++)
    {
      inicial[j][i] = sumes[i][j];
      vector[j][i] = (-1)*inicial[j][i];
    }
  for (j = n; j < m; j++)
    for (i = 0; i < r; i++)
      if (i == j - n)
      {
        vector[i][j] = -1;
        if (j < k)
          inicial[i][j] = 1;
      }
      else
      {
        vector[i][j] = 0;
        if (j < k)
          inicial[i][j] = 0;
      }
  for (i = 0; i < r; i++)
    for (j=0; j < r; j++)
      if (i == j)
        U[i][j] = 1;
      else
        U[i][j] = 0;
  for (j = 0; j < cols; j++)
    U[r][j] = 0; // el vector u_j encara no està en “w”
  for (i = 0; i < r; i++)
    V[i] = 1;
  for (i = r; i < max_cols; i++)
    V[i] = 0;
  for (i = 0; i < r; i++)
    for (j = 0; j < cols; j++)
      A_0[i][j] = 0;
  // ******************************************************************
  // ******* comença l’algoritme ***************************************
  // ******************************************************************
  h= 0;
  acaba = 0;
  do
  {
    for (i = 0; i < cols; i++) // t = v_h*U
    {
      t[i] = 0;
      for (j = 0; j < r; j++)
      {
        t[i] = t[i] + vector[j][h]*U[j][i];
      }
    }
    // cerca de pivot *****
    i = 0;
    while ((i < r-1) & & (V[i] == 0))
      i++;
    while ((i < cols-1) & & (t[i] == 0))
    {
      i++;
      while ((i < r-1) & & (V[i] == 0))
        i++;
    }
    if ((i < cols) & & (t[i] != 0) & (i < r) & & (V[i] == 1))
    { // si hem trobat pivot ******
      pivot = i;
      // normalitzam columna pivot ***
      for (i = 0; i < r; i++)
      {
        U[i][pivot] = (-1)*U[i][pivot]/t[pivot];
        if (absolut(U[i][pivot]) < epsilon)
          U[i][pivot] = 0;
      }
      // es realitza la pivotació amb les demés columnes ***
      for (j = 0; j < cols; j++)
        if (j != pivot)
          for (i = 0; i < r; i++)
```

```
    {
      U[i][j] = U[i][j] + t[j]*U[i][pivot];
      if (absolut(U[i][j]) < epsilon)
        U[i][j] = 0;
    }
    // S'afegeixen els índexs a les llistes de A_0 ***
    for (j = 0; j < r; j++)
      if (j != pivot)
        A_0[j][h] = 1;
    V[pivot] = 0;
    // passam el vector pivot de "v" a "w" ***
    U[r][pivot] = 1;
  }
  else
  { // si no hem trobat pivot ******
    pivot = -1;
    for (i = 0; i < cols; i++)
    {
      I_menys[i] = 0;
      I_mes[i] = 0;
      I_zero[i] = 0;
    }
    for (j = 0; j < cols; j++)
    if (V[j] == 0)
    {
      pescalar = 0;
      for (i = 0; i < r; i++)
        pescalar = pescalar + U[i][j]*vector[i][h];
      if (pescalar < 0)
        I_menys[j] = 1;
      else if (pescalar > 0)
        I_mes[j] = 1;
      else if (pescalar == 0)
      {
        I_zero[j] = 1;
        A_0[j][h] = 1;
      }
    }
    for (i = 0; i < cols; i++)
    {
      copiames[i] = I_mes[i];
      copiamenys[i] = I_menys[i];
    }
    // ara mirarem si I_mes està buit o no ***
    ic = 0;
    while ((ic < cols-1) & & (I_mes[ic] == 0))
      ic++;
    if (I_mes[ic] == 1)
    {
      // I_mes no està buit, mirarem si I_menys està buit
      id = 0;
      while ((id < cols-1) & & (I_menys[id] == 0))
        id++;
      if (I_menys[id] == 1)
      {
        // I_menys no està buit
        cols_w = -1;
        for (ia = 0; ia < cols; ia++)
          for (ib = 0; ib < cols; ib++)
            if ((I_menys[ia] == 1) & & (I_mes[ib] == 1))
            {
              cols_w++;
              // cream W
              for (i = 0; i < r; i++)
              {
                W[i][cols_w] = t[ib]*U[i][ia] - t[ia]*U[i][ib];
                // cream Ao(w)
              }
              for (i = 0; i < r; i++)
              {
                if ((A_0[i][ia] == 1) & & (A_0[i][ib] == 1))
                  A_0_w[i][cols_w] = 1;
```

```
          else
            A_0_w[i][cols_w] = 0;
        }
        A_0_w[h][cols_w] = 1;
      }
// eliminam de U els vectors de I_més (i tb tota la resta d’info)
ia = 0;
while (ia < cols-1)
{
  if (I_mes[ia]==1)
  {
    for (j = ia; j < cols-1; j++)
    {
      for (i = 0; i <= r; i++)
      {
        U[i][j] = U[i][j+1];
        A_0[i][j] = A_0[i][j+1];
      }
      V[j] = V[j+1];
      I_menys[j] = I_menys[j+1];
      I_mes[j] = I_mes[j+1];
      I_zero[j] = I_zero[j+1];
    }
    V[cols-1] = 0;
    I_menys[cols-1] = 0;
    I_mes[cols-1] = 0;
    I_zero[cols-1] = 0;
    cols = cols - 1;
  }
  else
    ia++;
}
// ’ia’ = ’cols-1’;
if (I_mes[ia]==1)
{
  V[cols-1] = 0;
  I_menys[cols-1] = 0;
  I_mes[cols-1] = 0;
  I_zero[cols-1] = 0;
  cols = cols - 1; //Així de fàcil s’elimina la darrera columna
}
// afegim a U els vectors de W no nuls tals que satisfacin la condició seg:
for (ia = 0; ia <= cols_w; ia++)
{
  afegir = 1;
  i = 0;
  while ((i < r-1) & & (W[i][ia] == 0))
    i++;
  if (W[i][ia] != 0)
  { // w <> 0
    ib = 0;
    while ((ib <= cols_w) & (afegir == 1))
    {
      if (ib != ia)
      {
        i = 0;
        while ((i < r-1) & & (W[i][ia] == W[i][ib]))
          i++;
        if (W[i][ia] != W[i][ib])
        { //W[ia] diferent de W[ib]
          i = 0;
          ie = const_ie;
          while ((i < r-1) & & (A_0_w[i][ia] <= A_0_w[i][ib]))
          {
            ib++;
            if (ie == 0)
            ie = A_0_w[i][ib] - A_0_w[i][ia];
          }
          if (((ie = 0) & (A_0_w[i][ia] == A_0_w[i][ib])) || (A_0_w[i][ia] > A_0_w[i][ib]))
          {
            // miram condició 3 de la darrera línia etapa 5
            j = 0;
```

```
            while ((j < cols) & (afegir == 1))
            {
            if (I_zero[j] == 1)
            {
            i = 0;
            ie = const_ie;
            while ((i < r - 1) & & (A_0_w[i][ia] <= A_0_w[i][j]))
            {
            i++;
            if (ie == 0)
            ie = A_0_w[i][j] - A_0_w[i][ia];
            }
            if (((ie == 0) & & (A_0_w[i][ia] == A_0_w[i][j])) || (A_0_w[i][ia] > A_0_w[i][j]))
            {
            }
            else
            afegir = 0;
            }
            j++;
            }
          }
          else
            afegir = 0;
        }
      }
      ib++;
    }
  }
  else
    afegir = 0;
  if (afegir == 1)
  {
    for (i = 0; i < r; i++)
      U[i][cols] = W[i][ia];
    for (i = 0; i < r; i++)
      A_0[i][cols] = A_0_w[i][ia];
    V[cols] = 0;
    cols++;
  }
 }
}
else
{
  // I_menys està buit
  // eliminam de U els vectors de I_més (i tb tota la resta d'info)
  ia = 0;
  while (ia < cols -1)
  {
    if (I_mes[ia]==1)
    {
      for (j = ia; j < cols-1; j++)
      {
        for (i = 0;i <= r; i++)
        {
          U[i][j] = U[i][j+1];
          A_0[i][j] = A_0[i][j+1];
        }
        V[j] = V[j+1];
        I_menys[j] = I_menys[j+1];
        I_mes[j] = I_mes[j+1];
        I_zero[j] = I_zero[j+1];
      }
      V[cols-1] = 0;
      I_menys[cols-1] = 0;
      I_mes[cols-1] = 0;
      I_zero[cols-1] = 0;
      cols = cols - 1;
    }
    else
      ia++;
  }
  // 'ia' = 'cols';
```

```
          if (I_mes[ia] == 1)
          {
            V[cols-1] = 0;
            I_menys[cols-1] = 0;
            I_mes[cols-1] = 0;
            I_zero[cols-1] = 0;
            cols = cols - 1;
          }
        }
      }
      else
        // I_mes està buit; no fem res!
    }
    // etapa 6:
    if (h < m - 1)
      h++;
    else
      acaba = 1;
}while(acaba == 0);
for(j = 0; j < r; j++)
if (V[j] == 1)
{
  for (i = 0; i < r; i++)
    U[i][cols] = -U[i][j];
  cols++;
}
// **********************************************************************
// guardam vectors en el fitxer *******************************************
// **********************************************************************
sortida « "El valor de n és «< n « endl;
sortida « "El valor de m és «< m « endl;
sortida « "El valor de k és «< k « endl;
sortida « "El valor de m - n és «< r « endl « endl;
sortida « L·La matriu dels 's' és la següent:«< endl « endl;
for (i = 0; i < r ; i++)
{
  for (j = 0; j < k; j++)
  {
    if (inicial[i][j] >= 0)
      sortida « " ";
    sortida « inicial[i][j] « "";
  }
  sortida « endl;
}
sortida « endl « L·La matriu dels '-s' que genera el nostre con és:«< endl « endl;
for (i = 0; i < r ; i ++)
{
  for (j = 0; j < m; j++)
  {
    if (vector[i][j] >= 0)
      sortida « " ";
    sortida « vector[i][j] « " ";
  }
  sortida « endl;
}
sortida « endl « "Els generadors del con dual són: " « endl « endl;
for (i = 0; i < r; i++)
{
  for (j = 0; j < cols; j++)
  {
    if (U[i][j] >= 0)
      sortida « " ";
    sortida « U[i][j] « " ";
  }
  sortida « endl;
}
// aquí comprovam si el dual de K és trivial o no
va_ok = 1;
for (i = 0; i < cols; i++) // si no hi ha vectors, no entrarem al bucle
{
  for (ia = 0; ia < r; ia++)
  //hem de comprovar que si hi ha algun vector, aquest ha de ser el vector nul
```

```
    if U[ia][i] != 0;
      va_ok = 0;
  }
  sortida « endl;
  if (va_ok == 0)
    sortida « endl « “la resposta es NO.” « endl;
  else
  sortida « endl « “la resposta es SI.” « endl;
  return (va_ok);
  entrada.close();
}


void main(void) {
  const int n_max = 15;
  // ***** declaracions de tipus *****
  struct coagop{ // estructura d’una conjunció;
    int dimensio;
    int t[n_max+1][n_max+1];
  };
  // ***** declaracions de variables *****;
  coagop t, c;
  int generador[n_max+1];
  int gen_minim[n_max+1];
  int gen_lukasiewicz[n_max+1];
  int i, j, k;
  int n;
  //assenyala quin element s’ha d’incrementar a l’hora de crear un nou generador;
  int incrementar;
  int control;
  ifstream entrada;
  ofstream sortida;
  char nom_entrada[12];
  nom_entrada[0] = ’e’;
  nom_entrada[1] = ’n’;
  nom_entrada[2] = ’t’;
  nom_entrada[3] = ’r’;
  nom_entrada[4] = ’a’;
  nom_entrada[5] = ’d’;
  nom_entrada[6] = ’a’;
  nom_entrada[7] = ’.’;
  nom_entrada[8] = ’t’;
  nom_entrada[9] = ’x’;
  nom_entrada[10] = ’t’;
  nom_entrada[11] = ’\0’;
  entrada.open(nom_entrada);
  char nom_sortida[14];
  nom_sortida[0] = ’g’;
  nom_sortida[1] = ’e’;
  nom_sortida[2] = ’n’;
  nom_sortida[3] = ’e’;
  nom_sortida[4] = ’r’;
  nom_sortida[5] = ’a’;
  nom_sortida[6] = ’d’;
  nom_sortida[7] = ’o’;
  nom_sortida[8] = ’r’;
  nom_sortida[9] = ’.’;
  nom_sortida[10] = ’t’;
  nom_sortida[11] = ’x’;
  nom_sortida[12] = ’t’;
  nom_sortida[13] = ’\0’;
  sortida.open(nom_sortida);
  entrada » c.dimensio;
  t.dimensio = c.dimensio;
  for (i = 0; i <= c.dimensio; i++)
  {
    for (j = 0; j <= c.dimensio; j++)
      entrada » c.t[i][j];
  }
  entrada.close();
  if (gamma(nom_entrada, nom_sortida) == 1
  {
```

```
  incrementar = t.dimensio;
  // generador val inicialment el de la t-norma de Lukasiewicz
  for (k = 0; k <= t.dimensio; k++)
  {
    generador[k] = t.dimensio - k;
    gen_lukasiewicz[k] = t.dimensio - k;
  }
  //generador de la t-norma mímin
  gen_minim[t.dimensio] = 0;
  for (k = t.dimensio-1; k >= 0; k=k-1)
    gen_minim[k] = 2*gen_minim[k+1] + 1;
  // frontera de les operacions binàries generades (i per tant de les t-normes)
  for (i=0; i <= t.dimensio; i++)
  {
    t.t[i][0] = 0;
    t.t[0][i] = 0;
    t.t[i][t.dimensio] = i;
    t.t[t.dimensio][i] = i;
    c.t[i][0] = 0;
    c.t[0][i] = 0;
    c.t[i][t.dimensio] = i;
    c.t[t.dimensio][i] = i;
  }
  // ************ acabades les inicialitzacions, fem operacions ************
  do
  {
    // cream l'operació binària T
    for (i = 1; i < t.dimensio ; i++)
    {
      for (j = i; j < t.dimensio; j++)
      {
        n = generador[i]+generador[j];
        k = 0;
        while (generador[k] > n)
          k++;
        t.t[i][j] = k;
        t.t[j][i] = k;
      }
    }
    // miram ara si t = c
    i = 1;
    j = 1;
    while ((i < t.dimensio) & & (t.t[i][j] == c.t[i][j]))
    {
      if (j < t.dimensio)
        j++;
      else
      {
        i++;
        j = i;
      }
    }
    if (i == t.dimensio)
      control = 1;
    else
      control = 0;
    if (control == 0)
    {
      if (incrementar == t.dimensio) // incrementar n'indica la posició del generador
      {
        if (generador[t.dimensio-2]-generador[t.dimensio-1] > 1)
          generador[t.dimensio-1]++;
        else
        {
          while ((incrementar > 1)& & (generador[incrementar-2]-generador[incrementar-1] == 1))
            incrementar = incrementar - 1;
          if ((incrementar == 1)& & (generador[0]-generador[1] == 1))
          {
            generador[0]++;
            for (k = 1;
k <= t.dimensio;
k++)        generador[k] = gen_lukasiewicz[k];
```

```
          }
          else if (incrementar == 1)
          {
            generador[incrementar]++;
            incrementar++;
            for (k = incrementar; k <= t.dimensio; k++)
              generador[k] = gen_lukasiewicz[k];
          }
          else
          {
            generador[incrementar-1]++;
            for (k = incrementar; k <= t.dimensio; k++)
              generador[k] = gen_lukasiewicz[k];
          }
        }
      }
      else
      {
        generador[incrementar]++;
        incrementar++;
        for (k = incrementar; k <= t.dimensio; k++)
          generador[k] = gen_lukasiewicz[k];
      }
    }
  }while (!control);
  sortida « “L’operació binària és:” « endl « endl;
  cout « “L’OPERACIO BINARIA ES:” « endl « endl;
  for (i = 0; i <= t.dimensio; i++)
  {
    for (j = 0; j <= t.dimensio; j++)
    {
      sortida « c.t[i][j] « “ ”;
      cout « c.t[i][j] « “ ”;
    }
    sortida « endl;
    cout « endl;
  }
  sortida « endl;
  cout « endl;
  sortida « “el generador és: (” « generador[0];
  cout « “I EL SEU GENERADOR ES: (” « generador[0];
  for (i = 1; i <= t.dimensio; i++)
  {
    sortida « “, ” « generador[i];
    cout « “, ” « generador[i];
  }
  sortida « “)” « endl;
  cout « “)” « endl;
 }
 else
 {
 sortida « “L’operació binària és:” « endl « endl;
 cout « “L’OPERACIO BINARIA ES:” « endl « endl;
 for (i = 0; i <= t.dimensio; i++)
 {
  for (j = 0; j <= t.dimensio; j++)
  {
    sortida « c.t[i][j] « “ ”;
    cout « c.t[i][j] « “ ”;
  }
  sortida « endl;
  cout « endl;
 }
  sortida « endl;
  cout « endl;
  sortida « “aquesta operació no té generador” « endl;
  cout « “* * * * * AQUESTA OPERACIO NO TE GENERADOR * * * * *” « endl;
 }
 sortida.close();
 getchar();
}
```

A.4 ALGORISME PER A CONSTRUIR UN GENERADOR ADDITIU D'UNA T–CONORMA SUAU I BIVALENT SOBRE L^*.

A partir d'un fitxer anomenat *entrada.txt* que conté la dimensió i la t–conorma suaus i bivalents sobre L^*, es determina un generador del tipus que s'explica en 4.5.1.

Estructura del fitxer d'entrada per a una t–conorma sobre L_7:

```
7
0 1 2 3 4 5 6 7
1 6 6 6 6 7 7 7
2 6 6 6 7 7 7 7
3 6 6 7 7 7 7 7
4 6 7 7 7 7 7 7
5 7 7 7 7 7 7 7
6 7 7 7 7 7 7 7
7 7 7 7 7 7 7 7
```

I el programa és el següent:

```
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <string.h>
#include <math.h>

void main(void) {
   // declaracions de constants
  const int n_max = 20;
  const int Delta = n_max * (n_max-1)/2;
   // declaracions de variables
  int s[n_max+1][n_max+1]; //la t-conorma o disjunció de treball
  int dimensio, valor_k, delta;
  int total_mins, total_maxs, mins_i_maxs;
  int i,j,k; // variables auxiliars
  char c; // variable auxiliar
  int control; // variable booleana auxiliar
  int generador[n_max];
  int minimals[3][Delta], maximals[3][Delta], unio[3][2*Delta];
  int valors_A[2*Delta];
   // A continuació, les cadenes de caràcters pels noms dels fitxers d'entrada i sortida de dades
  char nom[15];
  char nom_entrada[12];
   // i els corresponents fitxers
  ifstream entrada;
  ofstream sortida;

   // comença el programa
   // lectura de dades i obertura de fitxers

  nom_entrada[0] = 'e';
  nom_entrada[1] = 'n';
  nom_entrada[2] = 't';
  nom_entrada[3] = 'r';
  nom_entrada[4] = 'a';
  nom_entrada[5] = 'd';
  nom_entrada[6] = 'a';
  nom_entrada[7] = '.';
  nom_entrada[8] = 't';
  nom_entrada[9] = 'x';
  nom_entrada[10] = 't';
  nom_entrada[11] = '\0';

  entrada.open(nom_entrada);
   // La dimensió es llegeix directament del fitxer d'entrada
  entrada >> dimensio;

  nom[0] = 'g';
  nom[1] = 'e';
  nom[2] = 'n';
```

```
nom[3] = 'e';
nom[4] = 'r';
nom[5] = 'a';
nom[6] = 'd';
nom[7] = 'o';
nom[8] = 'r';
nom[9] = 's';
nom[10] = '.';
nom[11] = 't';
nom[12] = 'x';
nom[13] = 't';
nom[14] = '\0';

sortida.open(nom);
sortida << "dimensió = " << dimensio << endl << endl;

entrada >> c;
while (c != '*') // while principal
{
   // agafam t-conorma
  for (i=0; i <= dimensio; i++)
  {
    for (j=0; j <= dimensio; j++)
      entrada >> s[i][j];
  }

   // en determinam els elements maximals i minimals
  total_mins = 0; // minimals regió n
  total_maxs = 0; // maximals regió n-1
  for (i = 1; i < dimensio; i++)
  {
    for (j = i; j < dimensio; j++)
    {
      if (s[i][j] == dimensio - 1) // regió n-1
      {
        if ((s[i+1][j] > dimensio - 1) & (s[i][j+1] > dimensio - 1))
        {
            // tenim un maximal
          total_maxs++;
          maximals[0][total_maxs] = i;
          maximals[1][total_maxs] = j;
          maximals[2][total_maxs] = dimensio-1;
        }
        else if (s[i][j] == dimensio) // regió n
        {
          if ((s[i-1][j] < dimensio) & (s[i][j-1] < dimensio))
          {
              // tenim un minimal
            total_mins++;
            minimals[0][total_mins] = i;
            minimals[1][total_mins] = j;
            minimals[2][total_mins] = dimensio;
          }
        }
      }
    }
  valor_k = minimals[1][1]; // hi ha un minimal en (1,k)

   // fem la unió dels dos conjunts agafant un minimal i un maximal cada vegada
  for (i = 1; i <= total_maxs; i++)
  {
    unio[0][2*i-1]=minimals[0][i];
    unio[1][2*i-1]=minimals[1][i];
    unio[2][2*i-1]=minimals[2][i];
    unio[0][2*i]=maximals[0][i];
    unio[1][2*i]=maximals[1][i];
    unio[2][2*i]=maximals[2][i];
  }
  if (total_mins > total_maxs)
  {
    unio[0][2*total_mins-1] = minimals[0][total_mins];
    unio[1][2*total_mins-1] = minimals[1][total_mins];
```

```
      unio[2][2*total_mins-1] = minimals[2][total_mins];
    }
    mins_i_maxs = total_mins + total_maxs;

      // Inicialitzam el generador més petit possible, a_1 >= dimensio - 2
    generador[0]=0;
    for(i=1;i<dimensio;i++)
      generador[i]=dimensio-3+i;
    generador[dimensio] = generador[1]+generador[valor_k];

      // Els valors A's
    for (i = 1; i <= total_maxs; i++)
    {
      valors_A[2*i-1] = generador[unio[0][2*i-1]] + generador[unio[1][2*i-1]];
      valors_A[2*i] = generador[unio[0][2*i]] + generador[unio[1][2*i]] +1;
    }
    if ((total_mins > total_maxs)
      valors_A[mins_i_maxs] = generador[unio[0][mins_i_maxs]] + generador[unio[1][mins_i_maxs]];

      // La part essencial de l'algorisme
    i = 2;
    while (i <= mins_i_maxs)
    {
      delta = valors_A[i]-valors_A[i-1];
      if (delta < 0)
      {
        k = unio[0][i];
        delta = -1 * delta;
      }
      else if (delta > 0)
        k = unio[1][i-1];
      for (j = 1; j < k ; j++)
      {
        generador[j] = generador[j] + delta;
      }
      for (j = k ; j < dimensio ; j++)
      {
        generador[j] = generador[j] + 2*delta;
      }
      generador[dimensio] = generador[1] + generador[valor_k];
      i++;
    }


      // guardem l'operació binària

    for (i=0; i <= dimensio; i++)
    {
      for (j=0; j <= dimensio; j++)
      {
        sortida << s[i][j] << " ";
      }
      sortida << endl;
    }
    sortida << endl << endl;

    sortida << "(" << 0;
    for (i= 1; i <= dimensio; i++)
      sortida << " , " << generador[i];
    sortida << " )" << endl << endl;

    entrada >> c;

  } // fi de while principal

  sortida << '*';
  sortida << endl << "hem guardat " << quantes << " t-conormes";

  entrada.close();
  sortida.close();
} // fi de programa
```

A.5 GENERADOR DE CÒPULES

Aquest programa permet obtenir les còpules discretes commutatives utilitzant les matrius de permutació.

```
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <math.h>

void main(void) {
  // declaracions de variables
  const int max_n = 15;
  // la còpula
  int C[max_n+1][max_n+1];
  int matriu_p[max_n+1][max_n+1];
  // seqüències binàries
  long max;
  long numero, copia;
  int sequencia[max_n];
  int canvi;

  // transposicions
  int ordre, quantes;
  int transposicions[max_n][2];
  int element[max_n];
  int no_element[max_n];
  int el_utilitzat[max_n];
  int aa, ab;
  int ntr;
  // índexos
  int i, j, k, n, m;
  ofstream sortida;
  char nom_entrada[12];
  nom_entrada[0] = 'e';
  nom_entrada[1] = 'n';
  nom_entrada[2] = 't';
  nom_entrada[3] = 'r';
  nom_entrada[4] = 'a';
  nom_entrada[5] = 'd';
  nom_entrada[6] = 'a';
  nom_entrada[7] = '.';
  nom_entrada[8] = 't';
  nom_entrada[9] = 'x';
  nom_entrada[10] = 't';
  nom_entrada[11] = '\0';

  // comença el programa

  sortida.open(nom_entrada);
  quantes = 0;
  cout « "dimensio de les copules: n = ";
  cin » ordre;
  cout « endl « "PROCESSANT";
  sortida « ordre « endl;
  max = (long) pow(2,ordre)-1;
  numero = -1;
  canvi = 1;
  while ((numero < max) || (canvi == 0))
  {
    if (canvi == 1)
    {
      numero++;
      k = 0;
      copia = numero;
      for (i=0; i<ordre; i++)
      {
        sequencia[i] = copia%2;
        k = k + copia%2;
        copia = copia/2;
      }
```

```
  if (numero%10 == 0)
    cout « ".";
}
if ((canvi == 0) || (k%2 == 0))
{
  if (canvi == 1)
    ntr = k/2;
  if (ntr == 0)
    for (i = 0; i < ordre; i++)
      no_element[i] = 1;
    if (ntr == 1)
    {
      for (i = 0; i < ordre; i++)
        no_element[i] = 0;
      k = 0;
      for (i = 0; i < ordre; i++)
        if (sequencia[i] == 0)
        {
          no_element[i] = 1;
        }
        else
        {
          element[k] = i;
          k++;
        }
      transposicions[0][0] = 0;
      transposicions[0][1] = 1;
    }
    else if (ntr == 2)
    {
      if (canvi == 1)
      {
        canvi = 0;
        // agafem primer de tot els elements
        for (i = 0; i < ordre; i++)
          no_element[i] = 0;
        k = 0;
        for (i = 0; i < ordre; i++)
        {
          if (sequencia[i] == 0)
          {
            no_element[i] = 1;
          }
          else
          {
            element[k] = i;
            k++;
          }
        }
        // ara, fem algunes inicialitzacions
        aa = 3; // nombre de transposicions
        ab = 1; // parella de l'element[0]: (element[0], j)
      }
      if (aa > 0)
      {
        transposicions[0][0] = 0;
        transposicions[0][1] = ab;
        if (ab == 1)
        {
          transposicions[1][0] = 2;
          transposicions[1][1] = 3;
        }
        else if (ab == 2)
        {
          transposicions[1][0] = 1;
          transposicions[1][1] = 3;
        }
        else
        {
          transposicions[1][0] = 1;
          transposicions[1][1] = 2;
        }
```

```
      aa = aa - 1;
      ab++;
    }
    if (aa == 0)
      canvi = 1;
  }
  else if (ntr >= 3)
  {
    if (canvi == 1)
    {
    canvi = 0;
    // agafem primer de tot els elements
    for (i = 0; i < ordre; i++)
      no_element[i] = 0;
    k = 0;
    for (i = 0; i < ordre; i++)
    {
      if (sequencia[i] == 0)
      {
        no_element[i] = 1;
      }
      else
      {
        el_utilitzat[k] = 0; // controlarà que s'hagi utilitzat l'element corresponent
        element[k] = i;
        k++;
      }
    }
    // cream la primera permutació de totes
    transposicions[0][0] = 0;
    transposicions[0][1] = 1;
    el_utilitzat[0] = 1;
    el_utilitzat[1] = 1;
    aa = 1;
    while (aa < ntr)
    {
      i = 1;
      while (el_utilitzat[i] == 1)
        i++;
      j = i+1;
      while (el_utilitzat[j] == 1)
        j++;
      // ara, la transposició (i,j) és disjunta de les demés
      // i és a punt per ésser construida
      transposicions[aa][0] = i;
      transposicions[aa][1] = j;
      el_utilitzat[i] = 1;
      el_utilitzat[j] = 1;
      aa++;
    }
  } // fi d'inicialitzacions
  canvi = 1;
}
quantes++;
for (i = 0; i < ordre; i++)
{
  for (j = i; j < ordre; j++) // sempre passarà que min(i,j) = i
  {
    if ((i == j) && (no_element[i] == 1))
      matriu_p[i][i] = 1;
    else
    {
      matriu_p[i][j] = 0;
      matriu_p[j][i] = 0;
    }
    for (k = 0; k < ntr; k++)
    {
      if ((element[transposicions[k][0]] == i) && (element[transposicions[k][1]] == j))
      {
        matriu_p[i][j] = 1;
        matriu_p[j][i] = 1;
      }
```

```
        }
      }
    }
    // Ara ja tenim les parelles de transposicions disjuntes que formaran la còpula
    for (i = 0; i < ordre; i++)
    {
      for (j = 0; j < ordre; j++)
      {
        C[i][j] = 0;
        for (n = 0; n <= i; n++)
        {
          for (m = 0; m <= j; m++)
          {
            C[i][j] = C[i][j] + matriu_p[n][m];
          }
        }
      }
    }
    sortida « "A" « endl;
    for (i = 0; i <= ordre; i++)
      sortida « 0 « " ";
    sortida « endl;
    for (i = 0; i < ordre; i++)
    {
      sortida « 0 « " ";
      for (j = 0; j < ordre; j++)
      {
        sortida « C[i][j] « " ";
      }
      sortida « endl;
    }
  }
  else
    ntr = 0;
 }
 sortida « "*" « endl « "Hi ha " « quantes « " copules.";
 sortida.close();
}
```

BIBLIOGRAFIA

[1] N. H. Abel. Untersuchungen der Funktionen zweier unabhängigen veränderlichen Größen x und y wie $f(x,y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(z, f(x,y))$ eine symmetrische Funktion von x, y und z ist. *J. Reine Angew. Math.*, 1:11–15, 1826. (Citat a la pàgina 15.)

[2] J. Aczél. Sur les opérations définies pour nombres réels. *Bull. Soc. Math. France*, 76:59–64, 1949. (Citat a la pàgina 15.)

[3] C. Alsina, E. Trillas i L. Valverde. On some logical connectives for fuzzy sets theory. *J. Math. Anal. Appl.*, 93:15–26, 1983. (Citat a la pàgina 1.)

[4] B. De Baets i R. Mesiar. Triangular norms on products lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 104:61–75, 1999. (Citat a la pàgina 1.)

[5] B. De Baets i H. De Meyer. Orthogonal Grid Constructions of Copulas. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1053–1062, 2007. (Citat a la pàgina 52.)

[6] T. Bartušek i M. Navara. Program for Generating Fuzzy Logical Operations and its use in Mathematical Proofs. *Kybernetika*, 38(3):235–244, 2002. (Citat a la pàgina 12.)

[7] G. Beliakov, A. Prader i T. Calvo. *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Springer, 2007. (Citat a la pàgina 7.)

[8] T. Calvo, G. Mayor i R. Mesiar, editors. *Aggregation operators: new trends and applications*. Physica–Verlag, 2002. (Citat a la pàgina 7.)

[9] E. Castillo, A. Cobo, F. Jubete i R.E. Pruneda. *Ortogonal Sets and Polar Methods in Linear Algebra: Applications to Matrix Calculations, Systems of Equations, Inequalities, and Linear Programming*. New York: Wiley & Sons, 1999. (Citat a les pàgines 31 and 40.)

[10] E. Castillo, F. Jubete, R.E. Pruneda i C. Solares. Obtaining simultaneous solutions of linear subsystems of inequalities and duals. *Linear Algebra and its Applications*, 346:131–154, 2002. (Citat a les pàgines 31 and 40.)

[11] L. Godo i C. Sierra. A new approach to connective generation in the framework of expert systems using fuzzy logic. Dins *Proc. 18th IEEE Int. Symposium on Multiple-Valued Logic*, pàgines 157–162. 1988. (Citat a la pàgina 11.)

[12] E. P. Klement, R. Mesiar i E. Pap. *Triangular Norms*. Kluwer Academic Publishers, 2000. (Citat a les pàgines 1, 3, 15, 16, and 27.)

[13] E. P. Klement, R. Mesiar i E. Pap. Problems on triangular norms and related operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 145:471–479, 2004. (Citat a la pàgina 12.)

[14] C. M. Ling. Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen*, 12:189–212, 1965. (Citat a la pàgina 15.)

[15] J. Lukasiewicz, capítol On Three-valued Logic, pàgines 87–88. North-Holland, *Jan Łukasiewicz, Selected Works*, 1970. (Citat a la pàgina 1.)

[16] J. Martín, G. Mayor i J. Monreal. The problem of the additive generation of finitely-valued t–conorms. *Mathware & Soft Computing*, 16:17–27, 2009. (Citat a les pàgines xi, 5, 15, and 52.)

[17] M. Mas, G. Mayor i J. Torrens. T–operators and uninorms on a finite totally ordered set. *International Journal of Intelligent Systems*, 14(9), 1999. (Citat a la pàgina 7.)

[18] M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. $S-$implications and $R-$implications on a finite chain. *Kybernetika*, 40:3–20, 2004. (Citat a les pàgines 5, 95, and 96.)

[19] M. Mas, M. Monserrat i J. Torrens. On two types of discrete implications. *International Journal of Approximate Reasoning*, 40:262–279, 2005. (Citat a les pàgines 5 and 95.)

[20] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens i E. Trillas. A survey on Fuzzy Logic Implication Functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1107–1121, 2007. (Citat a les pàgines 5 and 95.)

[21] G. Mayor i J. Monreal. Additive Generators of Discrete Conjunctive Aggregation Operations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1046–1052, 2007. (Citat a les pàgines xi and 15.)

[22] G. Mayor i J. Monreal. The greatest common divisor and other triangular norms on the extended set of natural numbers. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness, Knowledge-Based Systems*, 17(1):35–45, 2009. (Citat a la pàgina xi.)

[23] G. Mayor, J. Suñer i J. Torrens. Copula-like operations on finite settings. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(4):468–477, 2005. (Citat a la pàgina 43.)

[24] G. Mayor i J. Torrens. On a class of operators for expert systems. *International Journal of Intellingent Systems*, 8:771–778, 1993. (Citat a les pàgines 1 and 4.)

[25] G. Mayor i J. Torrens. T–norms on countable bounded chains. Dins E. P. Klement i R. Mesiar, editors, *Triangular Norms and Related Operators in Many–Valued Logics*, pàgines 88–93. 24th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, 2003. (Citat a la pàgina 1.)

[26] G. Mayor i J. Torrens, capítol Triangular Norms on Discrete Settings, pàgines 189–230. Elsevier, *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, 2005. (Citat a les pàgines 1 and 12.)

[27] K. Menger. Statistical metrics. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 8:535–537, 1942. (Citat a la pàgina 1.)

[28] A. Mesiarová, capítol Generators of triangular norms, pàgines 95–111. Elsevier, *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, 2005. (Citat a la pàgina 15.)

[29] P. S. Mostert i A. L. Shields. On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. *Ann. of Math.*, 65:117–143, 1957. (Citat a la pàgina 15.)

[30] R. B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer, 2006. (Citat a la pàgina 43.)

[31] J. Recasens. *Indistinguishability Operators*. Springer, 2010. (Citat a les pàgines 5, 22, and 91.)

[32] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970. (Citat a les pàgines 31 and 36.)

[33] B. Schweizer i A. Sklar. Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publ. Math. Debrecen*, 8:169–186, 1961. (Citat a les pàgines 1 and 15.)

[34] B. Schweizer i A. Sklar. Associative functions and abstract semigroups. *Publ. Math. Debrecen*, 10:69–81, 1963. (Citat a la pàgina 15.)

[35] B. Schweizer i A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York, 1983. (Citat a les pàgines 1, 4, 15, and 43.)

[36] E. Trillas. Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos. *Stochastica*, III(1):47–60, 1979. (Citat a la pàgina 9.)

[37] E. Trillas. Assaig sobre les relacions d'indistingibilitat. Dins *Proc. Primer Congrés Català de Lògica Matemàtica, Barcelona*, pàgines 51–59. 1982. (Citat a la pàgina 91.)

[38] E. Trillas, C. Alsina, E. Renedo i A. Pradera. On contra-symmetry and MPT conditionality in Fuzzy Logic. *International Journal of Intellingent Systems*, 20:313–326, 2005. (Citat a la pàgina 95.)

[39] L. Valverde. On the Structure of F–indistinguishability Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 17:313–328, 1985. (Citat a la pàgina 91.)

[40] P. Viceník, capítol Additive Generators Of Non-Continuous Triangular Norms. Kluwer Academic Publishers, *Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets*, 2003. (Citat a les pàgines 4 and 15.)

[41] P. Viceník. Additive Generators Of Border-Continuous Triangular Norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(13):1631–1645, 2008. (Citat a les pàgines 4 and 15.)

[42] L.A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965. (Citat a la pàgina 1.)

[43] L.A. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Inform. Sci.*, 3:177–200, 1971. (Citat a la pàgina 91.)