

Les figures lul·lianes: la seva naturalesa i la seva funció com a raonament diagramàtic*

Anthony Bonner i Albert Soler

Maioricensis Schola Lullistica

Centre de Documentació Ramon Llull

ab@anthonybonner.com

albert.soler@ub.edu

En la història del pensament, els recursos gràfics –figures, diagrames, esquemes, arbres, taules, etc.– han tingut una acceptació canviant. A l'època grega, el descobriment o, millor dit, la prova tradicionalment atribuïda a Pitàgores que hi havia quantitats, com per exemple $\sqrt{2}$, no expressables en nombres racionals (és a dir, ni en nombres enters ni en fraccions) però perfectament expressables en geometria (la longitud de la hipotenusa d'un triangle rectangle de costats de llargària d'1) va deixar l'aritmètica en un pla inferior (una eina de comptables, recaptadors d'impostos, etc.) i la geometria, tal com la va desenvolupar Euclides, com a camp paradigmàtic del rigor científic. La física va ser articulada a través de la geometria fins a Galileu. La cosa va començar a canviar amb la invenció cartesiana de la geometria analítica, que permetia la unificació de la geometria amb l'àlgebra i mostrava com, per exemple, una

Rebut el 29 de maig de 2015. Acceptat el 14 de juny de 2015. doi: 10.3306/STUDIALULLIANA.110.03

*Aquest treball és el primer d'una sèrie que té com a centre d'interès els recursos visuals en l'obra de Ramon Llull, i sobretot en el seu aspecte funcional o diagramàtic. Hi ha nombrosos estudis sobre les figures lul·lianes, generalment centrats en el seu desenvolupament dintre de l'Art. Un dels pocs treballs que s'aparten d'aquest camí ha estat l'article d'Anna Serra (2013), que és una primera visió d'algunes de les figures lul·lianes des d'un punt de vista diagramàtic, i que ens ha servit com a punt de partida. L'estudi forma part del projecte FFI 2014-53050-C5-1-P del Ministerio de Educación i del SGR119 2014-2016de la Generalitat de Catalunya.

paràbola es podia representar igualment amb una equació. Amb la invenció del càlcul infinitesimal i integral per part de Newton (i Leibniz), la física va prendre volada gràcies a la seva expressió algebraica. El descobriment d'alguns defectes en el rigor lògic del sistema euclidià va esperonar la separació entre la ciència i les representacions visuals. En les matemàtiques, aquesta tendència va arribar fins al punt que, ara fa cinquanta anys, una figura destacada del grup Bourbaki va escriure una introducció a la geometria en la qual es vantava d'haver-la pogut escriure sense mostrar cap figura geomètrica.¹ Si en la lògica, les matemàtiques o la física s'empraven algunes figures era purament com a ajuts heurístics, com a recursos mnemònics o com a il·lustracions; no tenien cap funció en l'estructura lògica del discurs verbal o algebraic. La situació es resumeix en dos passatges d'un volum de 1996:

Despite the obvious importance of visual images in human cognitive activities, visual representation remains a second-class citizen in both the theory and practice of mathematics. In particular, we are all taught to look askance at proofs that make curial use of diagrams, graphs, or other nonlinguistic forms of representation, and we pass on this disdain to our students.²

Mathematical discoveries often have been made using visual reasoning, but those very same discoveries were not justified by the visual reasoning. Diagrams are associated with intuitions and illustrations, not with rigorous proofs. Visual representations are allowed in the context of discovery, not in the context of justification.³

Hi ha una actitud similar en els estudis lul·lians, en què les figures són considerades d'importància secundària, simples ajuts mnemònics o heurístics. La història de la filosofia ha ensenyat que només un text és capaç de produir arguments rellevants i que les representacions gràfiques són més aviat il·lustracions, mitjans visuals que poden ajudar a la comprensió del text.⁴

¹ Dieudonné (1964) ho va dur a terme gràcies a una mena de descendent de la geometria analítica que és l'àlgebra lineal. El grup Bourbaki, fundat els anys trenta del segle passat, va intentar unificar sobre un fonament rigorós tots els camps de la matemàtica en una obra col·lectiva que s'anomenava *Éléments de mathématiques*.

² John Barwise i John Etchemendy, «Visual Information and Valid Reasoning», dins Allwein i Barwise (1996), p. 3.

³ Isabel Luengo, «A Diagrammatic Subsystem of Hilbert's Geometry», dins Allwein i Barwise (1996, 149). Val la pena subratllar la frase «in the context of discovery», que en llatí medieval era la «invento», tan important per a Llull (només cal tenir en compte els títols d'obres com *Ars compendiosa inveniendi veritatem*, *Ars inventiva veritatis*, etc.). Vegeu el passatge corresponent a la n. 66 més avall.

⁴ L'ús de recursos visuals de caràcter diagramàtic i simbòlic ateny probablement el seu punt de màxim desenvolupament al segle XII, amb la tradició victorina, en Hildegarda de Bingen i Joaquim de Fiore. Segons Meier (2003, 510), la centralitat d'aquest segle en la història de la diagramàtica ve d'una superació de l'ús purament didàctic o mnemònic dels diagrames que desemboca en noves construccions simbòliques. Prové d'un encreuament d'interessos simbòlics i científics, d'exegesi al·legòrica del cosmos, que deseno-

Tanmateix, en el camp de la ciència, observacions crítiques com les de les dues citacions anteriors són símptomes d'un canvi, de la reivindicació de l'ús de les representacions visuals.⁵ És un canvi que potser caldria prendre com a exemple en el camp dels estudis sobre Ramon Llull.

Els autors del present treball ja hem intentat explicar el paper primordial que tenen les figures en la primera versió de l'Art, l'*Ars compendiosa inveniendi veritatem* (ACIV, vers 1274), obra que sembla el resultat directe de la il·luminació de Randa, i en la qual, en lloc de figures que il·lustren un text, tenim un text ordenat com una glossa de les figures.⁶ La centralitat de les figures queda remarcada pel fet que, a l'inici de l'obra, en comptes de dividir el text en distincions o parts com seria habitual, llegim que «Haec *Compendiosa ars inveniendi veritatem* dividitur in quinque figuras, quae sunt ·a·s·t·v·x·». És a dir, no només la impaginació, sinó que també l'organització de l'obra es basa en les figures mateixes.⁷

Si l'Art, com ja s'ha insistit en molts estudis, és al centre de tota l'empresa intel·lectual i espiritual lul·liana, i si les figures són al centre de l'Art, caldria intentar comprendre *què són, com fonamenten l'Art, quin paper tenen en altres obres lul·lianes i com s'integren (o no) en les tradicions gràfiques de l'Edat Mitjana*.⁸

La manera més usual de classificar els recursos gràfics didàctics o científics medievals és fer-ne una tipologia formal (arbres, taules, rodes...), però això explica poc el seu funcionament en l'opus lul·lià, i no dóna raó de l'elecció d'unes formes o altres o de les modificacions que s'hi introduïren. Sembla més adient desenvolupar una tipologia *funcional* i estudiar l'ús dels diversos elements formals.

lupen una «teologia de la contemplació» i porten les representacions diagramàtiques cap a un terreny propi de la meditació. Pel que fa a Llull i a la valoració de les nombroses figures que hi ha a les seves obres entre els no especialistes, són corrents tres errors contradictoris entre si. En comptes de disminuir la importància de les figures, diuen que són l'Art; donen per descomptat que la majoria són rotatòries (*volvelles*), i es considera que l'Art que representen és una mena de pansofia, un antecedent de la *mathesis universalis* de Leibniz (per aquesta darrera qüestió veg. la nota 59 del present treball). Aquesta triple visió ha tingut una difusió àmplia en països anglosaxons gràcies a un assaig d'un divulgador científic molt respectat (cosa per altra banda ben justificada), Martin Gardner (1982).

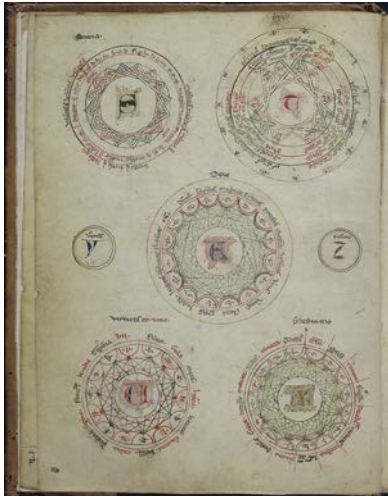
⁵ Els autors citats expliquen que un dels problemes de les representacions visuals rau en el fet que no han estat sotmeses al mateix tractament rigorós que la lògica formal, és a dir, verbal.

⁶ En Bonner i Soler (2007), on el lector trobarà una transcripció del text d'aquestes «glosses».

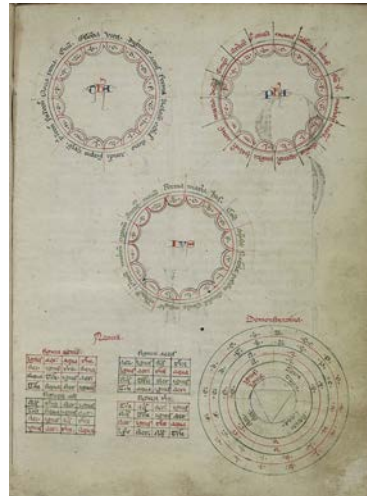
⁷ Vegeu l'apartat 2 més avall

⁸ En el present treball, encara que farem referència a l'arbre dels *Començaments de medicina*, ens centrarem sobretot en les figures de l'Art, i deixarem per a un proper treball un estudi detallat dels arbres i altres figures lul·lianes, recursos visuals que no formen part pròpiament de la diagramàtica de l'Art.

Així, començarem prenent en consideració les figures principals de les dues etapes de l'Art, les dotze de l'Art *demostrativa* (AD, vers 1283) de l'etapa quaternària (Il·lustracions 1-2) i les quatre de l'etapa ternària (Il·lustració 4).



Il·lustració 1. Venècia, Marciana VI 200, f. 3v



Il·lustració 2. Venècia, Marciana VI 200, f. 4r

Les cinc figures principals, és a dir A, S, T, V i X, de la Il·lustració 1 també tenen el que Llull anomena «Segones Figures», en què es mostren totes les parelles de conceptes de cada una dins de les cambres d'una graella, com per exemple la de la Segona Figura d'A a la Il·lustració 3, que és una reorganització de la Primera Figura A de la Il·lustració 1.



Il·lustració 3. Venècia, Marciana VI 200, f. 6v



Il·lustració 4. Munic, Clm. 10501, f. 2v

Des del punt de vista formal, la gran majoria d'aquestes figures (12 sobre 17) són *rotae* no giratòries. Entre les quatre restants, hi ha tres graelles i dues *volvelles*. Però això no ens diu gran cosa sobre la seva funció, per exemple dels papers molt diferents que fan les set rodes de la Il·lustració 1; del perquè de la Il·lustració 3 com a representació alternativa de la Figura A de la Il·lustració 1; del fet que aquesta Figura A i la Figura A de la Il·lustració 4 no funcionin igual; sobre quina mena de graella és la de la Il·lustració 2, etc. Per tal d'explicar tot això, caldria repassar alguns conceptes que ja hem presentat en una altra banda,⁹ i afegir-ne alguns de nous.

1. Grafs, hipergrafs i reticles

1.1. Grafs

La paraula «graf» té tres accepcions, fet que cal tenir en compte per evitar confusions. La primera i més habitual és la d'un diagrama que representa dades; en particular, quan es mostra la relació entre dues o més quantitats o mides, normalment sense fórmula matemàtica que les relacioni. Així, per exemple, les temperatures al llarg d'un dia, les poblacions d'una sèrie de ciutats o la composició d'un parlament per partits polítics;¹⁰ són imatges que veiem cada dia a la premsa escrita i a la televisió. La segona és, en matemàtiques, quan hom parla del graf d'una funció, és a dir, la representació de la relació entre variables. Seria el cas d'una paràbola dibuixada en una quadrícula, que resulta ser el graf de la funció $y = x^2$ (amb la citada eina de la geometria analítica de Descartes). La tercera accepció, la que ens interessa ara, és la de la teoria dels grafs.

En aquesta accepció, un graf és un sistema per representar les connexions entre punts d'una xarxa; els punts s'anomenen vèrtexs o nodes, i les línies que els connecten, arestes. Exemples clàssics de grafs són la xarxa de carreteres que connecten poblacions, les instal·lacions de gas d'una ciutat connectades a la central distribuïdora, etc.¹¹ Convé recalcar que aquesta espècie de grafs, contràriament a les dues menes anteriors, no té res a veure amb quantitats, magnituds, mides o variables; només mostra les relacions entre parelles d'objectes (o, en el nostre cas,

⁹ Vegeu la n. 11 més avall.

¹⁰ El primer cas es representa normalment amb una línia ondulada; el segon, amb una sèrie de columnes, i el tercer, en forma d'un cercle amb seccions de colors diferents. És curiós observar que una pauta musical amb una melodia anotada també és un graf. L'eix horitzontal representa el temps i el vertical (amb les cinc línies de la pauta), el to de les notes.

¹¹ Per a una exposició més extensa, vegeu Bonner (2012, 30-34), i per a una presentació matemàtica rigorosa, Basart (1994).

de conceptes); dit d'una altra manera, transmet la idea purament topològica de connectivitat (*connectedness* en anglès).¹²

Doncs bé, les principals figures de l'AD (vegeu II·lustració 1) són grafs. Les Figures A i X tenen una xarxa de línies que connecten tots els conceptes inscrits als seus cercles exteriors; la de V té les set virtuts connectades per línies blaves i els set vicis per línies vermelles; S té quatre quadrangles, i T cinc triangles. Cada joc d'aquestes línies són les arestes que connecten els vèrtexs retolats amb conceptes o lletres, i així formen una sèrie de grafs.

En aquestes figures cal distingir dos components: el cercle exterior (*rota*) i la xarxa de línies interiors (el graf). Els cercles exteriors no són altra cosa que embolcalls que mostren les diverses agrupacions de conceptes que contenen o, en termes matemàtics, de diversos conjunts d'elements (com, per exemple, les dignitats divines a la Figura A). No formen part dels grafs, no tenen cap paper en els mecanismes de l'Art, que, en canvi, es desenvolupen a l'*interior* de cada cercle. De fet, com es pot veure en la II·lustració 2, les figures de *Theologia*, *Philosophia* i *Jus* tenen els cercles sense línies interiors, perquè aquí són simples col·leccions de conceptes, sense cap relació representable per un graf. En canvi, a la Figura A, per exemple, el mecanisme gràfic interior funcionaria igual sense el cercle, reduït a una estrella de línies rectes (arestes) amb els conceptes escrits damunt els seus setze punts (vèrtexs). Passa el mateix amb la Figura S (II·lustració 1 i, en una representació més clara, en la II·lustració 5, més avall): la part gràfica / artística ocupa els quatre quadrats amb els conceptes escrits als seus cantons. Seria menys elegant però funcionaria igual sense els cercles exteriors. La Figura T té tres cercles exteriors que podrien semblar rotatoris, però que no ho són; si ens fixem, per exemple, en el vèrtex del primer triangle que conté la paraula *Deus*, hi trobem tres conceptes inherents a la divinitat, *virtutes*, *trinitas* i *unitas*,¹³ conceptes que no són aplicables a cap altre punt de la figura i que podrien perfectament estar escrits directament damunt del vèrtex, sense els cercles, que només tenen una justificació estètica. El mecanisme gràfic / artístic de la figura treballa únicament amb els cinc triangles per separat.¹⁴

¹² L'article de David Harel, «On Visual Formalisms», dins Glasgow *et al.* (1995, 235-272), explica una altra distinció: la que hi ha entre els grafs i els diagrames d'Euler/ Venn: «The bottom line is that, whereas graphs and hypergraphs are a nice way of representing a set of elements together with some special relation(s) on them, Euler/Venn diagrams are a nice way of representing a *collection of sets*» (pp. 236-7). És per això que la lògica semàntica o intensional de Llull empra els primers, i la lògica aristotèlica extensional, és a dir que es basa en la quantificació (tot S és P, algun S és P, etc.), empra els segons; vegeu Bonner (2012, 219-221, 228).

¹³ Per a representacions més clares i llegibles, noteu que algunes de les imatges de l'article permeten una ampliació digital; també podeu consultar les làmines a partir de la p. 102 a Bonner (2012).

¹⁴ La Figura V és una xarxa de línies de dos colors amb una funció gràfica: el color blau per a les línies

També cal remarcar que la gran majoria d'aquestes figures circulars no són rotatòries. És a dir, s'ha de distingir entre *rotae* (com les de la Il·lustració 1 i les tres figures superiors de la Il·lustració 2) i la *volvelle* de la Figura Demonstrativa de la mateixa Il·lustració 2 o de la Quarta figura de l'Art ternària a la Il·lustració 4. No hi ha cap versió de l'Art que tingui més d'una *volvelle*, i a l'ACIV no n'hi ha cap.¹⁵

Totes les parelles de conceptes connectades per línies de la Figura A també es poden mostrar escrivint els dos mots (o lletres, segons el cas) de cada parella dins un compartiment d'una graella (com a les Il·lustracions 3 o 4). És el que, en la teoria dels grafs, s'anomena una matriu d'adjacència, és a dir, una versió tabular de la figura gràfica original. Normalment una tal matriu amb *totes* les combinacions binàries seria quadrada, però atès que Llull no necessita distingir *[bonitas magnitudo]* de *[magnitudo bonitas]*, seria redundant mostrar la meitat de la taula que tingués aquestes segones opcions. Per tant Llull es pot limitar a donar només una meitat de la taula, que naturalment pren aquesta forma diagonal, i que així queda com una «mitja matriu».¹⁶ És una altra manera de mostrar la mateixa informació: les relacions binàries reals o possibles entre conceptes bàsics del sistema lul·lià.

1.2. Hipergrafs

Una de les limitacions de la teoria (clàssica) dels grafs (i de l'aplicació que en va fer Llull) és que només pot tractar les relacions binàries. Per això modernament s'ha inventat una varietat ampliada dels grafs anomenada hipergraf, consistent en un graf amb arestes –ara anomenades hiperarestes– que poden relacionar un nombre il·limitat de vèrtexs, en lloc de només dues, com hem vist fins ara.¹⁷

que connecten les virtuts i el vermell per a les que connecten els vicis; amb la lletra V, tal com diu Llull «mig blau i mig vermell, e situat en lo mig de les linyes» (OS I, 300). En aquest mateix ms. la Figura X té la mateixa forma que la Figura A, però en altres mss. posteriors té dos quadrats interiors amb variacions en la distribució de conceptes; vegeu Rubio (2000).

¹⁵ Les úniques excepcions són les de les Il·lustracions 13 i 14, presents en dues obres que es podrien qualificar d'«experiments» en la transició al final de l'etapa quaternària, l'aparat de figures de les quals presenta una forma ternària pròpia de l'etapa següent.

¹⁶ Per a una explicació més detallada de la connexió entre la notació lul·liana i la moderna de la teoria dels grafs, vegeu Bonner (2012, 30-34).

¹⁷ Els hipergrafs són un camp de la teoria dels grafs iniciada per Berge (1970). Un exemple podria ser la relació «família» amb hipervèrtexs que inclourien pare, mare i fills. En canvi, la relació de «casat (o casada) amb» produiria un graf (binari) normal.

Encara hauríem de prendre en consideració els hipergrafs k -uniformes, en què les arestes connecten uniformement el mateix nombre (k) de vèrtexs.¹⁸ Llevat d'uns casos als quals ens referirem ara, els hipergrafs lul·lians apareixen en l'etapa ternària de l'Art i són 3-uniformes.¹⁹ Atès que dibuixar un graf amb $k > 2$ és gairebé impossible, Llull va desenvolupar un altre sistema per tal de representar combinacions ternàries o més. El que va triar s'anomena en els estudis diagramàtics *volvelles*, és a dir figures circulars amb diversos cercles movibles per tal d'assolir totes les combinacions desitjades.

Abans de l'etapa ternària (i de dues obres de transició que estudiarem en un moment), els hipergrafs només s'utilitzen d'una manera puntual, esporàdica. La primera es troba en els quatre quadrangles de la Figura S ja a l'ACIV. Els conceptes situats a l'extrem dels angles de cada quadrat no només es relacionen amb els tres altres conceptes del mateix quadrat, sinó que tots quatre estan vinculats els uns amb els altres de manera que no funcionen independentment. Això ho podem exemplificar amb els dos primers quadrats de la Il·lustració 5: al quadrat blau tenim $B = \text{memoria recolens}$, $C = \text{intellectus intelligens}$, $D = \text{voluntas diligens}$, $E = \text{actus ipsorum BCD}$; i al quadrat negre, $F = \text{memoria recolens}$, $G = \text{intellectus intelligens}$, $H = \text{voluntas odiens}$, $I = \text{actus ipsorum FGH}$. Com es pot veure, B C tenen les mateixes significacions que F G ; però, atès que pertanyen a quadrats amb un tercer element oposat, no tenen la mateixa implicació. Les primeres dues són lligades a D i les altres a H , cosa que els dona un paper completament diferent.²⁰ Tot plegat fa que la Figura S sigui un hipergraf on $k = 4$.²¹

Trobem altres hipergrafs en la presentació de la mateixa Figura S de l'ACIV, però únicament en aquesta primera versió de l'Art, en què es troba repartida en set «subfigures», com es pot veure en les dues pàgines reproduïdes a continuació.

¹⁸ Els grafos normals en serien una subespècie, amb $k = 2$.

¹⁹ Amb algunes excepcions, com per exemple l'*Arbre de filosofia desiderat* i l'*Art abreujada de preïcació* estudiades més avall (vegeu el text corresponent a la n. 35), que empenen una *volvelle* de $k = 4$.

²⁰ Llull ho explica clarament a l'*Ars universalis*: «in diversitate ipsorum ·d·h· sit diversitas ipsorum ·b·f· et ·c·g·» (Munic, Clm. 10528, f. 2r; *MOG* I, viii, 2 [484]). Aquesta consideració és central en la utilització que fa Llull de la parella d'F G com a eina d'investigació a l'AD; vegeu Bonner (2012, 50-51). Per a una versió potser més fàcilment llegible de la Figura S, vegeu *ibid.*, 49.

²¹ Encara que podria semblar que la Figura T sigui un hipergraf $k=3$, cal tenir en compte que no funciona de la mateixa manera. Els angles de cada triangle es relacionen conceptualment entre si, però funcionen independentment en el discurs de l'Art.



Il·lustració 5. Vaticà, Lat. 5112, f. 4v



Il·lustració 6. Vaticà, Lat. 5112, f. 5ra

Com es pot apreciar, les «segones» figures 1-7 són taules, construïdes de manera variable²² amb cambres de fins a cinc components i que, per tant, representen hipergrafs de k amb nombre igualment variable.

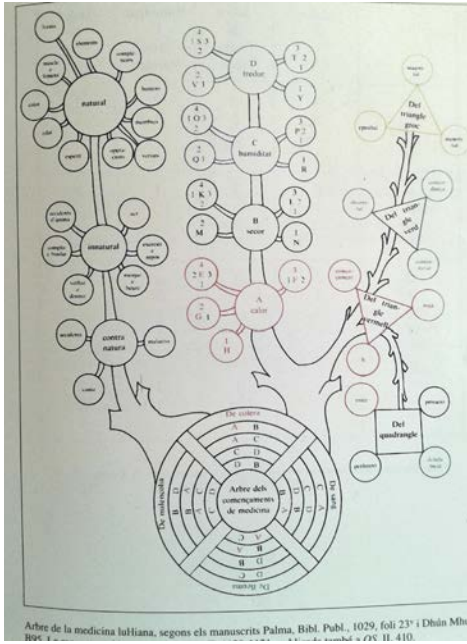
Una altra figura hipergràfica de l'Art quaternària –parlant amb propietat potser caldria dir una semblança d'hipergraf– és la Figura Demostrativa o Novena de l'AD, que a més és la primera *volvelle* que es presenta en l'Art (veg. la Il·lustració 2 més amunt). Sembla un hipergraf amb $k = 6$, però l'ús que en fa Llull és molt més restringit. La descriu composta de «sis cercles volubles, e una roda voluble estant en lo mig dels cercles, en la qual és escrit un triangle que significa los cinc triangles de T».²³ Els sis cercles principals s'aparellen amb dos de la Figura Elemental, dos de les set Figures de l'obra, i finalment dos de les setze lletres de la Figura S. Són aquestes parelles de cercles que Llull utilitza per muntar cambres binàries; mai no munta compartiments amb sis components. És un intent de fer l'Art més general, no pas de muntar mecanismes combinatoris de sis elements.²⁴

Finalment, a l'Art quaternària trobem encara un hipergraf entre les representacions de la Figura Elemental, concretament la que també apareix als *Començaments de medicina* (*ComMed*), en aquest cas vinculada a dues altres figures diferents.

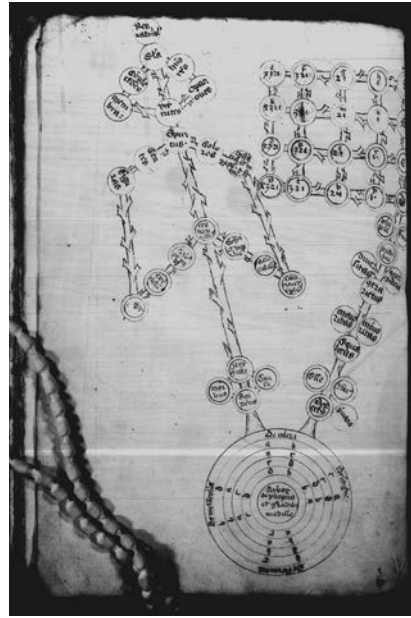
²² Les dues primeres són similars, i també ho són la tercera i la sisena, i la quarta i la cinquena.

²³ OSI, 304.

²⁴ O septenaris, perquè com hem dit, el cercle central també roda.



Il·lustració 7. NEORL V, 41 i OS II, 410, adaptada de Palma, Pública 1029, f. 23v²⁵



Il·lustració 8. Oxford, Corpus Christi 247, f. 58v²⁶

Les arrels d'aquest arbre no presenten, com podria semblar, una *volvelle*, sinó quatre taules que mostren com es mesclen els humors (còlera, sang, fleuma i malencolia) en la producció de febres.²⁷ A la part superior de l'arbre, la branca de l'esquerra és un esquema que il·lustra arbòriament les tres divisions de la medicina tradicional. La branca de la dreta és una versió reduïda de l'Art, amb tres triangles de la Figura T i un quadrat de la Figura X; es tracta purament d'una selecció de les figures de l'Art quaternària. La branca que ens interessa és la que a la Il·lustració 7 ocupa un lloc central, i que, a la Il·lustració 8, apareix de forma tabular a la part superior de la branca dreta. Es tracta de dues maneres de representar la relació entre les quatre qualitats elementals

²⁵ Vegeu igualment Munic, Clm. 10593, f. 167r, del s. xvii. La figura a doble pàgina copiada per Guillem Pagès, col·laborador directe de Llull, a l'exemplar Dublín, Archives University College, B 95, ff. Iv-IIr, segueix el mateix model, però malgrat l'autoritat indiscutible de tal font, no acaba d'estar ben resolta: no conté les figures geomètriques de l'Art i és de lectura difícil

²⁶ Un arbre similar a Sankt Gallen, Vad. Slg. Ms. 393, 15v, però amb les figures geomètriques de l'Art, i tot dibuixat de forma més esquemàtica

²⁷ Vegeu OS II, 412 i 471 ss.

i els seus possibles quatre graus d'intensitat, cosa que produeix un hipergraf amb $k = 4$. La relació entre aquest hipergraf i la representació habitual de la Figura elemental en obres de l'Art (la que apareix a la part inferior esquerra de la II·lustració 2, que és la mateixa que es representa a la II·lustració 10) es pot mostrar així:

	E	F	G	H
A. Calor	4	3	2	1
B. Secor	3	2	1	
C. Humiditat	2	1		
D. Fredor	1			

	K	L	M	N
B. Secor	4	3	2	1
D. Fredor	3	2	1	
A. Calor	2	1		
C. Humiditat	1			

	O	P	Q	R
C. Humiditat	4	3	2	1
A. Calor	3	2	1	
D. Fredor	2	1		
B. Secor	1			

	S	T	V	Y
D. Fredor	4	3	2	1
C. Humiditat	3	2	1	
B. Secor	2	1		
A. Calor	1			

Figura del foc

foc	àer	aigua	terra
àer	foc	terra	aigua
aigua	terra	foc	àer
terra	aigua	àer	foc

Figura de la terra

terra	aigua	àer	foc
aigua	terra	foc	àer
àer	foc	terra	aigua
foc	àer	aigua	terra

Figura de l'àer

àer	foc	aigua	terra
foc	àer	terra	aigua
aigua	terra	àer	foc
terra	aigua	foc	àer

Figura de l'aigua

aigua	terra	àer	foc
terra	aigua	foc	àer
àer	foc	aigua	terra
foc	àer	terra	aigua

La Il·lustració 9 és una representació esquemàtica de la informació presentada en la branca central de la Il·lustració 7 i en la part tabular de la Il·lustració 8. Les seves quatre columnes, encapçalades per les lletres E-Y, representen «setze herbes en general», on «cascuna do significació de les altres herbes que són de sa complexió». De la primera diu: «Nos sotsposam e deim que E és una espècie de simpla medicina e és en 4 grau de A [calor], e en 3 de B [secor], e en 2 de C [humiditat], e en 1 de D [fredor]».²⁸ Aquesta figura representa setze herbes senzilles virtuals, models per calcular com entrarien en composició unes amb altres per elaborar medicaments.

Tot i que des del punt de vista funcional les quatre representacions de les Il·lustracions 7, 8, 9 i 10 són iguals (és a dir, representen la mateixa xarxa de relacions), des del punt de vista gràfic són distintes (és a dir, representen les mateixes relacions de maneres diferents). Les dues primeres són hipergrafs, mentre que les dues darreres són una cosa nova, que explicarem més avall, en l'apartat 1.3 sobre reticles.

Durant la transició entre les etapes quaternària i ternària, detectem hipergrafs en dues obres concretes: l'*Ars inveniendi particularia in universalibus* (AIPU) i el *Liber propositionum secundum Artem demonstrativam compilatus* (PropAD, on trobam *volvells* ternàries, o hipergrafs amb $k = 3$).²⁹ Aquí combina l'aparat de figures anteriors de l'AD amb mecanismes ternaris que es generalitzaran a l'etapa posterior. En el mateix manuscrit venecià de les Il·lustracions 1 i 2 més amunt, presenta el PropAD precedit per dues pàgines que semblen una repetició de les il·lustracions de l'AD ara esmentades:

²⁸ OS II, 412-3; NEORL V, 45; ROLXXXI, 441-2.

²⁹ Vegeu Bonner (2012, 114 ss.).



Il·lustració 11. Venècia, Marciana VI 200, f. 158v



Il·lustració 12. Venècia, Marciana VI 200, f. 159r

Si ens hi fixem, però, veurem que hi ha diferències significatives. D'una banda, a la Il·lustració 11:

- (1) manquen les figures Y i Z;
- (2) la figura central és T, en comptes d'A;
- (3) la Figura S té un cercle nou amb les tres potències de l'ànima en expressió abstracta: *recolentia, intelligentia, volentia*, seguides d'*esse, forma, materia, conjunctio, simplicitas, compositio, substantia, accidens, virtus, operatio, interioritas, exterioritas, motus*;
- (4) les figures A, V i X no presenten les línies (arestes) que connectaven tots o alguns dels seus vèrtexs en la versió anterior.

I, a la Il·lustració 12:

- (5) en lloc de la clàssica Figura Elemental de l'Art quaternària, n'hi ha una que (a) al cercle exterior presenta una llista adaptada de la de la Figura S, que reemplaça les tres potències de l'ànima per les quatre qualitats abstractes dels elements, *igneitas, aeritas, aqueitas, terreitas*, seguides de la resta dels components de la Figura S, llevat de *conjunctio*,³⁰ i (b) a l'interior té la Segona Figura Elemental de l'AD;³¹
- (6) en lloc de la *Figura communis*, ara tenim una altra figura també etiquetada *Elementa*, en forma de *volvelle* doble, amb tres cercles que presenten els mateixos setze conceptes de la figura anterior, i dos d'interiors amb els quatre elements.

³⁰ Per tal de complir amb la xifra de setze que requereix la combinatòria.

³¹ OS I, 303; ROL XXXII, 33

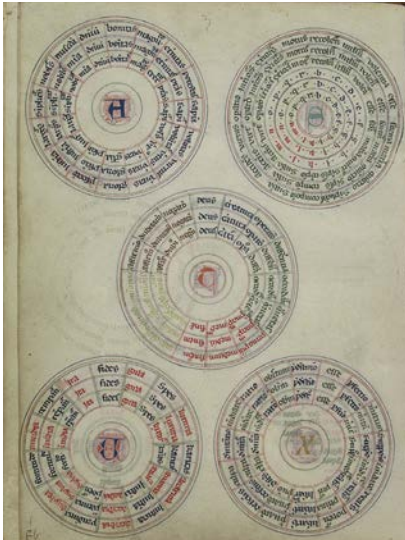
El primer canvi es deu, probablement, a la constatació que Y i Z realment no funcionaven com a figures, i eren perfectament assumibles dins del discurs de l'Art. Per a les noves llistes tan curiosament similars de (3) i (5), vegeu Bonner (2012: 116-118). Però les novetats que ens interessien aquí són (2) i (4). La de (4) s'explica perquè si l'Art ja no funciona amb grafs que combinen conceptes de dos en dos, ja no calen les xarxes de línies que connecten punts; per a hipergrafs, amb $k = 3$, el que cal són *volvelles* com les que es presenten a continuació.

Pel que fa a (2), Llull explica la primacia de T al *PropAD*:

Quoniam ·t· in hac arte est instrumentum omnibus aliis figuris, ·t· ipsius artis et super ipsum revolvuntur omnes, cum sine ipso in figuris huius artis nichil utile operari possit, ideo de ipso ·t· tamquam de instrumento tractatur primitus in hoc presenti opere. Et quia de ipso tractatur primitus dicitur et describitur.³²

De fet, l'*AIPU*, ara esmentada com a obra paral·lela del *PropAD* en les incursions de Llull en un sistema triàdic, és com un petit tractat de l'Art basat *únicament* en la Figura T.

Després de les primeres figures del *PropAD* hi ha dues pàgines amb les segones figures:



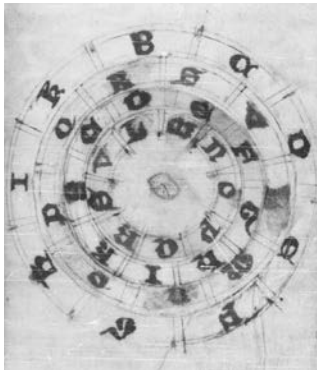
Il·lustració 13. Venècia, Marciana VI 200, f. 159v Il·lustració 14. Venècia, Marciana VI 200, f. 160r

³² París, BNF, Lat. 16113, f. 53v; Venècia, Marciana, ms. VI 200, f. 161r; *MOG* III, viii, 2 (504).

En comptes de les segones figures triangulars de cambres binàries inserides enmig del text com teníem a l'*AD*, ara apareixen al principi de l'obra, just després de les primeres figures, totes en forma de *volvelles* per tal de poder produir combinacions ternàries.³³ I altra vegada apareix la Figura T substituint la Figura A al centre de la primera pàgina.

Fins ara l'única versió impresa existent de l'obra, i per tant l'única que ha circulat entre els estudiosos, és la de *MOG III*. Com que el *PropAD* forma part del mateix tom que l'*AD*, els editors de la moguntina no van trobar que fos necessari «repetir» les primeres figures, i això ha fet pensar als lectors que eren idèntiques. Pel que fa a les segones figures, van situar la de la Figura T davant de l'*AIPU*, i la resta de les figures (és a dir, totes menys la T)³⁴ al començament del *PropAD*, així i tot amb alguns canvis en les darreres dues figures.

Si el *PropAD* i l'*AIPU* són obres experimentals en un període de transició, els hipergrafs amb $k = 3$ s'instal·len definitivament en l'Art a l'etapa ternària a partir de l'*Ars inventiva veritatis* (*AIV*), amb la Quarta figura (vegeu la Il·lustració 4 més amunt). Amb la *Taula general* un parell d'anys posterior, Lull incorpora la Taula, un sistema enginyós creat per mostrar en forma tabular totes les possibles combinacions ternàries generades per la *volvelle* de la Quarta figura. Funciona, per tant, com l'equivalent ternari de les Segones Figures, és a dir, les matrius d'adjacència de la combinatòria binària a l'etapa quaternària.



Il·lustració 15.
Uppsala C 51, f. 105r

En les etapes posteriors, trobem dos exemples de *volvelle* amb $k = 4$. El primer és a l'*Arbre de filosofia desiderat*, en què els quatre cercles rotatoris alternen dos jocs de lletres (vegeu la Il·lustració 15). Comptant des de l'exterior, el primer i el tercer contenen les nou lletres B a K, de l'Art ternària;³⁵ i el segon i el quart contenen nou lletres, d'L a U, amb cada lletra representant una parella de conceptes.³⁶

³³ O dos jocs de combinacions ternàries en el cas d'S, i combinacions sèxtuples en el cas de la darrera *Figura communis*.

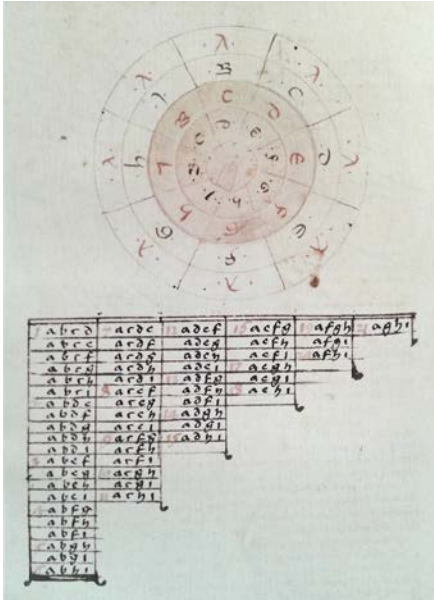
³⁴ Cosa que fa pensar al lector que la Figura A continua essent la figura principal.

³⁵ Representen els dos conceptes estàndard més un de nou. Prenent només tres exemples per tal de mostrar la novetat, tenim D que significa duració, contrarietat i memòria; F que significa saviesa, mitjà i punt transcendent, i G que significa voluntat, fi i vacuïtat (ORL XVII, 408).

³⁶ Són parelles perquè L, per exemple, significa «ens qui és Déus e ens qui no és Déus»; M significa «ens

El segon exemple prové de l'Art *abreujada de preicació*, on també trobem una *volvelle* de quatre cercles, ara amb unes altres peculiaritats.

Com es pot veure a la II·lustració 16, els cercles d'aquesta *volvelle* només tenen vuit compartiments cada un; els tres interiors, amb l'alfabet estàndard de l'Art ternària³⁷ (sense la novena lletra K) i, en el cercle exterior, la lletra A de Déu repetida vuit vegades. Amb això es poden formar les cambres de la taula exposada a sota de la *volvelle* a la mateixa II·lustració 16.³⁸



II·lustració 16. Innichen-San
Candido VIII.D.4, f. 155v

1.3 Reticles

La definició d'un reticle en la teoria matemàtica dels conjunts té dues parts:³⁹ (1) és un conjunt parcialment ordenat, (2) en el qual, per a cada parell

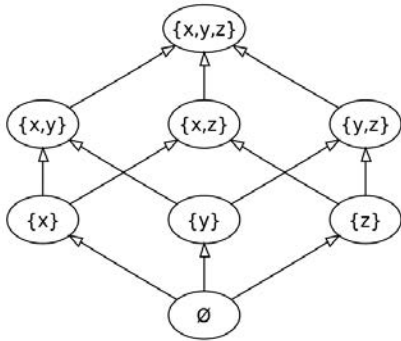
reial e ens fantàstic», etc. (ibid.). Les nou lletres no inclouen la T, reservada per a la figura de l'Art que ja coneixem.

³⁷ Amb la polisèmia habitual: B = bonesa, justícia, avarícia, C = grandesa, prudència, glotonia, etc. Vegeu ROL XVIII, 56-26.

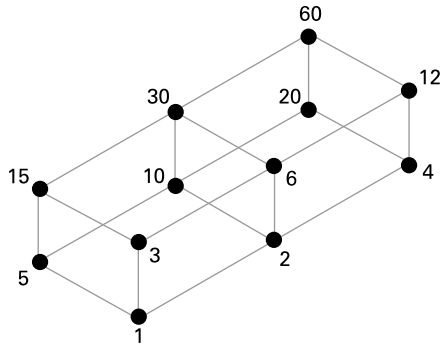
³⁸ Aquesta taula només apareix en un manuscrit, el de la II·lustració. Per a un estudi de les diverses combinacions de l'obra, vegeu ROL XVIII, 11-13, que també dona una explicació dels moviments (*motus*) i circulacions (*circulationes*) de les rodes, i també per a una taula de les cambres quaternàries emprades en la quarta distinció, que Llull va triar segons les necessitats de cada tema tractat. A Llull (1982, 67) es mostra la seqüència de cambres dels sermons de la quarta distinció.

³⁹ L'obra clàssica sobre el tema és Birkhoff (1967), però habitualment qualsevol text de matemàtiques

d'elements, hi ha un suprem i un ínfim. Ordenament parcial vol dir que entre qualsevol parell dels seus elements es pot establir una relació d'ordre, que normalment s'escriu $x \geq y$, i que cal interpretar com «x és més gran o igual a y». En els reticles, tanmateix, es dóna un sentit molt més ampli que el purament quantitatiu a les paraules «més gran», expressable com a «superior (o anterior)» en un context construït per l'investigador, que només s'ha d'atenir a les regles formals de la definició d'un reticle. Per tant, es pot referir a relacions com per exemple «és un subconjunt de» o «és un divisor de 60», representades en aquestes dues figures;



Il·lustració 17



Il·lustració 18

Així que els components de més amunt seran «superiors» i els de més avall «inferiors». Igualment es pot dir que aquells «dominen» aquests, cosa que coincideix perfectament amb la terminologia de la teoria elemental lul·liana quan qualifica com a *regina*, *dominus*, *domicella*, *ancilla* i *subditus / servus* els elements segons la seva situació, o quan diu que aquesta figura mostra «com un element senyoreja altre segons complexions e humors». ⁴⁰ No entrarem en més detalls sobre la segona condició de la definició perquè no té una aplicació directa en l'ús que fa Llull dels reticles; basta saber que han de tenir acotaci-

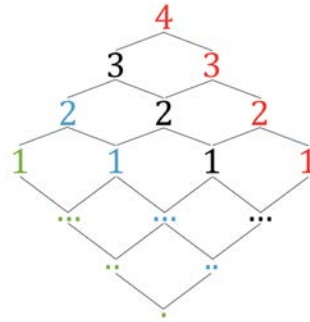
que tracta de la teoria dels conjunts parla dels reticles (*lattices* en anglès).

⁴⁰ OS I, 303; ROL XX, xxx i 77-79. Pel que fa a la dominació o superioritat, caldria tenir en compte que la notació « \geq » («superior o igual a») fa que el conjunt sigui *parcialment* ordenat i, en conseqüència, per exemple, que en una graella com la de la Il·lustració 18, el nombre de 10 pugui qualificar-se com a «anterior» al mateix 10. Si no fos així, i la relació fos « $>$ », sense la possibilitat d'igualtat, tindríem un conjunt *totalment* ordenat. També cal insistir que en els reticles es pot donar una interpretació fins i tot contrària a la d'una grandària superior a la notació « \geq ». Si, per exemple, per a una activitat determinada, volguéssim donar preferència als més joves d'un grup escolar, podríem construir un reticle on « $x \geq y$ » voldrà dir «x és més jove o d'una edat igual a y», per tal de formar un reticle on els més joves tinguessin preferència (serien «superiors») sobre els de més edat.

ons superiors i inferiors.⁴¹ Finalment, caldria assenyalar que, a diferència dels grafs, que no tenen res a veure amb quantitats, magnituds o mides, els reticles tenen a veure preferentment amb comparacions quantitatives o qualitatives. Per comprovar-ne el funcionament en la Figura elemental, prenem la primera graella de la II·lustració 9 més amunt, a la qual afegim els graus fraccionaris (en forma de punts; per exemple, tres punts = $\frac{3}{4}$ de grau, etc.), i així obtenim la II·lustració 19.⁴² A la II·lustració 20 ho representem en forma de reticle, en el qual els components superiors «dominen» els inferiors.

4	3	2	1
3	2	1	...
2	1
1

II·lustració 19



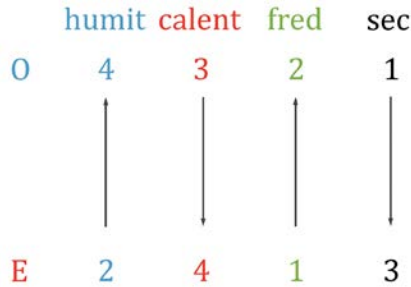
II·lustració 20

Aquesta representació dels graus d'intensitat de les qualitats elementals, fonamental en la teoria elemental lul·liana, té una aplicació rellevant, el de la *digestio, mixtio o devictio* («venciment» en català) de les gradacions en els medicaments compostos. Es tracta d'explicar quin element «domina» en un compost. Prenguem un exemple del *Liber de regionibus sanitatis et infirmitatis*, en què Llull explica el resultat de combinar dues plantes equivalents a O i E de la II·lustració 9;⁴³ hem posat les fletxes apuntant a la qualitat dominant d'O, la qual *vincit*, com diu el text, la qualitat corresponent de l'altra herba d'E.

⁴¹ O més exactament, cada parell d'elements ha de tenir un suprem i un ínfim, cosa complida en l'ús que en fa el beat Ramon. Per a una definició matemàticament correcta, vegeu l'entrada «Reticle (ordre)» a la *Viquipèdia*.

⁴² Als *Començaments de medicina*, Llull els anomena «graus entel·lectuals, los quals són de tan poca quantitat que no abasten a ser sensuais» (*OS* II, 452; *NEORL* V, 78; *ROL* XXXI, 503-4). Al *Liber de levitate et ponderositate elementorum* són les *partes grossae o augustales* (*ROL* XXXIV, 176).

⁴³ Vegeu *ROL* XX, pp. xxx, 92-93 i *ROL* XXXIV, 156, on s'explica com es calculen les combinacions de qualitats en les *mixtiones*. Pel que fa al concepte de *devictio*, també té un paper rellevant en l'astronomia lul·liana; vegeu *ROL* XVII, 68, i *NEORL* V, 128. Cf. Yates (1985, 40, 74, 87, 103); Pring-Mill (1991, 125); Gayà (1979, 113, 126).



Il·lustració 21

Les gradacions de les qualitats, tanmateix, només són un aspecte de la Figura elemental de l'Art, tal com és representada en els quatre quadrangles de la Il·lustració 10; també pot representar altres facetes de la teoria elemental lul·liana, com són qualitats pròpies i apropiades, lleugeresa i ponderositat, simplicitat i composició, etc.,⁴⁴ i això no sols en cada quadrangle sinó en les relacions entre els quatre quadrangles. La Figura elemental és, doncs, una xarxa de xarxes, totes reticulades.⁴⁵

La Figura Elemental, formada per quatre quadrangles de setze compartiments cadascun, sempre ha semblat una anomalia entre les figures lul·lianes, sobretot respecte les altres de l'Art, totes tan diferents. Ens hem adonat que si té aquesta forma és perquè Llull no pretén expressar conceptes en funció de la seva relacionalitat (representables, per tant, mitjançant grafes), sinó valorar aquelles relacions com a comparacions quantitatives (o qualitatives), cosa que implica la introducció del concepte de \geq i de reticles. Això no vol dir que els reticles no puguin ser representats mitjançant grafes; de fet, en els *ComMed* va trobar la manera de representar-los gràficament –més ben dit, hipergràficament–, però la funció normal d'un graf no és la d'oferir unes valoracions comparatives sinó la de mostrar simples relacions.

2. Les figures en l'articulació del text

Les Segones Figures de l'Art quaternària i l'equivalent de la ternària, que és la Taula, també tenen una altra funció dins dels escrits de Ramon Llull, una

⁴⁴ Vegeu Dambergs (2000).

⁴⁵ Aquest aspecte mereixeria un estudi monogràfic; aquí es tracta només d'assenyalar els reticles com un dels recursos gràfics que va utilitzar Ramon Llull.

de característica –i que potser és única en textos filosòfics o teològics medievals–, que és facilitar una articulació racional del text.

Com a exemple, prenguem «La segona distinció, qui és de condicions» de l'AD, que comença d'aquesta manera:

Aquesta distinció és departida en dues parts. La primera part és de les condicions qui's covenen a la segona figura elemental; la segona part és de les condicions qui's covenen a la segona figura demostrativa.⁴⁶

Es refereix a les dues mitges matrius següents:

foc	àer	aigua	terra
foc	àer	aigua	terra
foc	àer	aigua	
àer	aigua	terra	
foc	àer		
aigua	terra		
foc			
terra			

AA	SS	TT	VV	XX	YY	ZZ
AS	ST	TV	VX	XY	YZ	
AT	SV	TX	VY	XZ		
AV	SX	TY	VZ			
AX	SY	TZ				
AY	SZ					
AZ						

Il·lustració 22. Segona figura elemental

Il·lustració 23. Segona figura demostrativa

A continuació afegeix:

Esta figura és departida en deu cambres, segons que en ella apar. On, primerament tractarem de la primera cambra e puxes de les altres.⁴⁷

Això vol dir que el discurs seguirà l'ordre de les mitges matrius, prenent les cambres de la primera columna d'una en una i, a continuació, les de la segona. I, de fet, els apartats que segueixen a l'AD s'intitulen, «1. De la cambra de [foc foc]», «2. De la cambra de [foc àer]», i així fins a «10. De la cambra de [terra terra]». A la segona part, basada en la Figura demostrativa, segueix el mateix procediment per a les 28 cambres en les quals està dividida, des de [AA], [AS] fins a [ZZ].⁴⁸

Aquesta organització, la retrobarem a «La quarta distinció qui és de qüestions», qüestions solucionades per cambres amb múltiples compartiments bina-

⁴⁶ OS I, 309.

⁴⁷ Ibid. Per aquesta divisió del text en «figures» i «cambres», vegeu el text que hi ha a continuació de la n. 6 més amunt.

⁴⁸ De fet, són més de 28 cambres, perquè després de S [n] intercala 10 (o 4 depenent de la versió; veg. ROL XXXII, lx) de la Segona figura d'S.

ris, els primers dels quals són una repetició exacta de la seqüència que acabem de veure de la segona distinció.⁴⁹

QUESTIÓ ÉS: si los elements simples entren en composició amb parts essencials o amb parts integrals.

SOLUCIÓ:

foc foc	foc aigua	T T	concordança majoritat	contrarietat
----------------	-----------	-----	-----------------------	--------------

menoritat.

Per estes cambres és significada [...]

QUESTIÓ. Demanat és: què és causa que lo cors elementat sia product dels quatre elements, e no és los quatre elements?

SOLUCIÓ:

foc àer	àer aigua	aigua terra	foc terra.
----------------	-----------	-------------	------------

Discurrent F per les cambres [...]⁵⁰

Després de les 38 qüestions sobre les segones figures que acabem d'assenyalar, ve una segona part amb 1080 qüestions basades en les figures que falten, és a dir A, S, T, V, X, teologia, filosofia i dret.⁵¹

Aquesta manera d'organitzar la distinció de Condicions i la de Qüestions es torna a fer servir en altres obres, tant de l'etapa quaternària com de la ternària, però en aquesta darrera, en lloc de formar cambres binàries amb les segones figures, se'n formen de ternàries amb la Taula.⁵² El procediment s'inicia amb la *Taula general* i segueix en altres obres, com la *Lectura compendiosa Tabulae generalis*, l'*Ars compendiosa*, l'*Ars generalis ultima* i l'*Ars brevis*.

La Taula, però, només és una de les figures que Llull utilitza en l'etapa ternària per articular els seus textos. A la mateix *Taula general*, per exemple, trobem que, a la quinta distinció, de Qüestions, n'utilitza tota una sèrie. En el requadre següent mostrem les successions de lletres que Llull deriva de quatre de les figures (entre les quals la Taula, a la quarta columna) per encapçalar, i així organitzar i articular, una enorme quantitat de qüestions amb les seves solucions.⁵³

⁴⁹ Els destaquem en negreta per fer més visible la seqüència.

⁵⁰ OSI, 396-7.

⁵¹ Són les dues parts discutides a OSI, 395, en la primera de les quals les solucions van acompanyades per exemples, mentre que en la segona no en tenen; veg. Bonner (2012, 100).

⁵² Podria semblar que les cambres de la Taula tenen quatre components, però no és així. La lletra T, que hi apareix repetidament, no té cap significat, sinó que només fa de separador per indicar que les lletres que la precedeixen són de la Primera figura i les que la segueixen, de la Segona. Per a l'equivalència entre les segones figures de l'Art quaternària i la Taula de la ternària, vegeu p. 17 més amunt.

⁵³ Les xifres entre parèntesis a la capçalera corresponen a les pàgines de l'edició d'ORL XVI en què comencen els apartats respectius. Per a la versió llatina, vegeu ROL XXVII, 86, 90, 97 i 142. Altres apartats també s'ordenen mitjançant figures o lletres de l'Alfabet, però de manera més simple.

1 ^a figura (381)	2 ^a figura (384)	4 ^a figura (389)	Taula (424)
B C	B C D	B C F	B C D
C D	E F G	C D G	B C T B
D E	H I K	D E H	B C T C
E F	B E H	E F I	B C T D
F G		F G K	B D T B
etc.		etc.	etc.

La *volvelle* amb $k = 4$ de l'*Arbre de filosofia desiderat*, a la qual ens hem referit més amunt,⁵⁴ té una funció similar en l'organització de les dues darres distincions; en aquest cas amb els dos cercles exteriors de la figura, fent una successió de cambres binàries que encapçalen cada apartat de totes dues distincions.⁵⁵ D'altra banda, aquesta *volvelle* també s'usa per formar cambres quaternàries, per a les solucions de les qüestions de la darrera distinció, que s'inicien amb les dues lletres que encapçalen l'apartat en què es troben.⁵⁶ És un exemple més d'un procediment que utilitza en moltes obres, i que, com ja hem remarcat, sol anar acompanyat de textos dividits no en capítols o distincions, sinó mitjançant els mateixos recursos visuals, figures, arbres, cambres, etc.⁵⁷

3. Raonament diagramàtic

Com hem vist, la immensa majoria dels recursos gràfics lul·lians apareix en obres que exposen o desenvolupen l'Art;⁵⁸ i, d'altra banda, que totes són grafs, amb l'excepció important del reticle de la Figura elemental. Cal, però, intentar comprendre millor què és el que es proposa Ramon Llull amb aquest aparat de figures i quina n'és la finalitat. Perquè si bé, des del punt de vista formal, les figures lul·lianes es podrien emmarcar (en uns casos més fàcilment que en altres) en una tradició diagramàtica molt extensa a l'Edat Mitjana, des del punt de vista funcional, possiblement són úniques.

I és des d'aquest darrer punt de vista que el sistema de Llull entraria dins

⁵⁴ Al passatge corresponent a la n. 35.

⁵⁵ Vegeu ORL XVII, 440, on explica amb molta cura com funciona el mecanisme.

⁵⁶ Per exemple, l'apartat «De c. m.»: «Qüestió: És demanat què és object en human enteniment? Solució: c.m.d.s. Qüestió: És demanat què és potència en object? Solució: c.m.h.s.» (ORL XVII, 486).

⁵⁷ Vegeu la n. 47 més amunt.

⁵⁸ La principal excepció a aquesta constatació són els arbres, que tenen un paper més secundari i apareixen més esporàdicament en l'opus lul·lià. Ens n'ocuparem en un treball que tenim en preparació.

del que, en matemàtiques i en ciències informàtiques, s'ha anomenat *diagrammatic reasoning*, és a dir, el raonament que es fa mitjançant recursos visuals. Té a veure amb conceptes i idees que es presenten amb diagrames i imatges en comptes de fer-ho per mitjans lingüístics o algebraics. Es distingeix dels recursos gràfics habituals, il·lustracions científiques, mapes o dibuixos tècnics, perquè mostra una informació abstracta que té un caràcter qualitatiu o relacional, en comptes de representar coses concretes i tenir un caràcter quantitatiu.⁵⁹ Són recursos visuals que fonamenten o impulsen l'elaboració de coneixements, que és el que diu Llull que vol fer amb les figures de l'Art:

Honrat Senyor, qui vol adorar e contemplar la vostra sancta veritat, cové que afigur figures sensuais per les quals pusca pujar a les figures entel·lectuals ab les quals pusca e sàpia e vulla adorar e contemplar la vostra veritat vertuosa.⁶⁰

La intenció per que nos posam figures en esta Art, es per ço que en elles esguardem los començaments d'esta Art: car per la especulació sensual s'exalça l'enteniment a especular les coses sperituals, per lo qual exalçament se exalça la volentat a amar aquelles.⁶¹

De vegades ho explica d'una manera una mica diferent:

Intentio quare in hac Arte figura traditae sunt est ut per sensum imaginatio, et per imaginationem intellectus sentiat auxilium, et maxime ut per eas universalia principia in eis appareant, et ad memoriam facilius reducantur.⁶²

Així que les figures lul·lianes entren clarament dins de la categoria de raonament diagramàtic (o meditació o contemplació diagramàtica).

Una característica del raonament diagramàtic és que funciona preferentment en el domini del descobriment, no en el de la justificació.⁶³ Se'l considera

⁵⁹ Veg. «Diagrammatic reasoning» a la Wikipedia anglesa, que cita Brasseur (2003). El primer exemple que mostra és de la *characteristica universalis* de Leibniz, que il·lustra amb el diagrama del frontispici del seu *De arte combinatoria*, de coneguda derivació lul·liana.

⁶⁰ *Llibre de contemplació*, ORL VIII, 194; OE II, 1080.

⁶¹ *Art amativa*, ORL XVII, 9. El text equivalent de l'*AIV* és bastant similar: «Ratio autem quare figurae praedictae sunt positae in hac Arte stat in hoc ut sensus situm et dispositionem illarum apprehendat, eo quod in illa apprehensione imaginatio sit speculum, in quo intellectus dispositionem figurarum principiorum hujus Artis et ejus modum discursivum et investigativum attingat.» ROL XXXVII, 9. Pel que fa a la citació de l'*Art amativa*, cal tenir en compte la definició que dona Blaise de *speculatio*: 1. spéculacion, action de l'intellect qui se repose dans la seule connaissance de la vérité. 2. contemplation (amb citacions de Sant Tomàs i Hug de Sant Victor), Blaise (1975, s.v.).

⁶² *Compendium seu commentum Artis demonstrativae*, MOG III, vi, 1 (293). Un altre procés és descrit al *PropAD*, en el qual cada figura és tractada de tres maneres: com a figura sensitiva, figura imaginativa i figura intel·lectual; veg. MOG III, viii, 2-7 (504-9).

⁶³ Vegeu la citació que acompanya la n. 3 més amunt.

una estratègia per resoldre o solucionar problemes,⁶⁴ o com diria Llull, «solre (o soure) qüestions». Un autor ho expressa així:

Whatever processes we use in solving problems like these, they are processes for *finding* answers, and the *assurance* they give that they are correct, while important, is only secondary. Until we find answers, their correctness is hardly in contention.⁶⁵

En aquest context *finding* correspon exactament amb l'*invenire* («atrotbar» en català medieval) de qualsevol obra de l'Art, i descriu la seva funció més bàsica. La separació entre aquesta funció inventiva i la de fornir una justificació o una demostració que el resultat és correcte, prové de la lògica aristotèlica, com hem explicat en un altre lloc.⁶⁶

En lloc d'una separació, el que Llull ens proposa és la unió d'aquests dos àmbits. Si l'edifici de l'Art està bastit sobre els mecanismes inventius de les figures, això inclou la part demostrativa que pertany a les Solucions de les Qüestions. Si mirem els dos exemples que precedeixen la n. 50 més amunt, veurem que les Solucions es construeixen escollint cambres binàries extreteres de les diverses figures de l'AD.⁶⁷

Per tant, els mecanismes combinatoris amb els qual funciona l'Art s'estructuren de principi a fi mitjançant les figures. Al principi proporcionen els seus fonaments ontològics (Figures A, S i V i Elemental) i epistemològics (S i T),⁶⁸ que s'apliquen al final en les demostracions, és a dir en les solucions a les Qüestions. Són els diagrames que sostenen els raonaments de l'Art lul·liana.

⁶⁴ Isabel Luengo, «A Diagrammatic Subsystem of Hilbert's Geometry», dins Allwein i Barwise (1996, 150).

⁶⁵ Herbert Simon, «Foreword», dins Glasgow *et al.* (1995, xii), que fa aquesta observació després de presentar un problema sobre les distàncies del punt de suport de dos pesos als braços d'una balança.

⁶⁶ «Els Tòpics s'ocupaven de la inventio, un mètode per “trobar” o “descobrir” arguments o contraarguments sobre gairebé qualsevol matèria que pogués sorgir en un debat [...]. Els Analítics s'ocupaven del que Ciceró, Boeci i escriptors posteriors van anomenar el *judicium*, o la capacitat, basada en un ventall molt més reduït de mètodes (normalment purament sil·lògistics), d'arribar a un judici vàlid sobre la veritat o la falsedat d'un argument.» (Bonner 2012, 18, basat en la primera part de Ruiz Simon, 1993). Vegeu, a més, el passatge corresponent a la n. 3 més amunt.

⁶⁷ Aquí és important entendre que aquestes cadenes de cambres *són* les solucions; els textos que les segueixen són afegits, glosses o explicacions del que volen dir. És per això que només les 38 primeres Qüestions en tenen, com a mostra per al lector de com fer-ho amb les 1080 Qüestions que segueixen i que van sense aquestes explicacions, que (en teoria) ja no són necessàries. Així que formula totalment les seves demostracions amb components del mateix edifici inventiu.

⁶⁸ La Figura S és doble: ontològica per la constitució de l'ànima racional, i epistemològica per la seva manera variable de processar informació.

4. Conclusions

El que ens sembla més remarcable del que hem vist fins aquí és que Llull fos capaç d'utilitzar grafs i reticles correctament i de manera extensa sense tenir accés a cap fonament teòric que l'ajudés. Allò que mostra millor la seva destresa és la intuïció que li va permetre aplicar correctament la relació entre la representació lineal d'un graf i la corresponent matriu d'adjacència (com hem vist a l'apartat 1.1 més amunt). Es tracta d'un ús desenvolupat cinc-cents anys abans que hom fes una formulació matemàtica qualsevol d'aquestes estructures. Perquè, de fet, la teoria dels grafs no va ser posada en circulació fins al 1736, quan Leonard Euler va publicar un cèlebre estudi proposant una solució general al problema de com travessar els set ponts de Königsberg sense repetir-ne cap en l'intent. La teoria dels reticles va ser objecte de consideracions puntuals de Boole, al segle XIX, i de Peirce, a començament del segle XX, però no va tenir una formulació teòrica rigorosa fins a la segona meitat d'aquest darrer segle. La teoria dels hipergrafs no apareix fins al ja citat estudi de Berge de 1970.

És una situació comparable amb el cas de les teories electorals, en què diversos estudis han demostrat que Llull va proposar models coherents cinc-cents anys abans de les teories de Borda i Condorcet.⁶⁹ Tanmateix, malgrat que els grafs i els reticles són components molt més fonamentals del seu sistema, el seu paper com a models matemàtics lul·lians ha suscitat un interès molt escàs. Grafs i reticles són presents ja a la primera versió de l'Art, l'ACIV, escrita, segons la *Vita coetanea*, com a resultat de la II·luminació de Randa;⁷⁰ continuen essent utilitzats a tota l'etapa quaternària de l'Art i, encara que disminueixen en l'etapa ternària –potser per la reacció que suscitaven aquestes novetats en els seus lectors–, en resten components que són fonamentals per a l'Art fins al final. Amb les eines que proporciona la matemàtica moderna hom pot estudiar aquests components sense sentir el pànic comprensible dels lectors medievals davant d'uns artefactes tan insòlits i estranys.

⁶⁹ La teoria electoral de Llull ha rebut tanta atenció que és esmentada en un suplement de l'*Encyclopaedia Britannica* de l'any 2001, que insinua que si hom l'hagués tingut en compte en les eleccions de 2000 als EUA potser hauria guanyat Al Gore en comptes de George W. Bush.

⁷⁰ Vegeu la il·lustració 5 més amunt, i també Bonner i Soler 2007.

Abreviatures

ACIV = *Ars compendiosa inveniendi veritatem*

AIV = *Ars inventiva veritatis*

AD = *Art demonstrativa*

PropAD = *Liber propositionum secundum Artem demonstrativam compilatus*

ComMed = *Començaments de medicina (Liber principiorum medicinae)*

Bibliografia

- Allwein i Barwise (1996) = Allwein, Gerard i Jon Barwise, eds., *Logical Reasoning with Diagrams* (Oxford University Press, 1996).
- Basart (1994) = Basart i Muñoz, Josep M., *Grafs: fonaments i algorismes* (Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona, 1994).
- Berge (1970) = Berge, Claude. *Graphes et hypergraphes* (París: Dunod, 1970).
- Birkhoff (1967) = Birkhoff, Garrett. *Lattice Theory* (Providence RI, American Mathematical Society: Colloquium Publications, Vol. 25, 1967; 3^a ed. 1993 i 1995).
- Blaise (1975) = Blaise, Albert, *Lexicon latinitatis medii aevi* (Turnhout: Brepols, 1975).
- Bonner (2012) = Bonner, Anthony, *L'Art i la lògica de Ramon Llull. Manual d'ús* (Universitat de Barcelona / Universitat de les Illes Balears, 2012).
- Bonner i Soler (2007) = Bonner, Anthony i Albert Soler, «La mise en texte de la primera versió de l'Art: noves formes per a nous continguts», *SL* 47 (2007), pp. 29-50.
- Brasseur (2003) = Brasseur, Lee E., *Visualizing Technical Information: A Cultural Critique* (Amityville, NY: Baywood Publ., 2003).
- Dambergs (2000) = Dambergs, Yanis, «Elemental Figure Symmetry», *SL* 40 (2000), pp. 81-110.
- Dieudonné (1964) = Dieudonné, Jean, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (París: Hermann, 1964).
- Fitting (1983) = Melvin Fitting, *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics* (Dordrecht-Boston-Lancaster: D. Reidel, 1983).
- Gardner, Martin (1982) = «The *Ars Magna* of Ramon Llull», *Logic Machines and Diagrams* (Chicago: Chicago University, 1982).
- Gayà (1979) = Jordi Gayà, *La teoría luliana de los correlativos. Historia de su formación conceptual* (Palma de Mallorca, 1979).

- Glasgow *et al.* (1995) = Glasgow, Janice, N. Narayanan and B. Chandrasekaran, eds., *Diagrammatic reasoning: cognitive and computational perspectives* (Menlo Park, CA: AAAI Press / MIT Press, 1995).
- Hames (2003) = Hames, Harvey, «The Language of Conversion: Ramon Llull's Art as a Vernacular», *The Vulgar Tongue. Medieval and Postmedieval Vernacularity*, ed. Fiona Somerset i Nicholas Watson (University Park, PA: Pennsylvania State University Press, 2003), pp. 43-56.
- Llull (1982) = Llull, Ramon, *Art abreujada de predicació*. ed. Curt Wittlin, «Biblioteca Escríny. Col·lecció de Textos Medievals Breus» 4 (Sant Boi de Llobregat: El Mall, 1982).
- Meier (2003) = Meier, Christel: «Le rappresentazioni dell'invisibile. Sulla nuova diagrammatica del XII secolo», a Il secolo XII: la «renovatio» dell'Europa cristiana. Atti della XLII settimana di studio. Trento, 11-15 settembre 2000, ed. Giles Constable *et al.* (Bolonya: Il Mulino, 2003), pp. 479-510.
- Pring-Mill (1991) = Robert D.F. Pring-Mill, *Estudis sobre Ramon Llull*, ed. Lola Badia i Albert Soler, «Textos i Estudis de Cultura Catalana» 22 (Barcelona: Curial-Publicacions de l'Abadia de Montserrat, 1991).
- Rubio (2000) = Rubio, Josep E., «Com és la verdadera Figura X de l'*Ars compendiosa inveniendi veritatem*», *SL* 40 (2000), pp. 47-80.
- Rubio (2014) = Rubio, Josep E., «Ut sub brevibus multa possit capere: la notación alfabética en el Ars de Ramon Llull», *Historia Religionum* 6 (2014), pp. 97-110.
- Ruiz Simon (1999) = Ruiz Simon, Josep Maria, *L'Art de Ramon Llull i la teoria escolàstica de la ciència* (Barcelona: Quaderns Crema, 1999).
- Serra (2013) = Anna Serra Zamora, «Iconografía performativa en Ramon Llull: Imágenes móviles y pensamiento inventivo», *Scintilla, Curitiba* 10/1 (2013), pp. 133-156.
- Yates (1985) = Frances Yates, *Assaigs sobre Ramon Llull*, pròleg Lola Badia (Barcelona: Empúries, 1985).

Paraules clau

Figures de l'Art, Diagramàtica, Grafs, Reticles

Key words

Figures of the Art, Diagrammatics, Graphs, Lattices

Resum

Aquest article analitza les figures de l'Art lul·liana i la seva interpretació a partir de models matemàtics. Es clarifiquen alguns aspectes de l'ús de la teoria dels grafs, que en aquest cas s'amplia a la dels hipergrafs i els reticles, aquests darrers relacionats amb la Figura Elemental. En canvi, no s'aborda ni el cas dels arbres ni el de les figures del *Llibre de contemplació*, que seran objecte de treballs posteriors. Finalment, les figures de l'Art es presenten com un exemple del que, en la moderna ciència, la tecnologia o l'administració d'empreses, s'anomena raonament diagramàtic.

Abstract

This article discusses the figures of Lull's Art and their interpretation in the light of mathematical models. Some points are cleared up concerning the use of graph theory, which is now also extended into that of hipergraphs and lattices, this last in connection with the Elemental Figure. Trees and the figures of the *Book of Contemplation* are not included, since they will be treated in forthcoming articles. Finally, the figures of the Art are presented as an example of what in modern science, technology and business administration is called diagrammatic reasoning.