

Tesi Doctoral de Gaspar Mayor Forteza

## *Títol: Contribució a l'estudi dels models matemàtics per a la lògica de la vaguetat*

Data de lectura: 26 de setembre de 1984. Qualificació: Excel.lent "cum laude"

### PRÒLEG

Ens és inevitable mirar cap enrera fins trobar les primeres senyes que indiquin la preocupació d'elaborar un llenguatge mínimament automàtic per al raonament. Ramon Llull (1235-1315) en el seu llibre *Ars Magna* planteja aquesta qüestió en la creença que el coneixement científic és la unió d'una sèrie de "idees bàsiques", la manera d'agrupar aquestes idees simples és el "gran art", mitjançant el que s'ha de construir la "Scientia Generalis". Llull no va anar molt més enllà de proposar 54 idees simples... no va donar regles (només algunes trivials) per "jugar" amb elles.

Després de Llull no varen faltar treballs més complets en la línia d'investigació esmentada, així cal senyalar el de J. Wilkins (1614- 1672): "Essay towards a Real Character and a Philosophical Language", però Wilkins no tenia la formació matemàtica suficient per entendre que un llenguatge artificial com el que estava imaginant necessitava ésser una mena d'aritmètica o àlgebra.

Descartes (1596-1760) va ésser el primer que va concebre la idea d'un llenguatge general ("une langue universelle") com a una espècie d'aritmètica, però el vertader responsable del neixement de la Lògica Matemàtica fou G. Boole (1815-1864) amb la publicació de "The Mathematical Analysis of Logic" en 1847. A partir dels treballs de Boole se construeixen sistemes formals que permeten deduir teoremes mitjançant procediments purament algebraics, teoremes que són, a continuació, interpretats en el llenguatge ordinari.

La lògica de la vaguetat és una lògica no clàssica, si entenem per lògica clàssica la lògica que Boole i, més tard, Schöeder varen construir algebraicament i a la que Frege, en 1879, va donar forma axiomàtica. La lògica clàssica és la que en els *Principia Mathematica* (1910-1913) de Whitehead i Russell té la màxima expressió. La teoria de conjunts (clàssica) que sorgeix dels P.M. seguint les lleis de la

lògica clàssica permet arribar a un model d'Àlgebra de Boole. Aquesta situació se repeteix en les lògiques no clàssiques i així de la lògica multivalent (en el sentit de tukasiewicz) sorgeixen les Àlgebres de De Morgan, que presenten una estructura algebraica més feble que les Àlgebres de Boole degut a la renúncia d'una o més lleis de la lògica clàssica, renúncia pròpia de les lògiques "divergents". Les Àlgebres de Heyting neixen, zer un procés semblant, a partir de la lògica intuicionista. Totes aquestes estructures algebraiques tenen com a fonament l'estructura reticular (amb més o menys propietats) que se converteix, així, en l'estructura bàsica de totes aquestes lògiques no clàssiques. Per altra part, i amb la intenció d'estudiar "la vaguetat inherent al raonament ordinari", L.A. Zadeh introdueix els conjunts difusos ("fuzzy sets") en 1965. La teoria dels conjunts difusos admet distintes eleccions de connectius lògics (fet que dona a la teoria una enorme flexibilitat) i d'aquesta manera s'han utilitzat operadors conjunció i disjunció amb els quals no se manté l'estructura reticular i així anam a parar a una nova estructura algebraica: Les Ternes de De Morgan i, més en general, els Espais de De Morgan, dels que parlarem en aquesta memòria. L'estudi dels connectius "i", "o" i "no" ens ha ocupat bona part del temps dedicat a aquest treball, hem tengut la intenció de generalitzar i globalitzar, en part, treballs fets anteriorment en aquest camp. Amb aquesta idea hem introduït conceptes com, per exemple, el de funció d'agregació, semi t-norma (no associativa) i (k)-negació (capítol 3).

Ens ha semblat interessant, també, i tan sols per un instant, prescindir de la hipòtesi de funcionalitat dels connectius per tal de posar de manifest la verificació o no de certes propietats, i no per raons "més profundes".

La memòria comença per uns breus preliminars indispensables i acaba amb la citació de referències que ens han servit directa o indirectament a l'hora de realitzar aquest treball.